

**DÖNTÉSTÁMOGATÓ MÓDSZEREK**

## segédlet I. rész

DÖNTÉSTÁMOGATÓ MÓDSZEREK .....	1
1. Jelölések és definíciók.....	2
2. Út, vágás egy irányított élhalmazban .....	4
3. Maximális út – minimális potenciál .....	7
4. Minimális út – maximális potenciál .....	10
5. Maximális folyam – minimális vágás .....	16
6. A maximális folyam, minimális vágás feladat kiterjesztése (több forrással és több nyelővel rendelkező hálózatok).....	20
7. Maximális folyam keresése alsó – felső kapacitás korláttal rendelkező hálózatokon .....	21
8. König feladat.....	25
9. Futószalag modell: .....	26
10. Általános König feladat (földszállítási feladat):.....	27
11. Általános szűk keresztmetszet feladat:.....	28
12. Minimális költségű folyam feladat.....	29
13. A Költségtervezési „time-cost trade-off” feladat hurokmentes hálón .....	31
14. A költségtervezési feladat megoldása a csak minimális kapcsolatokat tartalmazó MPM háló .....	49

**Ajánlott irodalom:**

*R.K. Ahuja, T.L. Magnanti, J.B. Orlin:*

*Network Flows, Theory, Algorithms, and Applications; Prentice Hall 1993.*

*Eugene L. Lawler*

*Kombinatorikus Optimalizálás: hálózatok és matroidok; Műszaki könyvkiadó, Budapest 1982*

*Klafszky Emil: Hálózati folyamatok Budapest, 1969*

*Hajdu M.-Klafszky E.: Hálós tervezési technikák az építések tervezésében és irányításában.*

*Műegyetemi Kiadó J-85005.*

## Motiváció

Egy építési beruházás során többször felmerülnek az alábbi kérdések.

- Mekkora a beruházás legrövidebb átfutási ideje ?
- Mekkora az adott átfutási időhöz tartozó minimális költségű megoldás ?

Lakásépítés során felmerül a kérdés, hogy ki lesz a megcélzott vevőkör és nekik mekkora lakásokat építsünk. A múltbeli tapasztalatokra támaszkodva jogosan vetődik fel a kérdés, hogy van-e összefüggés a vevőkör és a lakás paramétereinek között. Erre a kérdésre válaszolhatunk a sztochasztikus függőségi modell segítségével.

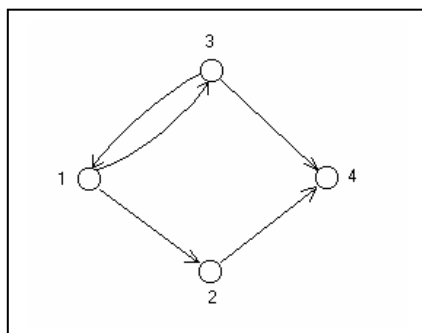
Gyakori feladat egy beruházás során, hogy több lehetőség, pályázat, közül válasszunk. A többtényezős értékelés a kiválasztáshoz nyújt segítséget.

### 1. Jelölések és definíciók

**Definíció: („Digráf” irányított élhalmaz vagy hálózat):** Jelöljön  $G=(N,A)$  egy irányított gráfot, ahol  $N$  csomópontok halmaza,  $A$  az élek halmaza.

Jelen jegyzetben véges sok pontból álló gráfokról lesz szó.

Például:



Jelölések:

$N$  (node): csomópontok halmaza

$$N = \{1,2,3,4\}$$

$A$  (arc): élek halmaza

$$A = \{(1,2);(1,3);(2,4);(3,4)\}.$$

**Definíció: (Irányítatlan élhalmazú gráf és hálózat):** Az irányított élhalmazú gráfhoz hasonlóan definiáljuk, azzal a különbséggel, hogy ebben az esetben, ha  $(i,j) \in A$  akkor  $(j,i)$  is létező él.

Például:

Jelölések:

$N$  (node): csomópontok halmaza

$$N = \{1,2,3,4\}$$

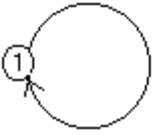
$A$  (arc): élek halmaza

$$A = \{(1,2);(1,3);(2,4);(3,4); (2,1); (3,1);(4,2);(4,3)\}.$$

Hurok él: Olyan él, amelynek kezdő és végpontja azonos.

Általában nem engedjük meg a létezését, mert így könnyebb az élekre hivatkozni.

Hurok élt (1,1) vagy kettős élt (1,2) ; (1,2) nem engedünk meg, de lehet: (1,2) ; (2,1).



**Definíció „séta, vonal, pálya”:** (út)

A séta egy olyan pontsorozat, amelyet élek kötnék össze. A pontok ismétlődhetnek.

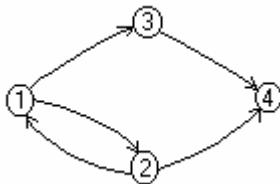
**Definíció „út”:** (egyszerű út) (irányított út, directed path)

Legyen  $[N,A]$  digráf, és legyen  $s,t \in N$ . Legyen  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_m \in N$  olyan pontsorozat, melyre  $x_0=s$ ,  $x_m=t$  és  $(x_{k-1}, x_k) \in A$  minden  $i = 1, \dots, m$  esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy  $x_0, x_1, \dots, x_m$  és egy  $s$ -ből  $t$ -be vezető út. Az út jelölésére a  $P = (s=x_0, x_1, \dots, x_m=t)$  szimbólumot használjuk. Olyan séta amelyben nincs két azonos pont.

Megjegyzem, hogy a fenti két definíció elnevezése szokásos a zárójelbe tett kifejezésekkel is. Ezek szerint egy pontsorozatot melynek bármely két egymás után következő tagja része az élhalmaznak ha tartalmaz ismétlődést, akkor útnak, ha nem tartalmaz ismétlődést, akkor egyszerű útnak nevezzük.

*Minden egyszerű út egyben út is illetve egy irányított hálózatban, ha létezik út akkor létezik egyszerű út is.*

A hálózati folyamatok témakör szakirodalomában a definíciók, elnevezések igen változatos formát öltenek. Itt és most igyekeztem csak annyi fogalmat definiálni amely a mérnöki menedzsment feladataihoz szükséges.



Út (walk)  
(1, 2, 1, 3, 4)

Egyszerű út (path)  
(1, 3, 4)

**Definíció: (kör, ciklus, hurok)**

Olyan séta, amelynek a kezdő és végpontja azonos.

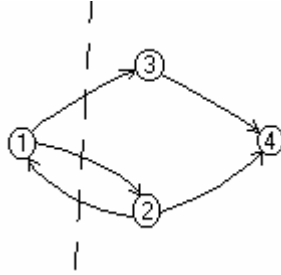
**Definíció: (egyszerű vagy irányított, kör, ciklus, hurok)**

$P = (s=x_0, x_1, \dots, x_m=t)$  irányított út és a  $(t,s)$  él együtt.

Egyszerű (kör, ciklus, hurok), ha ezen kívül a pontsorozatban nincs ismétlődés.

*Minden egyszerű hurok egyben hurok is illetve egy irányított hálózatban, ha létezik hurok akkor létezik egyszerű hurok is*

**Definíció: (Vágás)** Legyen  $[N, A]$  digráf és osszuk az  $N$  ponthalmazt az  $S, T$  diszjunkt (két halmaz metszete zérus) két nem üres halmazra. Jelöljük  $(S, T)$ -vel azon élek összességét, amelyek  $S$ -ből indulnak és  $T$ -be érkezők. Az  $(S, T)$  élhalmazt az  $[N, A]$  digráf  $(S, T)$  vágásának nevezzük. Ha  $s, t \in N$  pontok olyanok, hogy  $s \in S$  és  $t \in T$ , akkor azt mondjuk, hogy  $(S, T)$  vágás az  $s, t$  pontokat elválasztja.  $(S, T)$  vágás :  $[(1, 3); (1, 2)]$



Feltételezések:

- A bemenő paraméterek egész számok.
- A hálózat tartalmaz irányított utat  $s$ -ből a  $G$  gráf minden más pontjába.

**Tervütem háló, (háló):** Egy  $[N, A]$  digráfot tervütemhálónak nevezünk, ha létezik  $s \in N$  kezdőpont és  $t \in N$  végpont úgy, hogy bármely  $i \in N$ -re van út  $s$ -ből  $i$ -be és  $i$ -ből  $t$ -be.

**Negatív hurok, zérus hurok, pozitív hurok:** Legyen adott az  $[N, A]$  háló és az éleihez rendelt  $\tau_{ij}$  egész szám. Ha egy hurok éleihez rendelt számokat összeadva negatív számot, zérust, pozitív számot kapunk, akkor hurkot negatív huroknak, zérus huroknak vagy pozitív huroknak nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy tervütem háló esetén a pozitív hurok nem megengedett, mert akkor a leghosszabb út végtelen nagy lenne.

## 2. Út, vágás egy irányított élhalmazban

*Vágás és út dualitási tétel (Minty):*

Legyen  $[N, A]$  digráf és legyen  $s, t \in N$ . Ekkor az alábbi két állítás közül csak az egyik igaz.

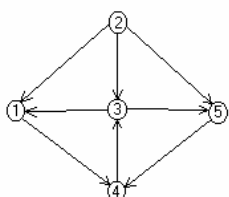
Tétel:

1. vagy van út  $s$ -ből  $t$ -be vagy
2. van olyan  $(S, T)$  vágás, amely üres és  $s \in S, t \in T$

Bizonyítás: (konstruktív)

Konstruáljuk meg az  $S$  halmazt a következő módon legyen  $s \in S$ , és legyen  $j \in S$ , ha van olyan  $i \in S$ , amelyre  $\forall ij \in A$ . Tehát kezdetben az  $S$  halmaz álljon a  $s$  pontból, majd bővítsük az  $S$  halmazt oly módon, hogy minden pontot, amelyre igaz, hogy van él  $S$ -ből  $T$ -be vonjuk be. Az eljárás azzal ér véget, hogy vagy  $t \in S$  ekkor van út, vagy  $t \in T$ , ekkor úttal nem érhető el a  $t$  pont  $s$ -ből, azaz van  $(S, T)$  üres vágás.

1. Feladat: Keressünk utat 1-ből 5-be!



	+s		+4	+1	-3
	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>1</b>				X	
<b>2</b>	X		X		X
<b>3</b>	X				X
<b>4</b>			X		
<b>5</b>				X	

Megoldás: Először elkészítjük az ún. struktúramátrixot. 1-ből indulunk, így az 1-hez tartozó rekeszbe beírjuk a kezdőpont jelét: „-s”. Hogy az ismétlődést elkerüljük, jelölnünk kell azt, ha egy pontot már vizsgáltunk. Ezt a címkézés előjelezésével oldjuk meg. Ha egy pontba eljutunk, akkor „negatív” címkével látjuk el, és ha ebből a pontból tovább mentünk, ahová csak lehetett, akkor a címkét pozitívvá változtatjuk át. A 0. lépésben az „s” pont rekeszébe a –s címkét tesszük. Megnézzük 1-ből hova tudunk eljutni, mehetünk 4-be, a 4-hez tartozó rublikába beírjuk (-1), mivel máshova nem tudunk menni 1-ből, így átírjuk a (-s)-t (+s)-re; megnézzük 4-ből hova tudunk menni, 3-ba, tehát beírjuk a 3-as rublikába (-4), és mivel máshova nem tudunk menni, ezért átírjuk a (-1)-et (+1)-re; nézzük 3-ból hova tudunk menni, mehetünk 1-be, de ott már voltunk, tehát ezzel nem foglalkozunk, de mehetünk 5-be, ahova beírjuk (-3); mivel 5 volt a cél, ezért a feladat kész, már csak az utat kell felírunk; legegyszerűbb módja, ha visszafelé haladunk.

Út:  $5 - 3 - 4 - 1$

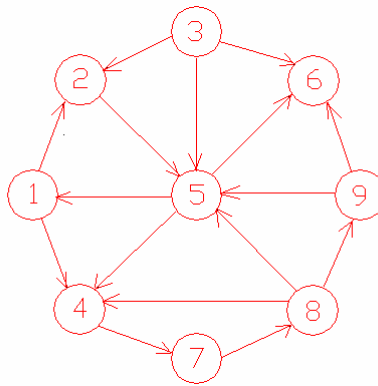
2. Feladat: Az előbbi digráfon keressünk utat 4-ből 2-be.

	+3		+4	+s	-3
	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>1</b>				X	
<b>2</b>	X		X		X
<b>3</b>	X				X
<b>4</b>			X		
<b>5</b>				X	

Elakadtunk, találtunk egy vágást, tehát nincs út 4-ből 2-be.

$S=(1,3,4,5)$      $T=(2)$     Nincs él S-ből T-be.

3. feladat: Keressünk utat s=1-ből t=9-be.



	+s	+1		+1	-2		+4	+7	-8
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		X		X					
2					X				
3		X			X	X			
4							X		
5	X			X		X			
6									
7								X	
8				X	X				X
9					X	X			

Út 1-ből 9-be: **9 – 8 – 7 – 4 – 1**

4. feladat

Ugyanaz, mint fent. Keressünk utat 7-ből 2-be!

	+5	-1		+8	+8	+5	+s	+7	+8
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		X		X					
2					X				
3		X			X	X			
4							X		
5	X			X		X			
6									
7								X	
8				X	X				X
9					X	X			

Út 7-ből 2-be: **2 – 1 – 5 – 8 – 7**

### 3. Maximális út – minimális potenciál

A maximális út minimális potenciál az építésberuházás egy alapeladatának az időtervezési feladatnak a matematikai terminológiája. A feladatot matematikailag együtt lehet kezelni a minimális út maximális potenciál feladattal, amely először úthálózaton felvetett problémára lett kidolgozva. A feladatot az 50-es években vetették fel és az első matematikai cikk 1956-ban Ford.,L.R. munkája. Természetesen a digráfra tett feltevések folyamatosan enyhültek, így a kezdetben még feltétel volt az is, hogy a háló hurokmentes és pozitív élhosszúságú legyen.

**Tervütem háló, (háló):** Egy  $[N,A]$  digráfot tervütemhálónak nevezünk, ha létezik  $s \in N$  kezdőpont és  $t \in N$  végpont úgy, hogy bármely  $i \in N$ -re van út  $s$ -ből  $i$ -be és  $i$ -ből  $t$ -be.

A tervütemezési feladat során keressük egy építési beruházás átfutási idejét (leghosszabb utat  $s$ -ből  $t$ -be vagy a kritikus utat), és az egyes tevékenységek legkorábbi és legkésőbbi lehetséges bekövetkezési idejét (leghosszabb út  $s$ -ből az adott tevékenységig illetve a leghosszabb út  $t$ -ből az adott tevékenységig), továbbá a tevékenységhez tartozó úgynevezett tartalékidőket. Műszaki feladatunkat matematikailag az alábbi primál duál párban fogalmazzuk meg.

*Primál:*

Adott  $(N,A, \tau)$  hálózaton keresendő azon  $P(s,t) = \{s=x_1, \dots, x_m=t\}$  út, amelyre  $\tau(P(s,t)) = \sum_{ij \in P} \tau_{ij}$

maximális.

*Duál:*

Adott  $(N,A, \tau)$  hálózaton keresendő azon  $\mu$  potenciálrendszer, amelyre

$$\mu_s = 0,$$

$$\mu_j - \mu_i \geq \tau_{ij} \quad \forall ij \in A \quad (*)$$

és  $\mu_t$  minimális.

**Lemma:**

1. Jelölje  $\mu_j \forall j \in N$ -re valamely út hosszát  $s$ -ből  $j$ -be.
2.  $\mu_j \forall j \in N$ -re, a leghosszabb út ( $s$ -ből  $j$ -be), akkor és csak akkor, ha
3.  $\mu_j - \mu_i \geq \tau_{ij} \forall ij \in A$ .

**Bizonyítás:**

I. (1) + (3)  $\Rightarrow$  (2)

II. (1) + (2)  $\Rightarrow$  (3)

I. bizonyítás

$\tau(P(s,t))$  tetszőleges út hossza  $s$ -ből  $t$ -be

$$\tau(P(s,t)) = \sum_{ij \in P} \tau_{ij} \leq \mu_{x_2} - \mu_{x_1} + \mu_{x_3} - \mu_{x_2} + \dots + \mu_{x_m} - \mu_{x_{m-1}} = \mu_t \quad (**)$$

Mivel  $\mu_t$  egyrészt valamely út hossza másrészt nagyobb egyenlő mint akármelyik út hossza ezért szükségképpen  $\mu_t$  a leghosszabb út hossza. ( $\mu_j \forall j \in N$  a leghosszabb út hossza  $s$ -ből  $j$ -be)

I. Következménye: Ha a célfüggvények optimálisak, akkor egyenlőség áll fenn (\*\*)-ban.

II. bizonyítás

(1) és  $\mu_j - \mu_i < \tau_{ij} \Rightarrow \mu_j$  nem a leghosszabb.

Tegyük fel, hogy  $\mu_i$  a leghosszabb út hossza s-ből i-be és jelölje  $\tau(P(s,i))$  a leghosszabb utat. Ekkor I. szerint

$$\tau(P(s,i)) = \sum_{ij \in P(s,i)} \tau_{ij} = \mu_i \text{ továbbá } \mu_j \text{ legyen valamely út hossza s-ből j-be és}$$

$\mu_j - \mu_i < \tau_{ij}$  de ekkor

$$\tau(P(s,j)) = \sum_{ij \in P(s,i)} \tau_{ij} + \tau_{ij} > \mu_j, \text{ azaz } \mu_j \text{ nem a leghosszabb út hossza s-ből j-be.}$$

II. Következménye: Ha egyenlőség áll fenn (\*\*)-ban akkor a célfüggvények optimálisak.

### Algoritmus:

Kiindulás:  $\mu_s = 0$   $s \in S$  és  $\mu_j = -\infty$  egyébként

Menjünk végig a digráf minden csomópontján. Ha  $\mu_j < \tau_{ij} + \mu_i \forall ij \in A$ -ra, akkor  $\mu_j := \tau_{ij} - \mu_i$ , ahol  $i \in S$ .

Az algoritmus véges lépésben véget ér mert vagy (\*) teljesül minden élre, vagy valamely potenciálérték tart a végtelenhez, azaz a leghosszabb út végtelen.

### Az eredményekből kapható információk

**Definíció:** A legkorábbi potenciálrendszer (időpolitika)  $\underline{\mu}_j \forall j \in N$  a leghosszabb út s-ből j-be  $\forall j \in N$ .

Minden olyan tevékenység, amely a j-ből indul, legkorábban a  $\underline{\mu}_j$  időpontban kezdődhet.

**Definíció:** A legkésőbbi potenciálrendszer (időpolitika)  $\bar{\mu}_j \forall j \in N$  az átfutási idő  $\bar{\mu}_i$  mínusz a leghosszabb út t-ből j-be  $\forall j \in N$ .

Minden olyan tevékenység, amely a j-be érkezik, legkésőbbben  $\bar{\mu}_j$  időpontban be kell, hogy fejeződjön.

Kritikus esemény: olyan csomópont, amelyhez tartozó legkorábbi és legkésőbbi potenciál megegyezik.

Kritikus út: a leghosszabb út s-ből t-be.

Az ij tevékenység tartalékidő:

Teljes tartalékidő:  $\bar{\mu}_j - \underline{\mu}_i - \tau_{ij}$

Szabad tartalékidő:  $\underline{\mu}_j - \bar{\mu}_i - \tau_{ij}$

Feltételes tartalékidő:  $\underline{\mu}_j - \underline{\mu}_i - \tau_{ij}$



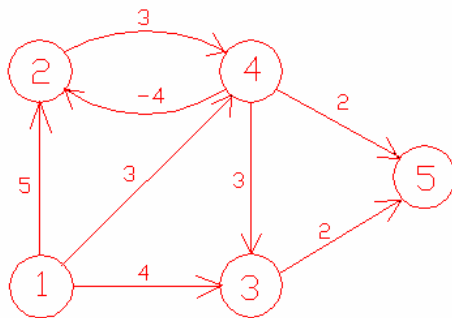
Független tartalékidő  $\bar{\mu}_j - \bar{\mu}_i - \tau_{ij}$

Az ij tevékenység lehetséges legkorábbi befejezése  $\bar{\mu}_i + \tau_{ij}$ .

Az ij tevékenység lehetséges legkésőbbi kezdete  $\bar{\mu}_j - \tau_{ij}$ .

Kritikus tevékenységnek nevezük azt a tevékenységet, amelynek teljes tartalékideje 0. A kritikus út csak kritikus tevékenységekből áll.

**Feladat:** Keresünk maximális utat 1-ből 5-be az alábbi hálón! Határozzuk meg a legkorábbi és a legkésőbbi időponteciókat.



	13	8	2	5	0
legkésőbbi	(5)(6)10	5	2	(2)5	0

legkorábbi			<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
0	0	<b>1</b>		5	4	3	
5	5	<b>2</b>				3	
11	(4)11	<b>3</b>					2
8	(3)8	<b>4</b>		-4	3		2
13	(6)10	<b>5</b>					

$$\bar{\mu}_5 = 13 - 0 = 13$$

$$\bar{\mu}_4 = 13 - 5 = 8$$

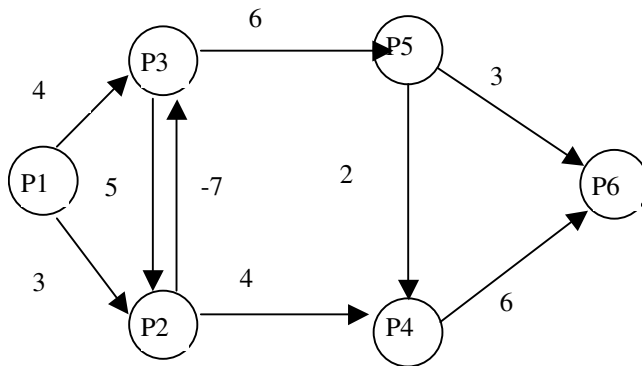
$$\bar{\mu}_3 = 13 - 2 = 11$$

$$\bar{\mu}_2 = 13 - 8 = 5$$

$$\bar{\mu}_1 = 13 - 13 = 0$$

**Feladatok:**

1. Keressen maximális utat 1-ből 6-ba. Határozza meg a legkorábbi és legkésőbbi időpolitikát.



2. Ábrázolja háló segítségével az alábbi tevékenységeket és kapcsolatokat majd keressen utat a kezdőpontból a végpontba és határozza meg a legkorábbi és legkésőbbi időpolitikákat. A tevékenységek nem megszakíthatóak.

a. Családi ház építését 3 tevékenységre bontjuk. Alapozás 4 nap, Szerkezetépítés 6 nap, befejező munkák 5 nap.

b. Egy útépités során a földkiemelés 5 nap, útalapozás 4 nap aszfaltozás 5 nap. A tevékenységek legalább 1 nap távolságra kell, hogy legyenek egymástól. Határozza meg a minimális átfutási időt.

c. Egy útépités során a földkiemelés 5 nap, útalapozás 4 nap aszfaltozás 5 nap. A tevékenységek maximum 4 nap távolságra lehetnek egymástól. Határozza meg a minimális átfutási időt.

d. Egy útépités során a földkiemelés 5 nap, útalapozás 4 nap, aszfaltozás 5 nap. A tevékenységek legalább 1 de legfeljebb 4 nap távolságra lehetnek egymástól. Határozza meg a minimális átfutási időt.

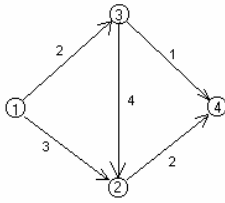
e. Egy útépités során a földkiemelés 5 és 7 nap között, az útalapozás 3-6 nap között, az aszfaltozás 5 és 7 nap között lehet. A tevékenységek legalább 1 de legfeljebb 4 nap távolságra kell, hogy lehetnek egymástól. Határozza meg a minimális átfutási időt.

#### 4. Minimális út – maximális potenciál

A minimális út feladat megoldása címkézési technikával először Ford és Minty dolgozatában szerepelt.

Adott  $[N, A]$  digráf éleihez rendeljünk egy  $\tau_{ij}$  számot.

**Definíció: (út hossza)**  $P (x_0, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_t) = \sum_{ij \in P} \tau_{ij}$



$$N = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$A = \{(1,2); (1,3); (2,4); (3,2); (3,4)\}$$

$$\tau_{1,2} = 3; \tau_{1,3} = 2; \dots$$

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$$

### Feltételezések

A hálózat irányított.

Minden élhossz egész szám.

A hálózatban nincs negatív kör – negatív ciklus–azaz negatív hosszúságú irányított ciklus.

A fenti feltételezésekkel történetileg az alábbi **feladatokat** definiálták a digráfon.

1. Keressük meg a legrövidebb utat egy csomópontból az összes többibe nemnegatív élhosszúságú hálón.
2. Keressük meg a legrövidebb utat egy csomópontból az összes többibe tetszőleges élhosszúságú hálón.
3. Keressük meg a legrövidebb utat minden pontból minden pontba.

A továbbiakban az 1. feladattal foglalkozunk.

Primál feladat: Keresendő olyan út az  $s, t$  pontok között,

$$P = \{s=x_0, x_1, \dots, t=x_n\}, \text{ amelyre}$$

$$\tau(P) = \sum_{ij \in P} \tau_{ij} \text{ érték minimális.}$$

Duál feladat: Tegyük fel, hogy az  $s$  pontban van egy egységnyi áru, melyet  $t$  pontba akarunk elszállítani, az  $[N, A]$  digráf élei mentén, ahol a szállítási költségeket jelölje  $\tau_{ij}$ . Tegyük fel, hogy az árut a „termelőnek” kell elszállítania. Jön egy „szállító”, aki a termelőnek a következő árajánlatot teszi. Minden  $i \in N$  ponthoz ad egy értéket, amennyiért ő abba a pontba szállítja az árut. Jelöljük ezt  $\mu_i$  – vel. A szállító, hogy ajánlata elfogadható legyen, olyan  $\mu_i$  szállítási értékeket adhat meg, melyekre:

$$\left. \begin{array}{l} \mu_s = 0 \\ \mu_j - \mu_i \leq \tau_{ij} \quad \forall ij \in A \end{array} \right\} *$$

A szállítónak az a célja, hogy bevételét maximalizálja, azaz  $\mu_t$  maximális legyen.

Keresendő olyan potenciálrendszer, amelyre a \* teljesül és  $\mu_t$  maximális.

**Alaplemma:** Adott  $[N, A, \tau]$  hálózatban az  $s, t$  pontok között tetszőleges  $P$  útra és \*-ot teljesítő  $\mu$  rendszerre igaz,  $\tau(P) \geq \mu_t$  és egyenlőség akkor és csak akkor ha  $\mu_j - \mu_i = \tau_{ij} \quad \forall ij \in P_{\text{ath}}$

**Bizonyítás:**

$$\begin{aligned}\tau(P) &= \sum_{ij \in P} \tau_{ij} \geq \sum_{ij \in P} (\mu_j - \mu_i) = \mu_{x_2} - \mu_{x_1} + \mu_{x_3} - \mu_{x_2} + \mu_{x_4} - \mu_{x_3} + \dots + \mu_{x_m} - \mu_{x_{m-1}} = \mu_{x_m} - \mu_{x_1} \\ &= \mu_t - \mu_s \quad \text{de } \mu_s = \emptyset \\ \tau(P) &\geq \mu_t\end{aligned}$$

**Következmény:** Ha az  $[N, A, \tau]$  hálózaton  $\tau(P) = \mu_t$ , akkor  $\tau(P)$  és  $\mu_t$  optimálisak.

**Bizonyítás:** indirekt úton: Tegyük fel, hogy  $\tau(P) = \mu_t$ , de  $\tau(P') < \tau(P)$ , ekkor  $\tau(P') < \mu_t$ , ami lehetetlen.

**Dualitási tétel:** (FORD)

Adott  $[N, A, \tau]$  hálózaton létezik olyan út az  $s, t$  pontok között és olyan  $*$ -ot teljesítő potenciálrendszer, amelyre  $\min_{\tau} \tau(P) = \max_{\mu} \mu_{s^s}$

**Bizonyítás:** A bizonyítás konstruktív tehát egyben eljárást is ad a  $P$  út és a  $\mu_i \forall i \in N$  potenciálértékek megkeresésére.

Kiindulás  $\mu_i = \emptyset \quad \forall i \in N$

Keresendő olyan  $\beta$  részháló ( $\beta \subset A$  digráf), ahol  $\mu_j - \mu_i = \tau_{ij} \quad \forall ij \in \beta$

Keressünk utat az  $[N, \beta]$  digráfon, olyan éleken ahol  $\mu_j - \mu_i = \tau_{ij}$

A következő két eset fordulhat elő:

1. van út  $s$ -ből  $t$ -be, ahol  $\mu_j - \mu_i = \tau_{ij}$ , ekkor  $\mu_t$  és  $\tau(P)$  optimálisak
2. van egy  $(S, T)$  vágás, ahol a vágásban lévő minden élre  $\tau_{ij} > \mu_j + \mu_i$

legyen  $\varepsilon_{ij} = \{ \tau_{ij} - \mu_j + \mu_i \}, \quad \forall ij \in S, T$

és  $\varepsilon = \min_{ij \in (S, S')} \varepsilon_{ij}$

Módosítsuk a  $\mu$  (potenciál) rendszert az alábbiak szerint.

$$\mu^* = \begin{cases} \mu_j, & \text{ha } j \in S \\ \mu_j + \varepsilon, & \text{ha } j \in S' \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy az így definiált  $\mu^*$  továbbra is teljesíti a  $\mu_j^* - \mu_i^* \leq \tau_{ij}$  feltételt  $\forall ij \in A$ -ra.

Ha  $i \in S$  és  $j \in S$ , akkor rendben.

Ha  $i \in T$  és  $j \in T$ , akkor  $\mu_j + \varepsilon - \mu_i - \varepsilon \leq \tau_{ij}$ , rendben.

Ha  $i \in S, j \in T$ , akkor  $\mu_j + \varepsilon - \mu_i \leq \tau_{ij}$ , igaz az  $\varepsilon$  konstrukciója miatt.

Ha  $i \in T, j \in S$ , akkor  $\mu_j - \mu_i - \varepsilon \leq \tau_{ij}$ , rendben.

Tehát az új  $\mu^*$  potenciálrendszer továbbra is megengedett megoldás /azaz  $\mu^*$  teljesíti  $*$ -t/.

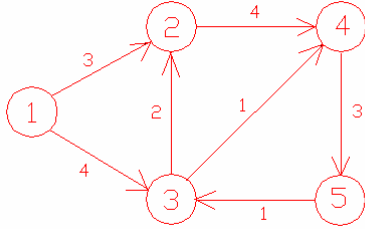
Mivel  $\tau$  véges ( $\tau(P), \mu_t$  is véges (felülről korlátos)), ezért az algoritmus véges lépésben véget ér. Ezzel a bizonyítást befejezzük.

**Következmény:** ha  $\tau(P)$  és  $\mu_t$  optimálisak, akkor  $\tau(P) = \mu_t$

Bizonyítás: indirekt

Algoritmus:

Első lépés: keressünk meg a min. utat 1-ből 5-be!



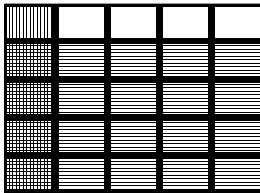
	+S				
--	----	--	--	--	--

	1	2	3	4	5
1		3	4		
2				4	
3		2		1	
4					3
5			1		

'ε' tábla

$$\mu_j - \mu_i = \tau_{ij}$$

Az S halmaz elemeit függőleges vonallal az S elemeit vízszintes vonallal húzzuk át. Így a



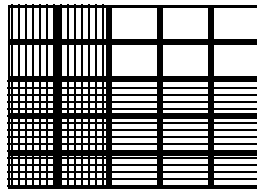
Az üresen hagyott részen a két érték közül (3 és 4)  $\epsilon_{\min} = 3$ . Így ezen a részen levonunk 3-at, ahol csak vízszintes ill. csak függőleges sraffozás van, azt békén hagyjuk; a dupla sraffnál pedig hozzáadunk az eddigi értékekhez  $\epsilon_{\min} = 3$ -at.

fedetlen részen az (S,T) vágásban lévő élek maradnak, a kétszer áthúzott részen a vágásban visszamenő élek találhatóak. E két élen a bizonyításban leírtak alapján módosítani kell az 'ε' táblán. A vágásban lévő élek ε értéke a min ε-nal csökken, míg a visszamenő éleken nő.

Így az új ε tábla:

	+S	+1			
--	----	----	--	--	--

	1	2	3	4	5
1		0	1		
2				4	
3		2		1	
4					3
5			1		

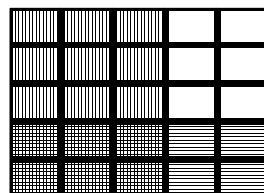


Most is az  $\epsilon_{\min}$ -ot keressük. Az üresen hagyott részen (1 és 4)  $\epsilon_{\min} = 1$ . Így itt levonjuk az 1-et, a duplán sraffozott részen található értékekhez pedig hozzáadunk 1-et.

Keressünk utat 1-ből 5-be olyan éleken, ahol  $\epsilon=0$ ; azaz (\*) egyenlőséggel teljesül az adott ij élre. Új 'ε' tábla:

	+S	+1	+1		
--	----	----	----	--	--

	1	2	3	4	5
1		0	0		
2				3	
3		3		1	
4					3
5			1		

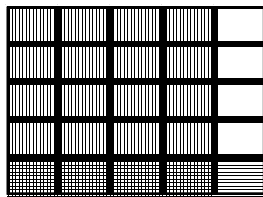


Ugyanazt kell tennünk, mint eddig. Újra  $\epsilon_{\min}$  keresése. Két érték van az üres mezőben (3 és 1). Így  $\epsilon_{\min} = 1$ . Üres mező részben lévő értékekből kivonjuk, a duplán sraffozottban lévőkhöz hozzáadjuk.

Új 'ε' tábla:

	+s	+1	+1	-3	
--	----	----	----	----	--

	1	2	3	4	5
1		0	0		
2				2	
3		3		0	
4					3
5			2		



Üres mező részben  $\epsilon_{\min} = 3$ . A többi lépés ua.

Elértünk célunkat: eljutottunk 1-ből 5-be.

	+s	+1	+1	+3	+4
--	----	----	----	----	----

	1	2	3	4	5
1		0	0		
2				2	
3		3		0	
4					0
5			5		

Minimális út: **5 - 4 - 3 - 1**

Az út hossza:  $\sum \epsilon_{\min} = 3 + 1 + 1 + 3 = 8$

Feladat:

Bizonyítsa be, hogy az alábbi algoritmus a minimális út maximális potenciál feladatpárt oldja meg.

Algoritmus:

Kiindulás:  $\mu_s = 0$   $s \in S$  és  $\mu_j = +\infty$  egyébként

Menjünk végig a digráf minden csomópontján. Ha  $\mu_j > \tau_{ij} + \mu_i \forall ij \in A$ -ra, akkor  $\mu_j := \tau_{ij} + \mu_i$ , ahol  $i \in S$ .

Az algoritmus véges lépésben véget ér mert vagy (\*) teljesül minden élre, vagy valamely potenciálérték tart a negatív végtelenhez, azaz a legrövidebb út végtelen.

**Feladatok a minimális út maximális potenciál feladatra:**

## 1. Személyek időtervezése (Clark Hastings 1977)

Egy építőipari vállalat munkájához havonta az alábbi számú acélszerelő szakmunkás szükséges.

Hónap	Május	Június	Július	Augusztus	Szeptember	Október
Szakm. száma	3	5	7	5	3	4

Tegyük fel, hogy a szakmunkások ütemezése havi bontásban történik, és áprilisban már 2 szakmunka a helyszínen van és Novemberben is 2 marad a munkahelyen.

A munkások alkalmazásához tartozó költségek: 10 ezer forint havonta és személyenként illetve 15 ezer forint a munkás áthelyezése egy másik munkahelyre. Csak 2 munkást tud a cég egyszerre munkába állítani a hónap elején és a munkások legfeljebb egyharmadát tudja a hónap végén áthelyezni. A vállalat havi 20 ezer forintért tud munkást szerezni és 20 ezer forintot kell fizetnie a túlmunkáért havonta személyenként. A túlmunka nem lehet több mint 25%-a normál munkaidőnek.

Keressük meg a munkások foglalkoztatásának minimális költségű megoldását, a legrövidebb út modell felhasználásával.

## 5. Maximális folyam – minimális vágás

Adott  $[N, A]$  digráf (irányított élhalmaz), az élein értelmezett és adott  $k_{ij} \geq 0 \quad \forall ij \in A$  egész szám.

Feltételek:

- Ha van  $ij \in A$  és  $ji \notin A$  akkor legyen  $ji \in A$ ,  $k_{ji} \equiv \emptyset$ .
- Nincs olyan út  $s$ -ből  $t$ -be, amelyik csak végtelen kapacitású éleken vezetne keresztül.

Legyen  $f_{ij}$  folyam az  $[N, A, k]$  – n értelmezett függvény, amelyre  $0 \leq f_{ij} \leq k_{ij}$ ,  $\forall ij \in A$ .

Keresendő olyan  $v$  folyam érték, hogy

' $v$ ' maximális, feltéve, hogy

$$\sum_{ij \in A} f_{ij} - \sum_{ji \in A} f_{ji} = \begin{cases} v, & \text{ha } i = s \\ 0, & \text{ha } i \in N \setminus \{s, t\} \\ -v, & \text{ha } i = t \end{cases}$$

$$0 \leq f_{ij} \leq k_{ij}, \quad \forall ij \in A$$

**Definíció:** Az  $[N, A, k]$  hálózatban legyen  $(S, T)$  egy vágás. A  $k(S, T) = \sum_{ij \in S, T} k_{ij}$  értéket a vágás kapacitásának nevezzük. Az összes  $s, t$  pontokat elválasztó vágások közül a legkisebb kapacitásút az  $s, t$  pontokra vonatkozó minimális vágásnak nevezzük.

**Definíció:** Szabad kapacitás hálózat (residual capacity)

Az éleken értelmezett olyan többlet folyam, amely azt fejezi ki, hogy – feltéve, hogy  $\forall ij \in A$  - a digráf  $i$ -edik csomópontjából  $j$ -be mennyi folyamat tudunk még átküldeni az  $(i, j)$   $(j, i)$  élek felhasználásával.

$$r_{ij} = k_{ij} - f_{ij} + f_{ji}$$

$$r_{ij} = 0 \text{ akkor és csak akkor ha } k_{ij} = f_{ij} \text{ és } f_{ji} = 0.$$

A szabad kapacitás hálózatot a maximális folyam feladat megoldására szolgáló algoritmusban használjuk.

**Alaplemma:** Adott  $[N, A, k]$  hálózatban tetszőleges folyam ( $v$ ) és tetszőleges vágás  $(S, T)$  között fennáll a következő kapcsolat:

$$v \leq \sum_{ij \in (S, T)} k_{ij}$$

$$\text{Bizonyítás: } v = \sum_{i \in S} \left( \sum_{ij \in A} f_{ij} - \sum_{ji \in A} f_{ji} \right)$$



$$v = \sum_{ij \in ST} f_{ij} - \sum_{ji \in TS} f_{ji} \quad (*)$$

mivel a jobboldal két tagjára

$$\sum_{ij \in (S,T)} f_{ij} \leq \sum_{ij \in (S,T)} k_{ij} \quad \text{és} \quad \sum_{ij \in TS} f_{ji} \geq 0$$

ezért a bizonyítani kívánt egyenlőtlenség  $v \leq \sum_{ij \in (S,T)} k_{ij}$  fennáll.

**Lemma:** Az  $[N, A, k]$  hálózaton értelmezett tetszőleges  $v$  értékű  $f$  folyamra fennáll, hogy minden  $\Delta v$  többletfolyam  $s$ -ből  $t$ -be kisebb-egyenlő akármelyik  $(s,t)$  vágás szabad kapacitásánál a szabad kapacitás hálózatban.

### Bizonyítás:

Az alaplemma szerint

$$v + \Delta v \leq \sum_{\forall ij \in (S,T)} k_{ij} \quad (**)$$

$(**)-(*)$

$$\Delta v \leq \sum_{ij \in (S,T)} k_{ij} - \sum_{ij \in (S,T)} f_{ij} + \sum_{ij \in (T,S)} f_{ij} \quad \text{és} \quad \sum_{ij \in (T,S)} f_{ij} = \sum_{ij \in (S,T)} f_{ji}$$

felhasználva, hogy  $r_{ij} = k_{ij} - f_{ij} + f_{ji}$ , következik, hogy

$$\Delta v \leq \sum_{ij \in (S,T)} r_{ij}$$

Ezzel a bizonyítás végére értünk.

**Tétel:** a., egy  $[N, A, k]$  hálózaton létezik olyan  $f$  folyam, amelyre  $v$  maximális és amelyre  $v$  egyenlő a hálózatban lévő minimális kapacitású vágással.

b., egy  $f$  folyam akkor és csak akkor maximális  $v$  értékű, ha a szabad kapacitású hálózatban nincs növelő út  $s$ -ből  $t$ -be.

c., a feladatnak mindig létezik egészértékű ( $f$ ) optimális megoldása.

### Bizonyítás:

Adott  $[N, A, k]$  hálózat. Legyen  $f = \emptyset$ .

Keressünk növelő utat a szabadkapacitás hálózatban. Legyen az úton a legkisebb kapacitás  $r_{\min}$ . Ezen az úton legyen  $f = f + r_{\min}$ . Konstruáljunk egy új szabad kapacitás hálózatot.

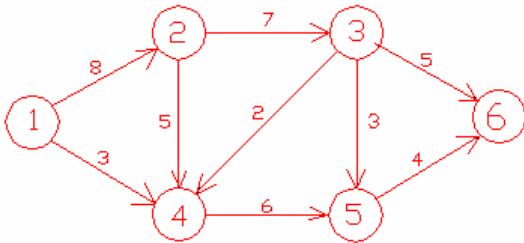
Ha nincs növelő út, akkor van olyan  $(ST)$  vágás, amelyre  $ij \in ST$ ,  $r_{ij} = 0$ ,  $(k_{ij} = f_{ij})$   $f_{ji} = 0$ .

Mivel  $\Delta v = \sum_{ij \in (S,T)} r_{ij} = 0$ , ezért  $v$  maximális folyam. Illetve, ha  $v$  maximális folyam, akkor nincs út

a  $s$ -ből  $t$ -be a szabad kapacitás hálózatban, azaz létezik üres vágás a szabad kapacitás hálózatban. Ebben a vágásban az eredeti hálózat minden kapacitása telített.

**Feladat:**

Maximális folyam 1-ből 6-ba!



	+s	+1	-2	-1	-3	-3
--	----	----	----	----	----	----

	1	2	3	4	5	6
1		<u>8</u>		3		
2			<u>7</u>	5		
3				2	3	<u>5</u>
4					6	
5						4
6						

Út: **6 - 3 - 2 - 1**

$k_{\min} = 5$        $\varphi = 5$

	+s	+1	+2	+1	+3	-5
--	----	----	----	----	----	----

	1	2	3	4	5	6
1		<u>3</u>		3		
2	5		<u>2</u>	5		
3		5		2	<u>3</u>	0
4					6	
5						<u>4</u>
6			5			

Út: **6 - 5 - 3 - 2 - 1**

$\Delta v = 2$

$v = 7$

	+s	+1		+1	+4	-5
--	----	----	--	----	----	----

	1	2	3	4	5	6
1		1		<u>3</u>		
2	7		0	5		
3		7		2	1	0
4					<u>6</u>	
5			2			<u>2</u>
6			5		2	

Út: **6 - 5 - 4 - 1**

$\Delta v = 2$

$v = 9$

	+s	+1	-5	+1	-4	
--	----	----	----	----	----	--

	1	2	3	4	5	6
1		1		1		
2	7		0	5		
3		7		2	1	0
4	2				4	
5			2	2		0
6			5		4	

Nincs út 1-ből 6-ba. Az algoritmus leáll. Tehát marad az előző lépésben meghatározott érték.  
Maximális folyam 1-ből 6-ba:

$$\underline{\underline{v = 9}}$$

## 6. A maximális folyam, minimális vágás feladat kiterjesztése (több forrással és több nyelővel rendelkező hálózatok)

Maximális folyam feladat

Az  $N, A, k$  hálózatot egészítsük ki egy minden csomópontához adott  $b_i$  értékkel, feltéve, hogy  $\sum_{i \in N} b_i = 0$ .

Feladat: keresendő olyan  $v$  folyam érték, hogy

' $v$ ' maximális, feltéve, hogy

$$\sum_{ij \in A} f_{ij} - \sum_{ji \in A} f_{ji} = \begin{cases} v, & \text{ha } i = s \\ b_i, & \text{ha } i \in N \setminus \{s, t\} \\ -v, & \text{ha } i = t \end{cases}$$

$$0 \leq f_{ij} \leq k_{ij}, \quad \forall ij \in A$$

A feladat megoldását két lépcsőben kapjuk meg. Először megengedett megoldást keresünk. Ehhez a hálózatot cirkulációvá alakítjuk egy új  $(t, s)$  él bevezetésével, amelynek alsó kapacitása 0, felső kapacitása végtelen. Keressünk megengedett megoldást a maximális folyam algoritmus segítségével. Ha létezik megoldása az első lépcsőnek, akkor újra alkalmazva egy maximális folyam algoritmust kapjuk a feladat optimális megoldását.

Megengedett folyam keresése:

Feladat: keresendő olyan  $f$  folyamrendszer, hogy

$$\sum_{ij \in A} f_{ij} - \sum_{ji \in A} f_{ji} = b_i, \quad \text{ha } i \in N$$

$$0 \leq f_{ij} \leq k_{ij}, \quad \forall ij \in A$$

Megoldás:

Minden  $b_i > 0$  -ra egészítsük ki az eredeti  $G$  hálózatunkat egy  $(s, i)$  éllel, ahol  $s$  új csomópont  $k_{s,i} := b_i$ .

Minden  $b_i < 0$  -ra egészítsük ki az eredeti  $G$  hálózatunkat egy  $(i, t)$  éllel  $k_{i,t} = -b_i$

Az így kibővített hálózaton keressünk maximális folyamot  $s$ -ből  $t$ -be. Ha a kapott megoldás telíti az új éleket, akkor létezik megengedett megoldása az eredeti feladatnak. Ha nem telíti, akkor az eredeti feladatunknak sincs megoldása.

*Ha a maximális folyam telíti az új éleket akkor és csak akkor lehet az eredeti feladatot megoldani.*

## 7. Maximális folyam keresése alsó – felső kapacitás korláttal rendelkező hálózatokon

Az  $N, A, k$  hálózatot egészítsük ki egy minden élre az élen szükséges alsó kapacitás  $l_i$  értékével, valamint egy a csomópontokhoz adott  $b_i$  értékkel, feltéve, hogy  $\sum_{i \in N} b_i = 0$ .

**Definíció:** Az  $[N, A, k]$  hálózatban legyen  $(S, T)$  egy vágás. A  $k(S, T) = \sum_{ij \in S, T} k_{ij} - \sum_{ij \in T, S} l_{ij}$  értéket a vágás kapacitásának nevezzük. Az összes  $s, t$  pontokat elválasztó vágások közül a legkisebb kapacitásút az  $s, t$  pontokra vonatkozó minimális vágásnak nevezzük.

**Definíció:** Szabad kapacitás hálózat (residual capacity)

Az éleken értelmezett olyan többlet folyam, amely azt fejezi ki, hogy – feltéve, hogy  $\forall ij \in A$  - a digráf  $i$ -edik csomópontjából  $j$ -be mennyi folyamat tudunk még átküldeni az  $(i, j)$   $(j, i)$  élek felhasználásával.

$$r_{ij} = k_{ij} - f_{ij} + f_{ji} - l_{ji}$$

$$r_{ij} = 0 \text{ akkor és csak akkor ha } k_{ij} = f_{ij} \text{ és } f_{ji} = l_{ji}.$$

A szabad kapacitás hálózatot a maximális folyam feladat megoldására szolgáló algoritmusban használjuk.

Feladat: keresendő olyan  $v$  folyam érték, hogy

' $v$ ' maximális, feltéve, hogy

$$\sum_{ij \in A} f_{ij} - \sum_{ji \in A} f_{ji} = \begin{cases} v, & \text{ha } i = s \\ b_i, & \text{ha } i \in N \setminus \{s, t\} \\ -v, & \text{ha } i = t \end{cases}$$

$$l_{ij} \leq f_{ij} \leq k_{ij}, \quad \forall ij \in A$$

A feladat megoldása két lépcsőben történik. Először megengedett megoldást keresünk. Ehhez a hálózatot cirkulációvá alakítjuk egy új  $(t, s)$  él bevezetésével, amelynek alsó kapacitása 0, felső kapacitása végtelen. Ezután vezessük be a  $f'_{ij} = f_{ij} - l_{ij} \geq 0$  folyamat. A feltételi halmaz ekkor a következőképpen alakul.

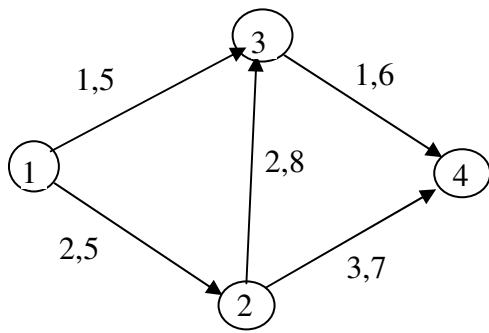
$$\sum_{ij \in A} (f'_{ij} + l_{ij}) - \sum_{ji \in A} (f'_{ij} + l_{ji}) = b_i, \text{ ha } i \in N$$

Átrendezés után kapjuk, hogy

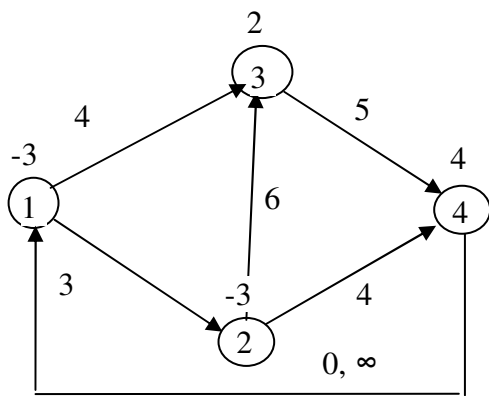
$$\sum_{ij \in A} f'_{ij} - \sum_{ji \in A} f'_{ij} = b_i - \sum_{ij \in A} l_{ij} + \sum_{ji \in A} l_{ji} = b'_i, \text{ ha } i \in N$$

$$0 \leq f'_{ij} \leq k_{ij} - l_{ij} = k'_{ij}, \quad \forall ij \in A.$$

Példa: Eredeti háló az alsó felső kapacitásokkal.

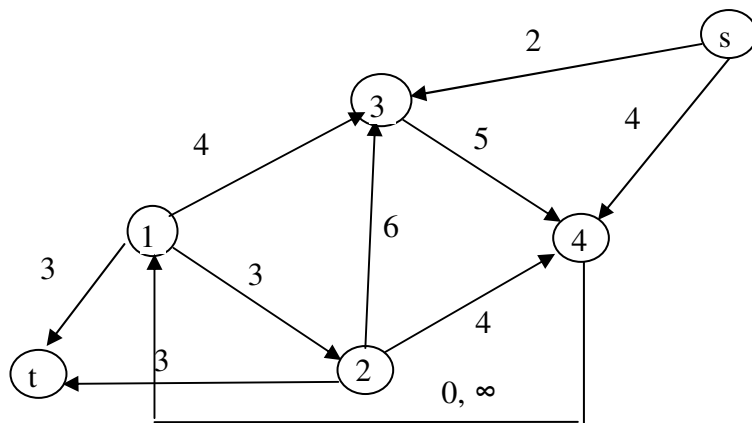


A hálót cirkulációvá alakítjuk át és kiszámoljuk az új kapacitás értékeket is.

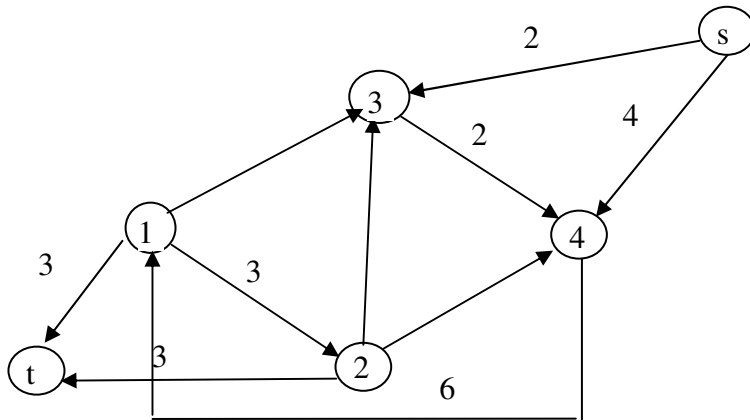


I. fázis.

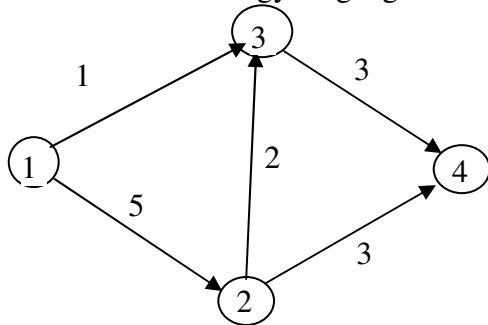
Keresendő maximális folyam s-ből t-be az alábbi hálón.



A transformált hálózaton kapott maximális folyam, az első fázis megoldása látható a következő ábrán:



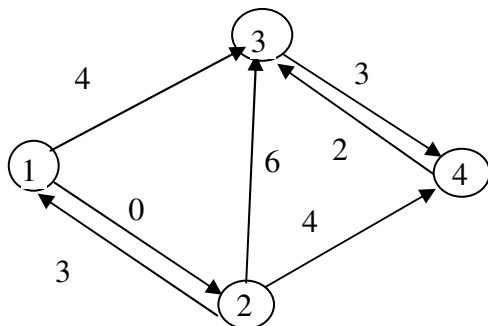
Az eredeti feladat egy megengedett megoldása:



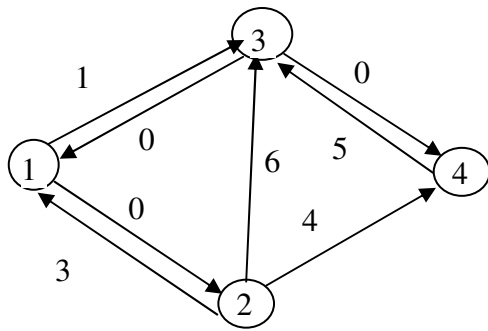
2. fázis a megengedett megoldásból kiindulva keressünk egy optimális megoldást.

Keresendő maximális folyam az alábbi hálón:

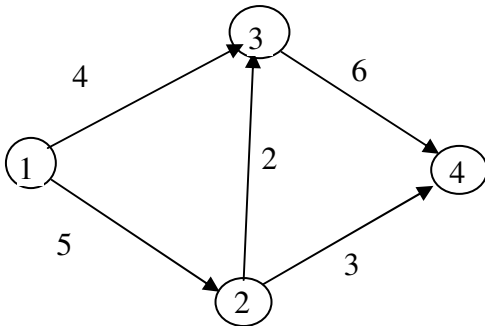
(a háló szabad kapacitásait a  $k$  + az első fázis megengedett folyam értékeiből számolhatjuk ki)



A 2. fázis egy optimális megoldása a szabad kapacitás hálózaton ábrázolva a következő ábrán látható (már nincs növelő út 1-ből 4-be).



Az eredeti feladat optimális megoldása:



A minimális vágás  $S(1,3)$  és a  $T(2,4)$  halmazokat választja el.

A maximális folyam értéke 3, amely az 1-3-4 úton vihető át.

Az eredeti feladatban a maximális folyam és a minimális vágás értéke is 9.

### Feladatok:

1. Van 3 építési munkahely. Minden munkahelyen napi 3 műszakban folyhat a munka. Ismert, hogy naponta átlagban minimálisan mennyi ember szükséges az egyes munkahelyeken. Az 1.mh: 15 fő; 2.mh. 21fő; 3.mh. 21 fő. Tudjuk továbbá, hogy műszakonként maximum mennyi ember áll rendelkezésünkre. Végül adott az alábbi táblázat, amely megmutatja, hogy munkahelyenként és az egyes műszakokban dolgozó emberek száma milyen minimális és maximális értékek között változhat.

	1. műszak	2. műszak	3. műszak
1. munkahely	7,9	7,21	6,21
2. munkahely	4,8	5,19	5,25
3. munkahely	5,12	6,14	3,24

Határozzuk meg maximális folyam algoritmussal, hogy mi az a minimális létszám, amely megfelel a fenti követelményeknek.



## 8. König feladat

König Dénes (1884-1944)

Feladat: Adott  $I_1, I_2, \dots, I_m$  személy (munkás) és  $J_1, J_2, \dots, J_n$  munka ( $m \leq n$ ). Mindegyik személy valamilyen munkákra van kvalifikálva. Ezt célszerűen a  $Q=(\alpha_{ij})$  úgynevezett kvalifikációs mátrixba szoktuk összefoglalni, ahol  $\alpha_{ij}=1$ , ha  $I_i$  személy ért a  $J_j$  munkához, másként  $\alpha_{ij}=0$ . A feladat annak eldöntése, hogy kaphat-e minden ember munkát, feltéve, hogy minden személy olyan munkát végezzen, amihez ért és egy munkára csak egy személyt rendeljünk továbbá egy munkás csak egy munkát láthat el.

Munkás :  $P = \{I_1, I_2\}$   $\|P\| = 2$

Munka :  $J(P) = \{J_1, J_2, J_3\}$   $\|J, P\| = 3$

Tétel:

Adott kvalifikációs mátrix esetén az alábbi két állítás közül az egyik igaz:

1., minden munkást el tudunk látni munkával

2., létezik a munkásoknak egy olyan részhalmaza ( $P$ ), hogy a  $P$  számossága nagyobb, mint az általuk elvégezhető munkák számossága.

$$\|P\| > \|J(P)\|$$

Bizonyítás: a feladat egy maximális folyamfeladattá fogalmazható át.

Készítsük el a folyamhálózatot  $n + m + 2$  csúccsal az alábbiak szerint

Legyen  $k(s, I_i) = 1$ , minden  $i$ -re,

$K(J_j, t) = 1$ , minden  $j$ -re,

$K(I_i, J_j) = \infty$ , ha  $I_i$  személy alkalmas a  $J_j$  munkára, minden más kapacitás legyen nulla.

Keressünk max. folyamot:

1., ha a max folyam értéke  $m$ , akkor minden munkásnak van munkája

2., ha a max folyam  $m$ -nél kisebb; legyen az  $(S, T)$  minimális vágás. Mivel a folyamérték kisebb, mint  $m$ , úgy  $k(S, T) < m$ . Minimális vágáskor telítettek az élek, tehát  $\infty$  kapacitású él nem lehet a vágásban. Továbbá nem lehet a vágásban visszafelé olyan él sem, amelyen folyam folyik, mert akkor a szabad kapacitás hálózatban ugyanezen csomópontok közötti vágásban lévő él szabad kapacitása nem 0 lenne. A vágás kapacitása  $m - p + r < m$  így  $p > r$ . Ez az igazolni kívánt egyenlőtlenség,  $\|P\| > \|J(P)\|$

Példa:

Legyen adott az alábbi kvalifikációs mátrix és határozzunk meg egy hozzárendelést.

Kiindulás: Készítsünk el egy kezdeti hozzárendelést. Jelöljük ezt körökkel.

Feladat:

## 9. Futószalag modell:

A futószalag modell a König feladat egy általánosítása.

Feladat: Adott  $I_1, I_2, \dots, I_m$  személy (munkás) és  $J_1, J_2, \dots, J_n$  munka ( $m \leq n$ ). Mindegyik személy valamilyen munkákra van kvalifikálva. Ezt célszerűen a  $Q=(\alpha_{ij})$  úgynevezett kvalifikációs mátrixba szoktuk összefoglalni, ahol  $\alpha_{ij}=1$ , ha  $I_i$  személy ért a  $J_j$  munkához, másként  $\alpha_{ij}=0$ .

Adottak továbbá a  $\tau_{ij} \geq 0$  ( $i=1, \dots, m$ ) ( $j=1, \dots, n$ ) nem negatív egész számok, amelyek azt az időt jelentik, amennyi idő alatt az  $I_i$  munkás a  $J_j$  munkahelyi feladatot ellátja. Valamely hozzárendelés esetén a futószalag sebességét az határozza meg, hogy mennyi a leghosszabb ideig dolgozó munkás munkaideje.

A feladat annak eldöntése, hogy kaphat-e minden ember munkát, feltéve, hogy minden személy olyan munkát végezzen, amihez ért és egy munkára csak egy személyt rendeljünk továbbá egy munkás csak egy munkát láthat el.

Célunk olyan hozzárendelés megvalósítása, amelynél a leghosszabb ideig dolgozó munkás munkaideje minimális.

Példa:

### 10. Általános König feladat (földszállítási feladat):

Legyenek adottak az  $I \dots I_m$  földnyerő helyek melyek kapacitása .... és a  $J \dots J_n$  építési földlerakó helyek, amelyek kapacitása ..... A költségeket figyelembe véve adott egy elfogadhatósági mátrix, amelynek  $(i,j)$  cellájában  $x$  áll, ha a szállítás az  $i$ -edik helyről a  $j$ -edik helyre elfogadható. Ha  $P \supset I$  a földnyerő helyek tetszőleges részhalmaza, akkor ezen földnyerő helyekről elfogadható költséggel elérhető földlerakó helyek halmaza  $R = J(P) \subset J$ .

Feltesszük, hogy  $\sum_{i=1}^m \alpha_i \leq \sum_{j=1}^n \beta_j$

Feladat: Döntsük el, hogy a föld elszállítható-e az adott helyekről az elfogadható földlerakó helyekre és adjunk egy lehetséges szállítási politikát.

Az általános König feladat megoldhatóságára vonatkozik az alábbi tétel:

Tétel: Adott kvalifikációs mátrix esetén az alábbi két állítás közül az egyik és csak az egyik igaz.

1., minden földet el tudunk szállítani az *elfogadható* földnyerő helyekre. Max folyam  $S \rightarrow T = \Sigma \alpha$ , ha kisebb

2., létezik a földnyerő helyeknek egy olyan  $P \supset I$  részhalmaza, hogy az elhelyezni kívánt föld mennyisége nagyobb mint az elfogadható földlerakó helyek kapacitása.

$$\|P\|_{\alpha} > \|J(P)\|_{\beta}$$

$$\sum_{i \in P} \alpha_i > \sum_{i \in J(P)} \beta_i$$

#### Bizonyítás:

Konstruáljunk egy  $m+n+2$  csomópontú hálózatot a következőképpen.

Keressünk maximális folyamot  $s$ -ből  $t$ -be.

1., Ha a maximális folyam  $\sum_{i \in P} \alpha_i$ , akkor a tétel első állítása igaz.

2., Ha a maximális folyam kisebb mint  $\sum_{i \in P} \alpha_i$ , akkor a min vágás értéke

$$\sum_{i \in \bar{P}} \alpha_i + \sum_{i \in R} \beta_i < \sum_{i \in P} \alpha_i (= \sum_{i \in \bar{P}} \alpha_i + \sum_{i \in P} \alpha_i)$$

$$\sum_{i \in R} \beta_i < \sum_{i \in P} \alpha_i$$

Feladatok:

1. Az Ön feladata vállalkozók kiválasztása adott munkára. A vállalkozók minden feltételnek megfelelnek amelyet az ajánlatkérő előírt számukra. ... vállalkozót kell ... munkához rendelni.

Állítson fel modellt a következő feltételekkel:

a., Egy vállalkozó csak egy munkát kaphat meg.

b., Egy vállalkozó több munkát is megkaphat.

c., Egy vállalkozó több munkát is elnyerhet de egy munkát maximum 2 vállalkozó végezhet.

### **11. Általános szűk keresztmetszet feladat:**

Legyenek adottak az  $I_1 \dots I_i \dots I_m$  földnyerő helyek melyek kapacitása .... és a  $J_1 \dots J_j \dots J_n$  építési földlerakó helyek, amelyek kapacitása ..... A költségeket figyelembe véve adott egy elfogadhatósági mátrix, amelynek  $(i,j)$  cellájában  $x$  áll, ha a szállítás az  $i$ -edik helyről a  $j$ -edik helyre elfogadható. Ha  $P \supset I$  a földnyerő helyek tetszőleges részhalmaza, akkor ezen földnyerő helyekről elfogadható költséggel elérhető földlerakó helyek halmaza  $R = J(P) \subset J$ .

Feltesszük, hogy  $\sum_{i=1}^m \alpha_i \leq \sum_{j=1}^n \beta_j$

Adottak még a  $\tau_{ij} \geq 0$  ( $i=1, \dots, m$ ) ( $j=1, \dots, n$ ) értékek, amelyek a  $I$  helyről a  $J$  helyre történő szállítás idejét jelölik.

Feladat: Döntsük el, hogy a föld elszállítható-e az adott helyekről az elfogadható földlerakó helyekre és adjunk egy olyan lehetséges szállítási politikát, amelyre a maximális  $\tau$  minimális.

#### Feladatok

1. Egy vállalkozónak egyszerre öt építési munkahely betonszükségletét kell kielégíteni 5 betongyártó felhasználásával. Ismert a gyártók kapacitása és a betonigény az egyes munkahelyeken. Honnan érdemes rendelni a betont, hogy a lehető leghamarabb a munkahelyre kerüljön a beton?
2. Adott 4 darab földnyerőhely és 5 darab földlerakóhely, továbbá a kinyerhető és a lerakható földmennyisége. (Az adott géplánc függvényében.). Adott továbbá az az időszükséglet ami két hely közötti összállítási időt mutatja. Állapítsuk meg, hogy honnan hova érdemes a földet szállítani, ha a lehető legkevesebb idő alatt és költséggel szeretnénk ezt megvalósítani.
3. Egy szállító vállalkozás azt a feladatot kapja, hogy 4 munkahelyekről 5 földlerakóhelyre szállítson anyagokat. A költségminimalizálás érdekében úgy szeretné megoldani a feladatot, hogy mindig a lehető legközelebb lévő lerakóhelyre szállítana. Adott a munkahelyeken időegység alatt kitermelendő föld és a lerakóhelyeken időegység alatt bedolgozható földmennyiség. Továbbá a szállítási távolságok. Honnan hova szállítsunk?

## 12. Minimális költségű folyam feladat

### Primál feladat:

Adott  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$ . Keresendő az  $[N, A, k, ]$  hálózaton értelmezett  $f_{ij}, \forall ij \in A$  folyam, amelyre

$$\sum_{ij \in A} f_{ji} - \sum_{ij \in A} f_{ij} = d_i \quad \forall i \in N, i \neq 1, i \neq t$$

$$0 \leq f_{ij} \leq k_{ij} \quad \forall ij \in A$$

$$\sum_{j \in A} a_{ij} f_{ij} \text{ minimális.}$$

### Duál feladat.

Adott az  $[N, A]$  terütem háló és az  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \quad \forall ij \in A$ -ra nemnegatív egész értékek.

Keresendő azon  $\mu_i, \forall i \in N$ -re és  $\tau_{ij}, \forall ij \in A$ -ra, ahol

$$\begin{aligned} \mu_j - \mu_i - z_{ij} &\leq a_{ij} \quad \forall ij \in A \\ z_{ij} &\geq 0 \quad \forall ij \in A \end{aligned} \quad (*)$$

$$\max \sum_{i \in N} d_i \mu_i - \sum_{ij \in A} k_{ij} z_{ij} \text{ maximális}$$

**Lemma:** Minden (\*)-ot – a primál feladat feltételeit- teljesítő  $\mu$  és  $\tau$  valamint az  $N, k$  hálózaton értelmezett tetszőleges  $f$  folyamra, melynek értéke  $v$  teljesül az alábbi egyenlőtlenség.

$$\sum_{i \in N} d_i \mu_i - \sum_{ij \in A} k_{ij} z_{ij} \leq \sum_{ij \in A} a_{ij} f_{ij}$$

Bizonyítás:

$$\sum_{i \in N} d_i \mu_i - \sum_{ij \in A} k_{ij} z_{ij} \leq \sum_{i \in N} d_i \mu_i - \sum_{ij \in A} f_{ij} (\mu_j - \mu_i - a_{ij}) =$$

$$= \sum_{i \in N} d_i \mu_i - \sum_{ij \in A} f_{ij} (\mu_j - \mu_i) + \sum_{ij \in A} f_{ij} a_{ij} = \sum_{ij \in A} f_{ij} a_{ij}$$

$$\sum_{ij \in A} f_{ij} (\mu_j - \mu_i) = \sum_{j \in N} \mu_j \sum_{ij \in A} (f_{ij} - f_{ji}) = \sum_{i \in N} d_i \mu_i$$

Ezzel bizonyítást befejeztük.

**Következmény:** Ha egyenlőség áll fenn, akkor a célfüggvények optimálisak.

**Optimalitási kritérium:**

Az egyenlőség fennállásának elégséges feltétele, hogy létezzen olyan folyam, amelyre:

$$1^0 \text{ Ha } k_{ij} > f_{ij} > 0 \text{ akkor } \mu_j - \mu_i - a_{ij} = 0$$

$$2^0 \text{ Ha } z_{ij} > 0 \text{ akkor } f_{ij} = k_{ij}$$

$$3^0 \text{ Ha } z_{ij} > 0 \text{ akkor } f_{ij} \leq c_{ij}$$

Alkalmazási példák:

*Vállalkozó feladata (Prager 1957)*

Egy vállalkozónak a következő feladatot kell megoldania. Minden T időszakban vásárolhat, eladhat, vagy megtarthat árukat a következők szerint. Minden i-edik időpontban legfeljebb  $a_i$  egységet vehet az áruból  $b_i$  egységet tarthat a következő periódusra és el kell adnia  $c_i$  darabot. Feltéve, hogy  $p_i$ ,  $w_i$ , és  $s_i$  jelöli az egységnyi költségeket az i-edik időpontban milyen vételi-eladási politikát kell követnie a vállalkozónak, hogy maximalizálja a bevételét a T periódus alatt? Legyen  $T=4$ .

*Szállítási feladat*

Van 4 téglagyár és 5 építőanyag kereskedő. Ismert a szállítási kapacitások és költségek. Keressük a minimális költségű szállítási politikát.

*Téglagyárak szállítási feladata (gyártás elosztási modell)*

Van 3 téglagyár. Mindegyik ugyanazt a terméket gyártja. Van 4 építőanyag kereskedő. Ismert a kereskedők jövő évi téglaiigénye, a téglagyártás költsége és maximális kapacitása termékenként továbbá a szállítási költségek és kapacitások minden viszonylatban. A téglagyár költsége a téglá eljuttatása a kereskedőkhöz. Konstruálja meg azt a modellt, amelyik választ ad a következő kérdésre:

Mi a minimális költségű szállítás, amely kielégíti az igényeket?

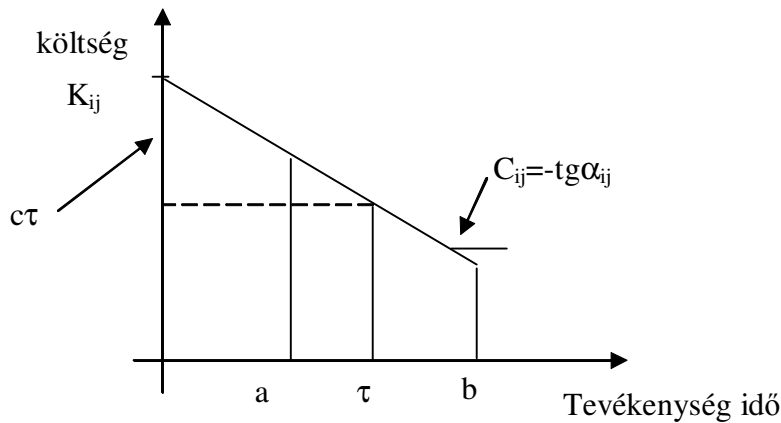
Megoldás: Rajzoljon fel egy hálózatot, amelyben a csomópontok a gyárakat, a adott gyár adott modelljeit, adott kereskedő adott modelljeit és a kereskedőket jelöli. A gyáraktól az adott gyár adott modelljéig vezető élek a gyártási kapacitást és költségeket jelölik, a az adott gyár adott modellje csomópontból az adott kereskedő adott modelljéig vezető élek a szállítási kapacitást és költségeket, míg az adott kereskedő adott modelljétől a kereskedőt jelölő csomópontig vezető él a kereskedő igényeit jelöli.

Ugyanaz a feladat mint előbb de minden téglagyár ugyanazt a 2-2 terméket gyártja.

### 13. A Költségtervezési „time-cost trade-off” feladat hurokmentes hálón

Tegyük fel, hogy tervütem hálónk hurokmentes.

A költségtervezési feladatban a háló pontjai eseményeket, az élek valódi- és látszattevékenységeket vagy kapcsolatokat jelölnek. Valódi tevékenység esetén – ekkor „a” és „b” nemnegatívak - a tevékenység elvégzésének normál idejét „b” illetve roham idejét „a” jelöli, „ $\tau$ ” pedig a tevékenységidőt. Jelölje egy tevékenységre a „b” időtartamhoz rendelt költséget  $K_b$ , az „a” időhöz tartozzon  $K_a$ . A költségfüggvényről tegyük fel, hogy lineáris, meredeksége „-c” –  $c_{ij}$ , ahol  $c_{ij} \geq 0$  azaz  $\frac{K_b - K_a}{b - a} = \text{tg} \alpha = -c$ . Ekkor egy adott tevékenységidőhöz „ $\tau$ ”-hoz tartozó költség  $K_b + (b - \tau)c$ . A költség a normál időnél a legkisebb a rohamidőnél a legnagyobb és közben lineárisan változik. Ha „a” és „b” negatívak, tehát nem valódi tevékenységet jelölnek, akkor  $c=0$ .



**Primál feladat** (a kivitelező feladata).

Adott az  $[N,A]$  tervütem háló és az  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \forall ij \in A$ -ra nemnegatív egész értékek.

Keresendő azon  $\mu_i, \forall i \in N$ -re és  $\tau_{ij}, \forall ij \in A$ -ra, ahol

$$\tau_{ij} \leq \mu_j - \mu_i \quad \forall ij \in A \quad (*)$$

$$\tau_{ij} \leq b_{ij} \quad \forall ij \in A$$

$$\tau_{ij} \geq a_{ij} \quad \forall ij \in A$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_i = p$$

és az összköltség minimális, azaz  $\sum_{ij \in A} (K_{ij} - c_{ij} \tau_{ij})$  vagy max

$$\sum_{ij \in A} c_{ij} \tau_{ij} .$$

A fenti feladathoz rendelhető a következő úgynevezett duál feladat.

Tekintsük az  $[N,A,k]$  hálózatot, ahol,  $k_{ij}, \forall ij \in A$ -ra tetszőleges nemnegatív egész.

**Duál feladat** (Munkaerő közvetítő feladata):

Keresendő az  $[N,A,k]$  hálózaton értelmezett  $f_{ij}, \forall ij \in A$  folyam, amelyre

$$\sum_{ij \in A} f_{ji} - \sum_{ij \in A} f_{ij} = 0 \quad \forall i \in N, i \neq 1, i \neq t$$

$$p\nu + \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} < c_{ij}}} (c_{ij} - f_{ij})b_{ij} - \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} > c_{ij}}} (f_{ij} - c_{ij})a_{ij} \text{ minimális.}$$

-ahol  $\nu$  a folyam értéke.

**Megjegyzés:** A duál egy lehetséges interpretációja a következő. Egy munkaerő közvetítő vállalkozó munkaerőt biztosít a gyorsításhoz. A munkásokat  $p$  napon keresztül folyamatosan kell foglalkoztatni. A napi munkáslétszámot jelölje  $\nu$ . Ha a gyorsításhoz egy tevékenységen szükséges munkásszám, azaz  $c_{ij}$ , nagyobb mint ami rendelkezésünkre áll,  $f_{ij}$ , akkor újabb embereket kell bérbbe venni, a vállalkozó előzetes számításai szerint  $b_{ij}$  napig. Ellenkező esetben a vállalkozó bérbbe adja a munkásait  $a_{ij}$  napig.

A két feladat közötti kapcsolatot mutatja meg a következő lemma.

**Lemma:** Minden (\*)-ot – a primál feladat feltételeit- teljesítő  $\mu$  és  $\tau$  valamint az  $N,k$  hálózaton értelmezett tetszőleges  $f$  folyamra, melynek értéke  $\nu$  teljesül az alábbi egyenlőtlenség.

$$\sum_{ij \in A} c_{ij} \tau_{ij} \leq p\nu + \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} < c_{ij}}} (c_{ij} - f_{ij})b_{ij} - \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} > c_{ij}}} (f_{ij} - c_{ij})a_{ij}$$

ahol  $\nu$  az  $f$  folyam értéke (a start csomópontból kifolyó folyamok összege).

Bizonyítás:

$$\sum_{ij \in A} c_{ij} \tau_{ij} = \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} < c_{ij}}} (f_{ij} + c_{ij} - f_{ij}) \tau_{ij} + \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} > c_{ij}}} (f_{ij} - (f_{ij} - c_{ij})) \tau_{ij} =$$

$$\sum_{ij \in A} f_{ij} \tau_{ij} + \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} < c_{ij}}} (c_{ij} - f_{ij}) \tau_{ij} - \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} > c_{ij}}} (f_{ij} - c_{ij}) \tau_{ij} \leq$$

$$\leq \sum_{ij \in A} f_{ij} (\mu_j - \mu_i) + \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} < c_{ij}}} (c_{ij} - f_{ij}) b_{ij} - \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} > c_{ij}}} (f_{ij} - c_{ij}) a_{ij}$$

ahol

$$\sum_{ij \in A} f_{ij} (\mu_j - \mu_i) = \sum_{j \in N} \mu_j \sum_{ij \in A} (f_{ij} - f_{ji}) = \mu_1(-\nu) + \mu_t \nu$$

Ezzel bizonyítást befejeztük.

**Következmény:** Ha egyenlőség áll fenn, akkor a célfüggvények optimálisak.



**Optimalitási kritérium:**

Az egyenlőség fennállásának elégséges feltétele, hogy létezzen olyan folyam, amelyre:

1<sup>0</sup> Ha  $\tau_{ij} < \mu_j - \mu_i$  akkor  $f_{ij} = 0$

2<sup>0</sup> Ha  $\tau_{ij} < b_{ij}$  akkor  $f_{ij} \geq c_{ij}$

3<sup>0</sup> Ha  $\tau_{ij} > a_{ij}$  akkor  $f_{ij} \leq c_{ij}$

Kritikusnak nevezünk egy tevékenységet, ha  $\tau_{ij} = \mu_j - \mu_i$ . Vegyük észre, hogy folyam csak kritikus tevékenységeken folyhat.

**Észrevétel:**

1. A primál feladat célfüggvényének maximalizálása miatt optimalitás esetén  $\tau$  az alábbi értékeket veheti fel.

$$\tau_{ij} = \min[\mu_j - \mu_i, b_{ij}]$$

2. A leghosszabb átfutási időhöz tartozó optimális megoldás,  $\tau_{ij} = b_{ij}, f_{ij} = 0, \forall ij \in A$ .

Az optimalitási kritériumoknak megfelelően a következő osztályokba sorolhatjuk az éleket.

A <sub>I</sub>	1 <sup>0</sup> teljesül, (esetleg 3 <sup>0</sup> is)	$\tau_{ij} < \mu_j - \mu_i$	$f_{ij} = 0$
A <sub>II</sub>	2 <sup>0</sup> és 3 <sup>0</sup> teljesül,	$a_{ij} < \tau_{ij} < b_{ij}, \tau_{ij} = \mu_j - \mu_i$	$f_{ij} = c_{ij}$
A <sub>III</sub>	csak 2 <sup>0</sup> teljesül,	$\tau_{ij} < b_{ij}, \tau_{ij} = \mu_j - \mu_i = a_{ij}$	$f_{ij} \geq c_{ij}$
A <sub>IV</sub>	csak 3 <sup>0</sup> teljesül,	$a_{ij} < \tau_{ij}, \tau_{ij} = \mu_j - \mu_i = b_{ij}$	$f_{ij} \leq c_{ij}$
A <sub>V</sub>	egyik sem teljesül,	$\tau_{ij} = a_{ij} = b_{ij} = \mu_j - \mu_i$	$f_{ij} \geq 0$

**Lemma:** Ha valamely p-re létezik optimális  $\mu, \tau, f$  akkor vagy létezik  $p^* < p$  amelyre van optimális  $\mu^*, \tau^*, f^*$  megoldás vagy p a legkisebb érték amelyre a feladat megoldható.

**Bizonyítás:**

Készítsük el az alábbi  $[N, A', r]$  szabad kapacitás hálózatot, ahol  $A'$  olyan kibővítés  $A$ -nak, hogy ha  $ij \in A$  akkor legyen  $ji \in A'$ .

Él csoport	Kapacitás az $ij \in A$ élen	Kapacitás a $ji$ élen ( $ji$ nem tartozik $A$ -ba !)
$ij \in A_I$	$r_{ij} = 0,$	$r_{ji} = 0$
$ij \in A_{II}$	$r_{ij} = 0,$	$r_{ji} = 0$
$ij \in A_{III}$	$r_{ij} = \infty,$	$r_{ji} = f_{ij} - c_{ij}$
$ij \in A_{IV}$	$r_{ji} = c_{ij} - f_{ij},$	$r_{ji} = f_{ij}$
$ij \in A_V$	$r_{ij} = \infty,$	$r_{ji} = f_{ij}$

A többi él kapacitása legyen 0.

Keressünk maximális folyamat az előbb definiált hálózaton. Legyen a maximális folyam  $g$  a minimális vágás  $(S, T)$ .

Legyen  $f_{ij}^* = g_{ij} + f_{ij}$ ,  $f_{ij}$ ,  $\forall ij \in A$ . A kapacitások megválasztása miatt  $f^*$  továbbra is megfelel az optimalitási kritériumoknak.

Ha  $g$  végtelen, akkor van olyan út  $s$ -ből  $t$ -be, amelyen minden él vagy az  $A_{III}$  vagy az  $A_V$  csoportba tartozik, tehát azon az úton minden  $\tau_{ij} = a_{ij}$ , így  $p$  a legkisebb érték (átfutási idő) amelyre a feladat megoldható.

Ha  $g$  véges, akkor a vágásban lévő élek telítettek, azaz a vágásban vagy  $f_{ij}^* = 0$  vagy  $f_{ij}^* = c_{ij}$  ahol  $ij \in (S, T)$ . A vágásban csak  $A_I$ ,  $A_{II}$ ,  $A_{IV}$  típusú élek lehetnek, mert ezek kapacitása korlátos. A vágásban visszafelé bármilyen kapacitású él lehet. Vizsgáljuk meg a folyaminformációk segítségével, hogy a vágásban lévő és a vágásban visszafelé lévő élek milyen élcsoportba kerülhetnek az optimalitási kritériumok betartásával, ha változnak a  $T$  halmazban a potenciál értékek.

Ekkor egy élen a folyam vagy 0 vagy  $c$ .

Vágásban lévő élek  $i \in S, j \in T, ij \in A$ .

$$A_I \quad \tau_{ij} < \mu_j - \mu_i, \quad \tau_{ij} = b_{ij}, \quad f_{ij} = 0$$

Ha  $\mu_j$  kisebb lesz, akkor vagy  $A_I$  marad az él, vagy addig csökkenhet, amíg

$$A_{IV} \text{ típusú nem lesz, ekkor } \tau_{ij}^* = \mu_j^* - \mu_i = b_{ij}, \quad f_{ij}^* \leq c_{ij}$$

$$\text{vagy ha } c_{ij} = 0 \text{ akkor további csökkenésre lehet } A_{II} \text{ típusú } a_{ij} < \tau_{ij}^* < b_{ij}, \tau_{ij}^* = \mu_j^* - \mu_i, \\ f_{ij}^* = c_{ij} = 0$$

$$\text{végül ha } c_{ij} = 0 \text{ és } a_{ij} = b_{ij} \text{ akkor lehet } A_V \text{ típusú, ekkor } \tau_{ij} = \mu_j^* - \mu_i = a_{ij} = b_{ij} \quad f_{ij}^* \geq 0.$$

A maximális csökkenés tetszőleges  $c$ -re, minden vágásban lévő  $A_I$  típusú élt figyelembe véve  $\delta_1 = \min_{\substack{i \in S, j \in T \\ ij \in A_I}} (\mu_j - \mu_i - b_{ij})$

$$A_{II} \text{ típusú él esetén } a_{ij} < \tau_{ij} = \mu_j - \mu_i < b_{ij},$$

$$\mu_j^* < \mu_j \text{-re } \tau_{ij}^* = \mu_j^* - \mu_i < b_{ij},$$

ha most  $\tau_{ij}^* > a_{ij}$  akkor az él  $A_{II}$  típusú, ha  $\tau_{ij}^* = a_{ij}$  akkor  $A_{III}$  típusú lesz az él. A folyamérték

$$f_{ij}^* = c_{ij}$$

$$\text{A maximális csökkenés } \delta_2 = \min_{\substack{i \in S, j \in T \\ ij \in A_{II}}} (\mu_j^* - \mu_i - a_{ij})$$

Ha a vágásban  $A_{IV}$  típusú él van:  $a_{ij} < \tau_{ij} = b_{ij} = \mu_j - \mu_i$ , akkor

$$\text{egy } \mu_j^* < \mu_j \text{-re } \tau_{ij}^* = \mu_j^* - \mu_i < b_{ij},$$

ha most  $\tau_{ij}^* > a_{ij}$  akkor az él  $A_{II}$  típusú, ha  $\tau_{ij}^* = a_{ij}$  akkor  $A_{III}$  típusú lesz az él. A folyamérték  $f_{ij}^* = c_{ij}$ .

$$\text{A maximális csökkenés } \delta_4 = \min_{\substack{i \in S, j \in T \\ ij \in A_{IV}}} (\mu_j - \mu_i - a_{ij})$$

**A vágásban visszafelé** bármilyen él lehet. Ekkor  $i \in T, j \in S, ij \in A$  és a potenciálértékek a következőképpen változnak

$A_I$  típusú él  $A_I$  típusú marad

$$A_{II}, a_{ij} < \tau_{ij} = \mu_j - \mu_i < b_{ij}$$

Tetszőleges  $\mu_i^* < \mu_i$ -re (ekkor  $\tau_{ij}^*$  nőhet !) az alábbi lehetséges élosztályok adódnak

$$\text{Ha } a_{ij} < \tau_{ij}^* = \mu_j - \mu_i^* < b_{ij}, \text{ akkor az él } A_{II} \text{ típusú marad } f_{ij}^* \leq c_{ij};$$

$$\text{Ha } a_{ij} < \tau_{ij}^* = \mu_j - \mu_i^* = b_{ij} \text{ akkor az él } A_{IV} \text{ osztályba tartozik;}$$

$$\text{Ha } c_{ij} = 0, \text{ és } a_{ij} < \tau_{ij}^* < \mu_j - \mu_i^*, \tau_{ij}^* = b_{ij} \text{ akkor } A_I \text{ típusú lesz az él.}$$

A maximális csökkenés tetszőleges  $c$ -re  $\delta_{v2} = \min_{\substack{i \in T, j \in S \\ ij \in A_{II}}} (b_{ij} - \mu_j + \mu_i)$

$A_{III}$   $\tau_{ij} = \mu_j - \mu_i = a_{ij} < b_{ij}, f_{ij} \geq c_{ij}$ . Ekkor a vágásban egy  $f_{ij} - c_{ij}$  kapacitású, telített él van, tehát az új folyam érték a vágásban visszamenő  $A_{III}$  élen  $f_{ij}^* = f_{ij} + g_{ij} = f_{ij} - f_{ij} + c_{ij} = c_{ij}$  lesz.

Tetszőleges  $\mu_i^* < \mu_i$ -re (ekkor  $\tau_{ij}^*$  nőhet !) az alábbi lehetséges élosztályok adódnak

$$\text{Ha } a_{ij} < \tau_{ij}^* = \mu_j - \mu_i^* < b_{ij}, \text{ akkor az él } A_{II} \text{ típusú marad } f_{ij}^* = c_{ij};$$

$$\text{Ha } a_{ij} < \tau_{ij}^* = \mu_j - \mu_i^* = b_{ij} \text{ akkor az él } A_{IV} \text{ osztályba tartozik; } f_{ij}^* \leq c_{ij}$$

$$\text{Ha } c_{ij} = 0, \text{ és } a_{ij} < \tau_{ij}^* < \mu_j - \mu_i^*, \tau_{ij}^* = b_{ij} \text{ akkor } A_I \text{ típusú lesz az él } f_{ij}^* = 0.$$

A maximális csökkenés  $\delta_{v3} = \min_{\substack{i \in T, j \in S \\ ij \in A_{III}}} (b_{ij} - \mu_j + \mu_i)$

A vágásban visszamenő  $A_{IV}$  vagy  $A_V$  típusú él  $A_I$  típusú lesz, ha a  $\mu_i$  csökken.

Most csökkentjük a potenciálértékeket úgy, hogy a folyamértékek változatlanok maradnak és az optimalitási kritérium továbbra is teljesül.

$$\delta := \min(\delta_1, \delta_2, \delta_4, \delta_{v2}, \delta_{v3})$$

ahol  $\delta$  biztosan pozitív mennyiség.

Legyenek az új potenciál értékek a következők szerint megválasztva.

$$\mu_i^* = \mu_i, \text{ ha } i \in S,$$

$$\mu_i^* = \mu_i - \lambda, \text{ ha } i \in T,$$

$$\text{ahol } \lambda = 0, 1, 2, \dots, \delta$$

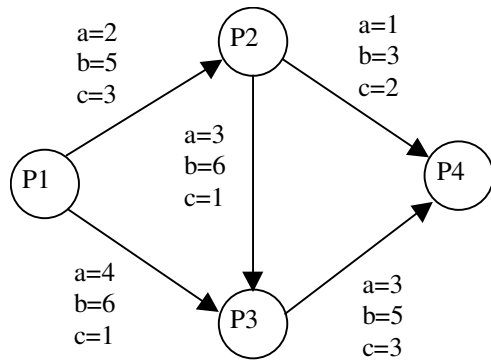
$$\text{illetve } \tau_{ij}^* := \min[\mu_j - \mu_i, b_{ij}].$$

A  $\mu^*, \tau^*, f^*$  értékek az optimalitási kritériumot kielégítik.

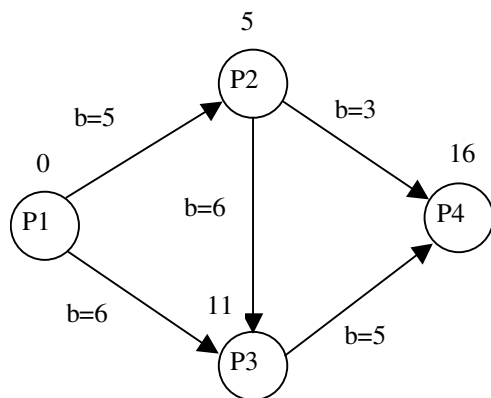
Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Példák

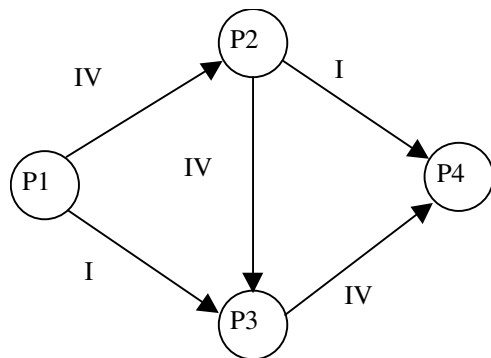
1. Példa: Határozzuk meg az alábbi tervütem hálón a minden lehetséges átfutási időre a minimális költségű megoldást.



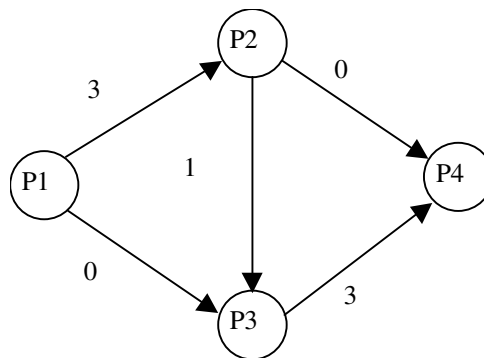
Kiinduló értékek:  
kezdeti folyam  $f=0$ ,



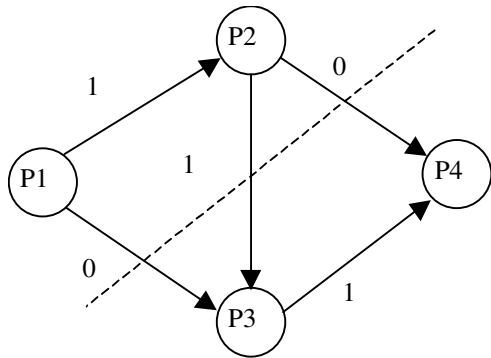
1. iterációs lépés:  
Élek osztályozása:



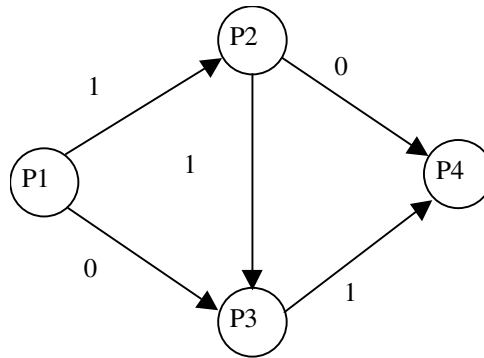
szabad kapacitás



g folyam és a minimális vágás



f\* folyam



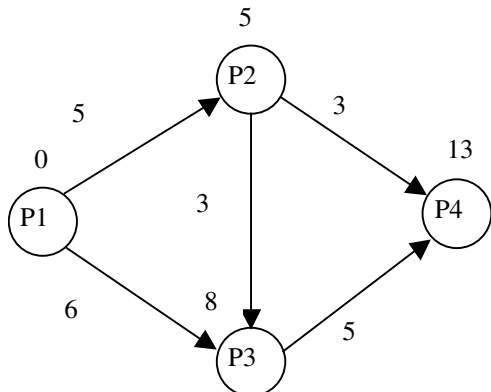
$$\delta_{13} = 11 - 0 - 6 = 5$$

$$\delta_{24} = 16 - 5 - 3 = 8$$

$$\delta_{23} = 11 - 5 - 3 = 3$$

$$\delta = 3$$

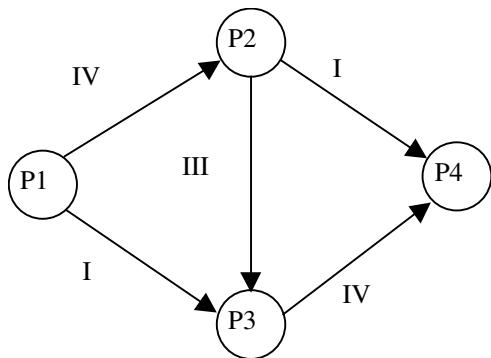
Az új tevékenységidők és potenciálértékek meghatározása.



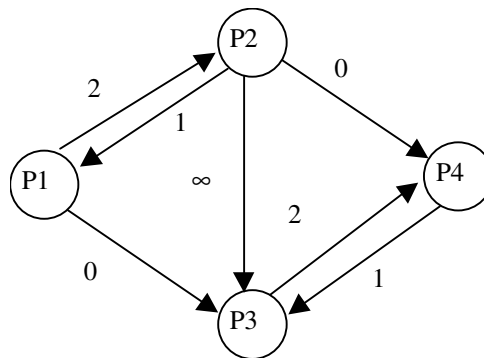
A költség növekedés:  $3c_{23} = 3$  egység.

2. iteráció

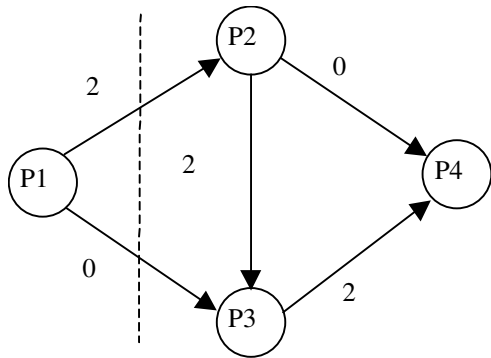
Élek osztályozása:



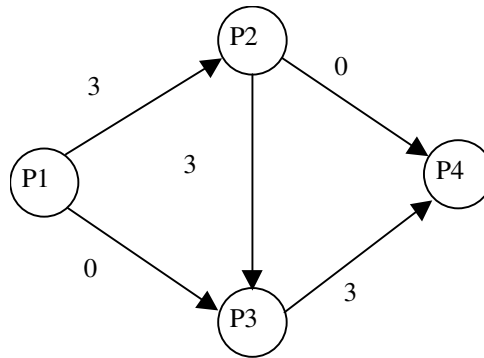
szabad kapacitás



g folyam és a minimális vágás



f\* folyam

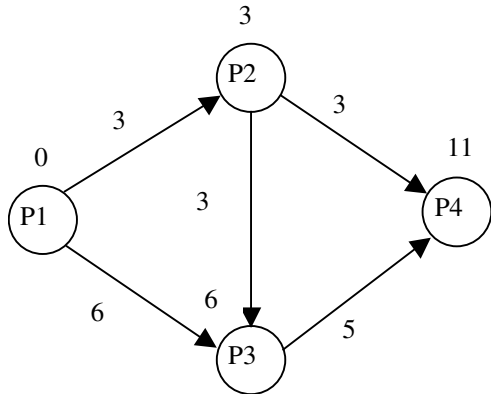


$$\delta_{12} = 5 - 0 - 2 = 3$$

$$\delta_{13} = 8 - 0 - 6 = 2$$

$$\delta = 2$$

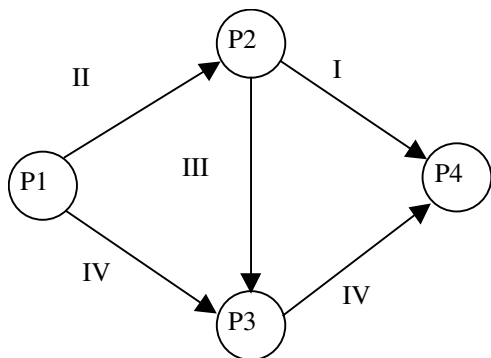
Az új tevékenységidők és potenciálértékek meghatározása.



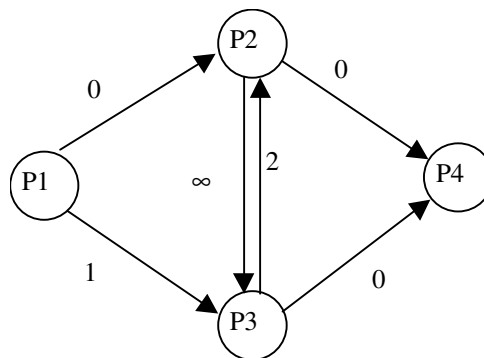
A költség növekedés:  $3c_{23} + 2c_{13} = 3 + 6 = 9$  egység.

3. iteráció

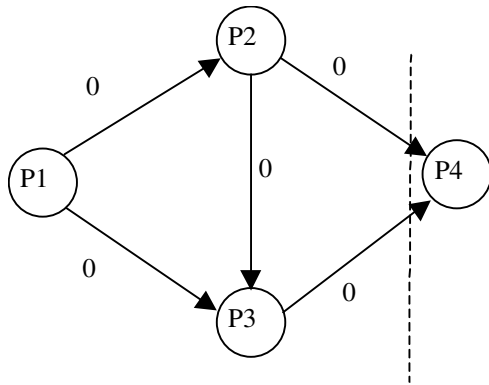
Élek osztályozása:



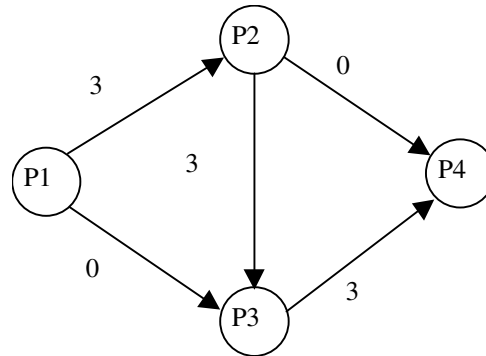
szabad kapacitás



g folyam és a minimális vágás



f\* folyam

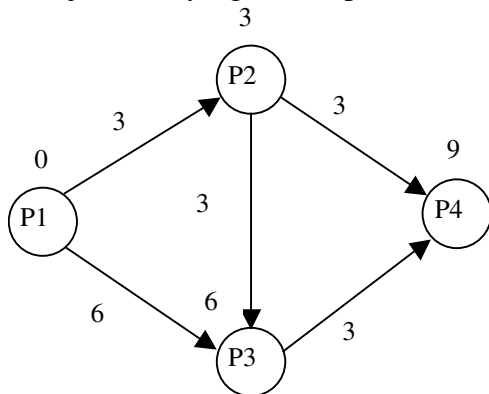


$$\delta_{24} = 11 - 3 - 3 = 5$$

$$\delta_{34} = 11 - 6 - 3 = 2$$

$$\delta = 2$$

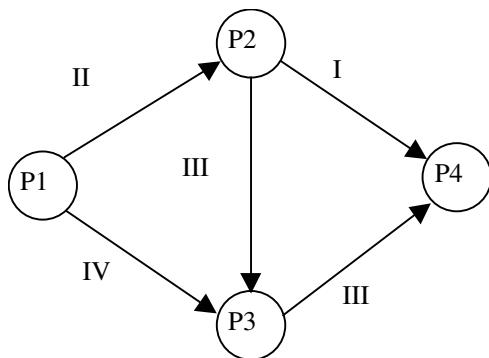
Az új tevékenységidők és potenciálértékek meghatározása.



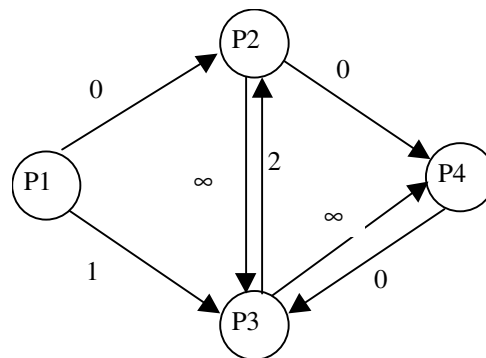
A költség növekedés:  $3c_{23} + 2c_{13} + 2c_{34} = 3 + 6 + 6 = 15$  egység.

4. iteráció

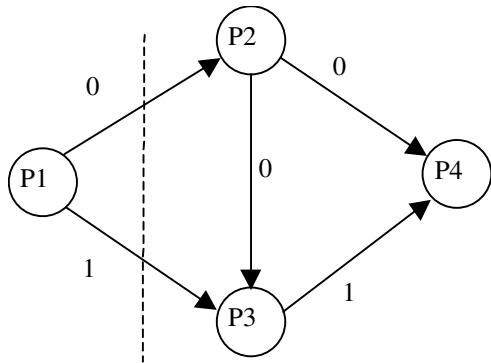
Élek osztályozása:



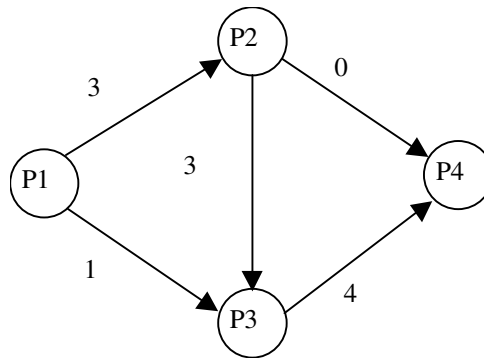
szabad kapacitás



g folyam és a minimális vágás



f\* folyam

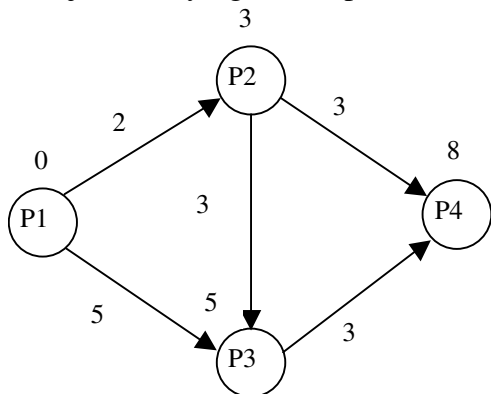


$$\delta_{12} = 3 - 0 - 2 = 1$$

$$\delta_{13} = 6 - 0 - 4 = 2$$

$$\delta = 1$$

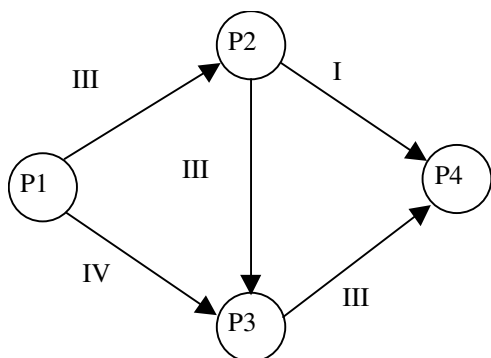
Az új tevékenységidők és potenciálértékek meghatározása.



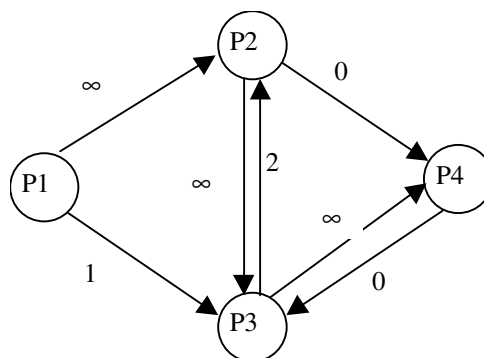
A költség növekedés:  $3c_{23} + 2c_{13} + 2c_{34} + 1c_{12} = 3 + 6 + 6 + 3 = 18$  egység.

5. iteráció:

Élek osztályozása:

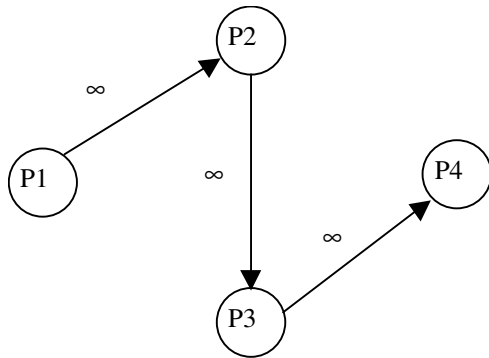


szabad kapacitás

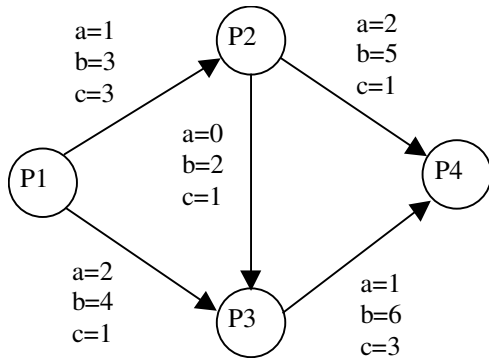




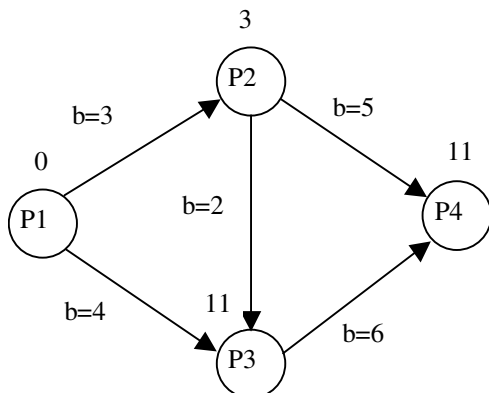
g folyam végtelen a p1-p2-p3-p4 úton minden tevékenységidő minimális, így 8 nap az elérhető minimális átfutási idő.



2. Példa: Határozzuk meg az alábbi tervütem hálón a minden lehetséges átfutási időre a minimális költségű megoldást.

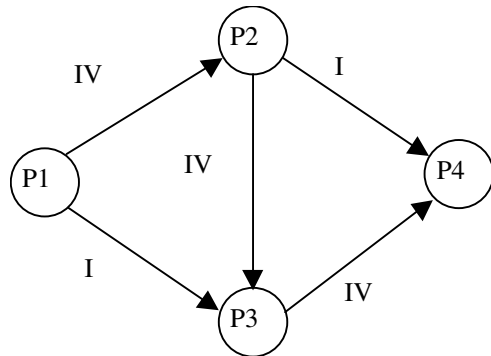


Kiinduló értékek:  
kezdeti folyam  $f=0$ ,

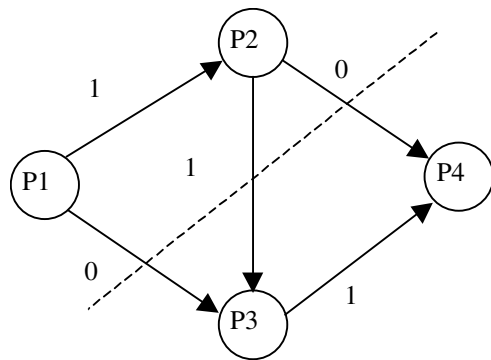


1. iterációs lépés

Élek osztályozása:



g folyam és a minimális vágás



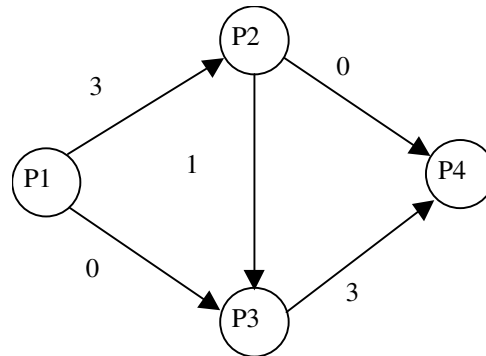
$$\delta_{13} = 5 - 0 - 4 = 1$$

$$\delta_{24} = 11 - 3 - 5 = 3$$

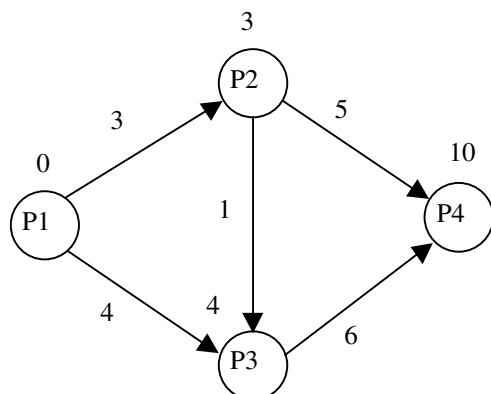
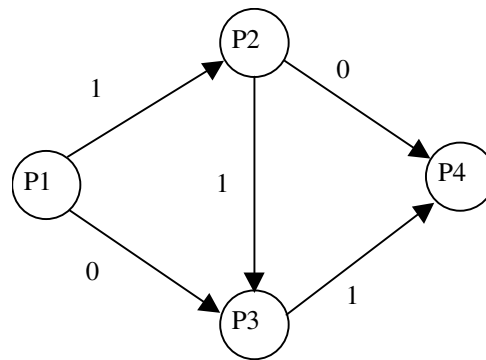
$$\delta_{23} = 5 - 3 - 0 = 2$$

$$\delta = 1$$

szabad kapacitás



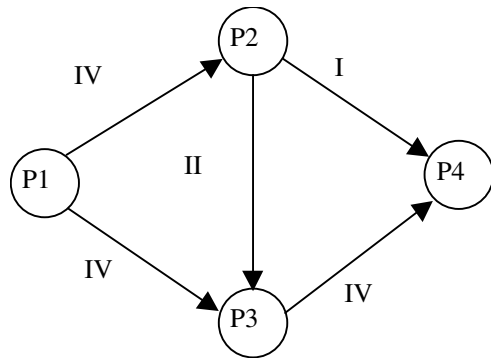
f\* folyam



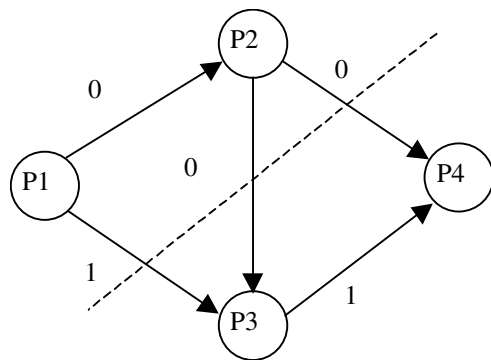
A költség növekedés:  $c_{23} = 1$  egység.

Az iteráció 2. lépése

Élek osztályozása:



g folyam és a minimális vágás



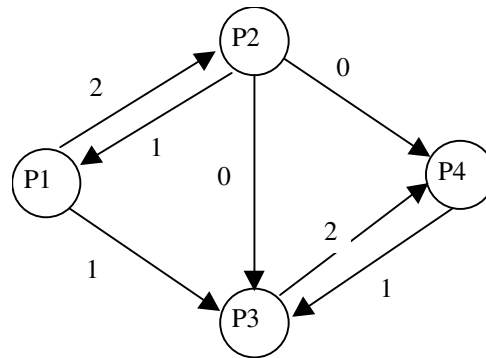
$$\delta_{13} = 4 - 0 - 2 = 2$$

$$\delta_{24} = 10 - 3 - 5 = 2$$

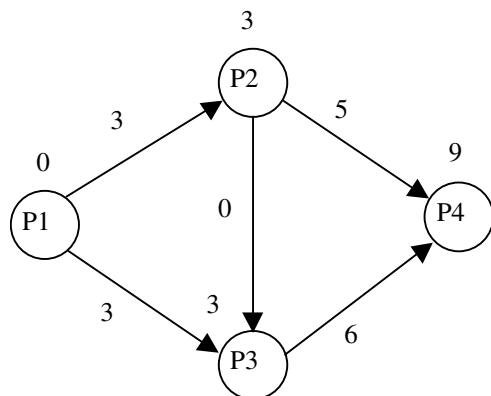
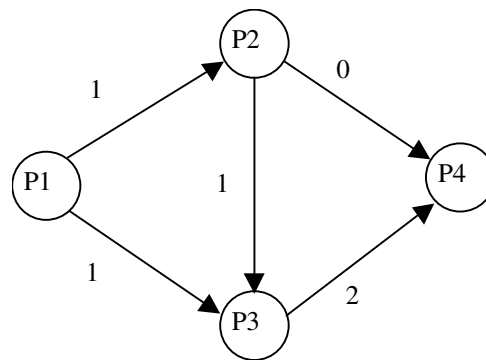
$$\delta_{23} = 4 - 3 - 0 = 1$$

$$\delta = 1$$

szabad kapacitás



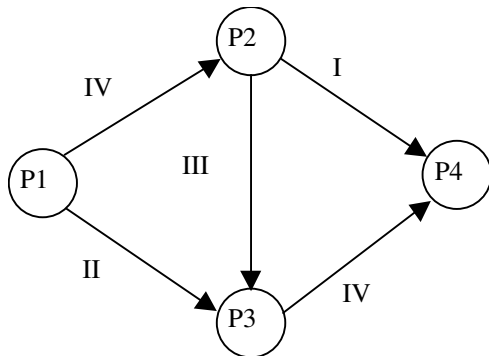
f\* folyam



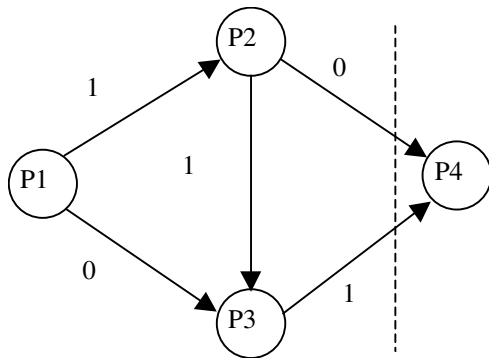
A költség növekedés:  $c_{23} + c_{13} = 1 + 1 = 2$  egység.

Az iteráció 3. lépése

Élek osztályozása:



g folyam és a minimális vágás

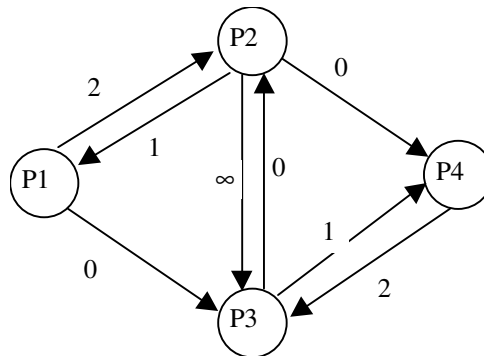


$$\delta_{42} = 9 - 3 - 5 = 1$$

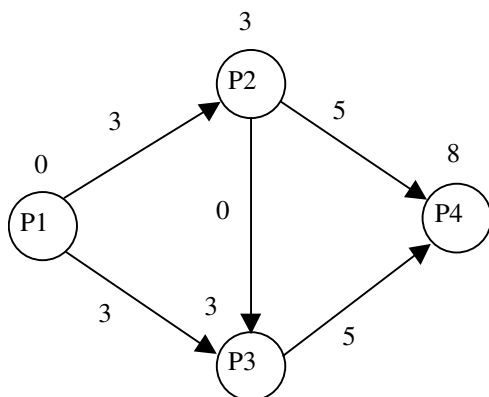
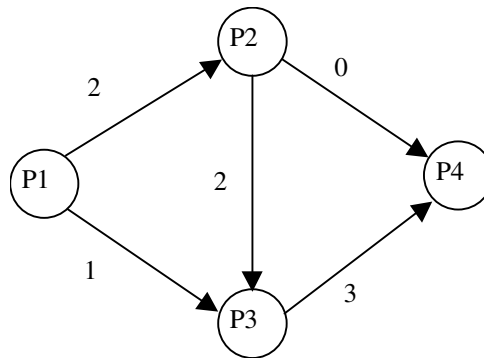
$$\delta_{34} = 9 - 3 - 1 = 5$$

$$\delta = 1$$

szabad kapacitás



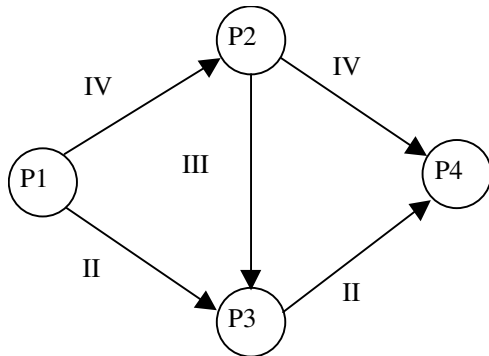
f\* folyam



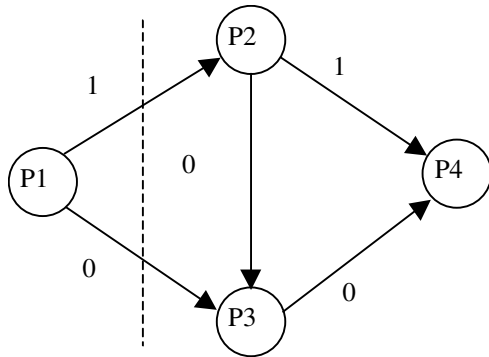
A költség növekedés:  $c_{23} + c_{13} + c_{34} = 1 + 1 + 3 = 5$  egység.

4. iterációs lépés

Élek osztályozása:



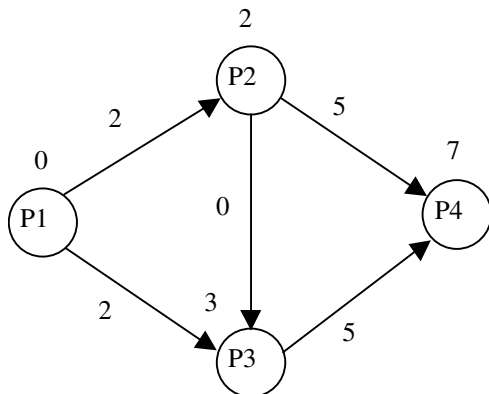
g folyam és a minimális vágás



$$\delta_{12} = 3 - 0 - 1 = 2$$

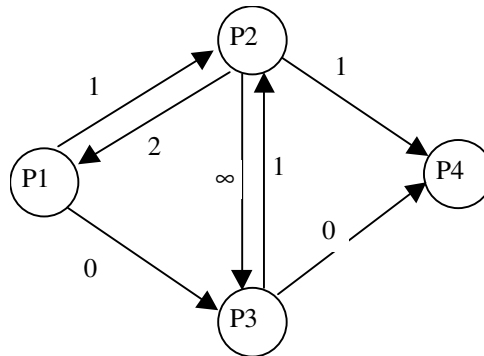
$$\delta_{13} = 3 - 0 - 2 = 1$$

$$\delta = 1$$

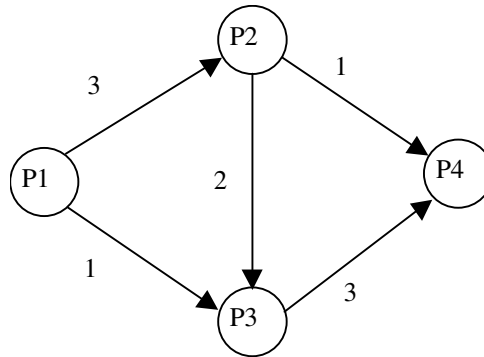


A költség növekedés:  $c_{23} + c_{13} + c_{34} + c_{12} + c_{13} = 1 + 1 + 3 + 3 + 1 = 9$  egység.

szabad kapacitás

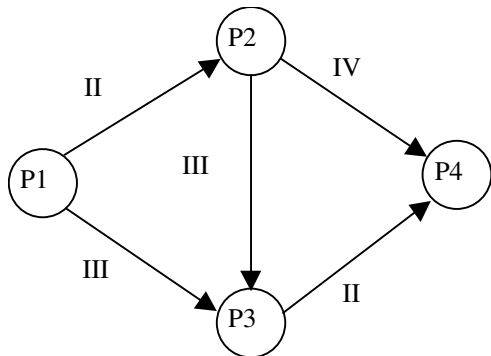


f\* folyam

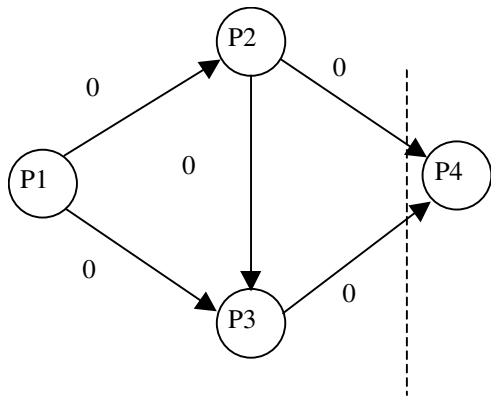


5. lépés

Élek osztályozása:



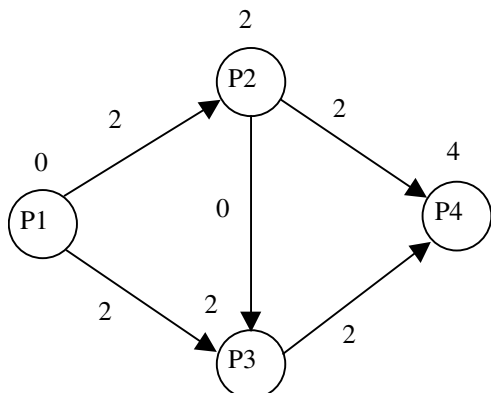
g folyam és a minimális vágás



$$\delta_{24} = 7 - 2 - 2 = 3$$

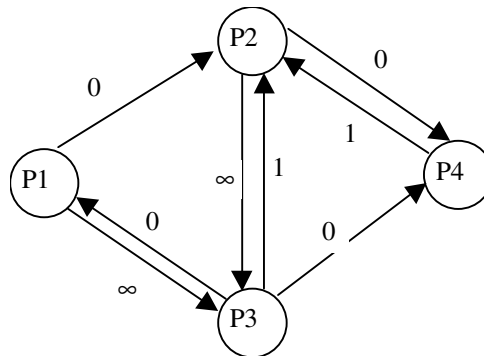
$$\delta_{34} = 7 - 2 - 1 = 4$$

$$\delta = 1$$

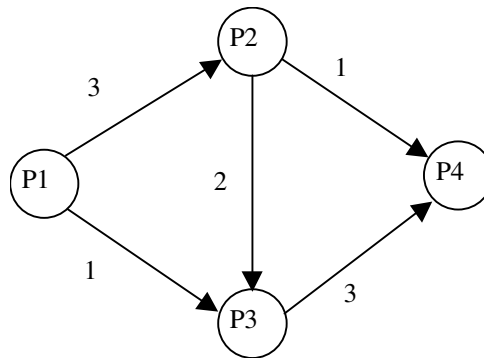


A költség növekedés:  $c_{23} + c_{13} + c_{34} + c_{12} + c_{13} + 3c_{24} + 3c_{34} = 1 + 1 + 3 + 3 + 1 + 3 + 9 = 21$  egység.

szabad kapacitás

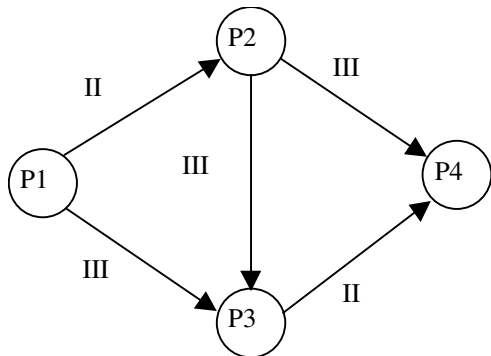


f\* folyam

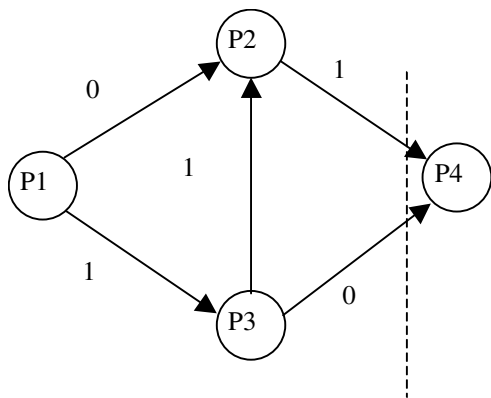


6. lépés

Élek osztályozása:



g folyam és a minimális vágás

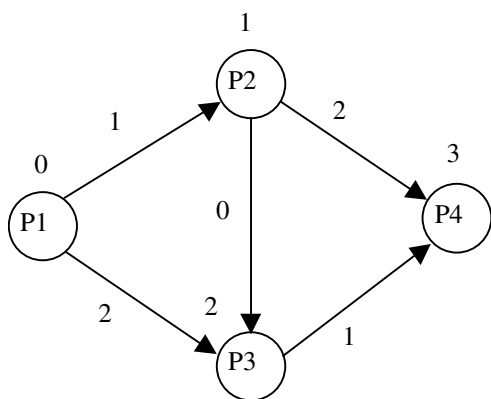


$$\delta_{13} = 2 - 0 - 1 = 1$$

$$\delta_{34} = 4 - 2 - 1 = 1$$

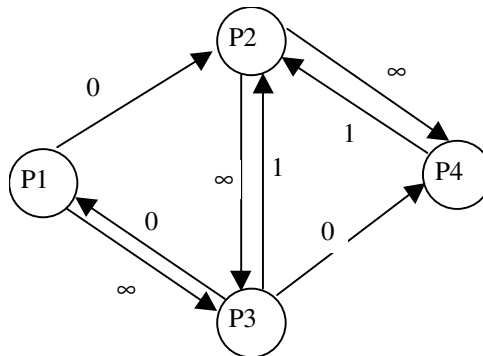
A visszamenő III. típusú  $(3,4) \in A$  élen  $\delta_{34} = 2 - 2 + 2 = 2$

$$\delta = 1$$

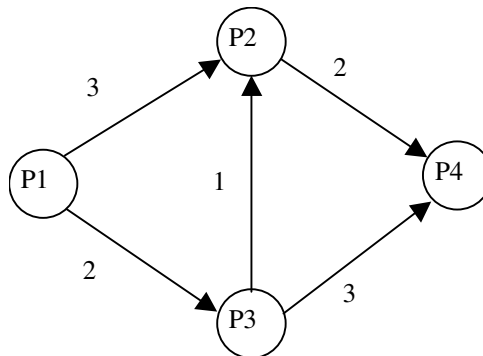


A költség növekedés:  $c_{23} + c_{13} + c_{34} + c_{12} + c_{13} + 3c_{24} + 3c_{34} + c_{34} = 1 + 1 + 3 + 3 + 1 + 3 + 9 + 3 = 24$

szabad kapacitás

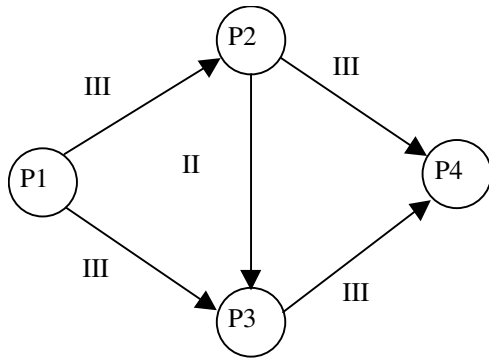


f\* folyam

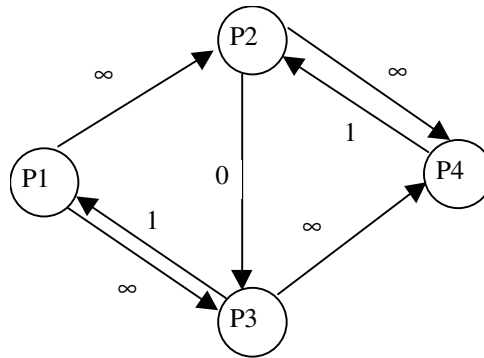


7. lépés

Élek osztályozása:



szabad kapacitás



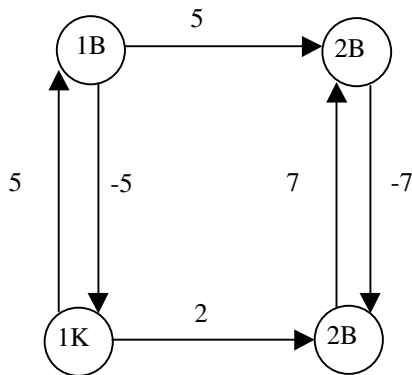
A g folyam végtelen ezért a minimális átfutási idő 4 nap.



**14. A költségtervezési feladat megoldása a csak minimális kapcsolatokat tartalmazó MPM háló**

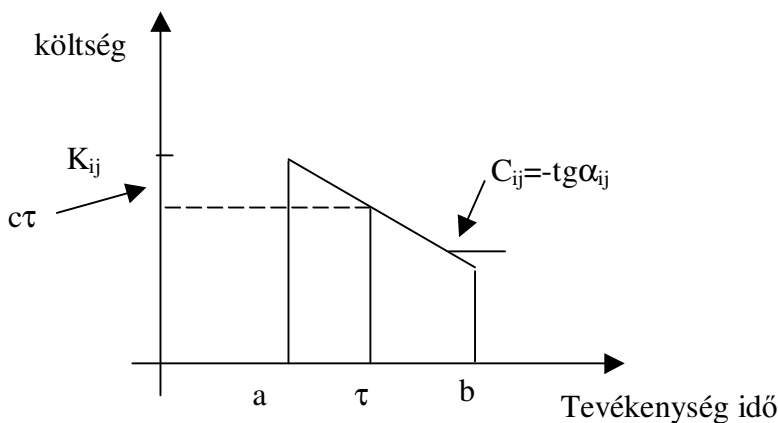
Minden tevékenységre igaz, hogy  $\tau_{ij} = \mu_j - \mu_i$  (itt  $i$  és  $j$  rendre egy tevékenység kezdete és vége), valamint különböző tevékenységek kezdete és befejezte között további kapcsolatokat adhatunk meg, azaz  $\tau_{ij} \leq \mu_j - \mu_i$ , ahol  $i$  és  $j$  két különböző tevékenység kezdete vagy vége.

Ábrázolásban ez azt jelenti, hogy minden tevékenységet 2 csomóponttal és a köztük lévő két nyíllal ábrázolunk.



A tervütem háló, a továbbiakban röviden csak háló, pontjai eseményeket az élek tevékenységeket jelentenek. Adottak a háló éleihez rendelt  $a_{ij}$  és  $b_{ij}$  egész számok,<sup>1</sup> amelyekre feltesszük hogy  $a_{ij} \leq b_{ij}$  továbbá vagy mindkettő pozitív, vagy mindkettő negatív valamint az a költségtényező  $c_{ij} \geq 0$ , amely egy tevékenység felgyorsításához szükséges erőforrás mennyisége. Jelölje a tevékenységidőt  $\tau_{ij}$ .

Jelöléseink közötti kapcsolatot szemlélteti a következő ábra.



Továbbá, ha  $b_{ij}$  negatív, akkor legyen  $c_{ij} = 0$ .

<sup>1</sup> Ha  $a_{ij}$  és  $b_{ij}$  nemnegatívak akkor jelentésük szerint a tevékenység idő elvégzésének normál ideje  $b_{ij}$  illetve roham ideje  $a_{ij}$

**Primál feladat** (a kivitelező feladata).

Adott az  $[N,A]$  tervütem háló és háló éleihez rendelt  $a_{ij}, b_{ij}$  egész és  $c_{ij} \geq 0, \forall ij \in A$ -ra nemnegatív egész értékek.

Keresendő azon  $\mu_i, \forall i \in N$ -re és  $\tau_{ij}, \forall ij \in A$ -ra, ahol

$$\tau_{ij} \leq \mu_j - \mu_i \quad \forall ij \in A$$

$$\tau_{ij} \leq b_{ij} \quad \forall ij \in A$$

$$\tau_{ij} \geq a_{ij} \quad \forall ij \in A$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_t = 0$$

és az összköltség minimális, azaz  $\sum_{ij \in A} (K_{ij} - c_{ij} \tau_{ij})$  vagy  $\max \sum_{ij \in A} c_{ij} \tau_{ij}$ .

**Megjegyzés:** Az, hogy egy  $ij$  tevékenységre  $a_{ij} \leq \mu_j - \mu_i \leq b_{ij}$  fennálljon, elegendő az  $a_{ij}, b_{ij}, a_{ji}, b_{ji}$  paramétereket úgy megadni, hogy  $\tau_{ij} \leq \mu_j - \mu_i, a_{ij} \leq \tau_{ij} \leq b_{ij}$ ; illetve  $\tau_{ji} \leq \mu_i - \mu_j, -b_{ij} = b_{ji} \leq \tau_{ij} \leq a_{ji} = -a_{ij}$ ; teljesüljenek. Továbbá, ha  $c_{ij} > 0$  akkor a célfüggvény optimumát a minden  $ij$ -re  $\tau_{ij} = \min(b_{ij}, \mu_j - \mu_i)$  helyen veszi fel, azaz minden tevékenységre  $\tau_{ij} = \mu_j - \mu_i$  teljesül (nem minden  $ij$  él tevékenység), illetve ha  $c_{ji} = 0$ , akkor  $\tau_{ji}$  tetszőleges, tehát úgy választható, hogy  $\tau_{ji} = \mu_i - \mu_j$  teljesüljön.

A fenti feladathoz rendelhető a következő úgynevezett duál feladat.

Tekintsük az  $[N,k]$  hálózatot, amely olyan, hogy  $k_{ij} = \infty$ , ha  $\forall ij \in A$  és 0 egyébként.

**Duál feladat** (Munkaerő közvetítő feladata):

Keresendő az  $[N,k]$  hálózaton értelmezett  $f_{ij}, \forall ij \in A$  folyam, amelyre

$$\sum_{ij \in A} f_{ji} - \sum_{ij \in A} f_{ij} = 0 \quad \forall i \in N, i \neq 1, i \neq t$$

$$pv + \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} < c_{ij}}} (c_{ij} - f_{ij}) b_{ij} - \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} > c_{ij}}} (f_{ij} - c_{ij}) a_{ij} \text{ minimális.}$$

**Megjegyzés:** A duál egy lehetséges interpretációja a következő. Egy munkaerő közvetítő vállalkozó munkaerőt biztosít a gyorsításhoz. A munkásokat  $p$  napon keresztül folyamatosan kell foglalkoztatni. A napi munkáslétszámot jelölje  $v$ . Ha a gyorsításhoz egy tevékenységen szükséges munkásszám, azaz  $c_{ij}$ , nagyobb mint ami rendelkezésünkre áll,  $f_{ij}$ , akkor újabb embereket kell bérbbe venni, a vállalkozó előzetes számításai szerint  $b_{ij}$  napig. Ellenkező esetben a vállalkozó bérbbe adja a munkásait  $a_{ij}$  napig.

A két feladat közötti kapcsolatot mutatja meg a következő lemma.

**Lemma:** Minden (\*)-ot – a primál feladat feltételeit- teljesítő  $\mu$  és  $\tau$  valamint az  $N,k$  hálózaton értelmezett tetszőleges  $f$  folyamra, melynek értéke  $v$  teljesül az alábbi egyenlőtlenség.

$$\sum_{ij \in A} c_{ij} \tau_{ij} \leq p v + \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} < c_{ij}}} (c_{ij} - f_{ij}) b_{ij} - \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} > c_{ij}}} (f_{ij} - c_{ij}) a_{ij}$$

ahol  $v$  az  $f$  folyam értéke (a start csomópontból kifolyó folyamok összege).

Bizonyítás:

$$\sum_{ij \in A} c_{ij} \tau_{ij} = \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} < c_{ij}}} (f_{ij} + c_{ij} - f_{ij}) \tau_{ij} + \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} > c_{ij}}} (f_{ij} - (f_{ij} - c_{ij})) \tau_{ij} =$$

$$\sum_{ij \in A} f_{ij} \tau_{ij} + \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} < c_{ij}}} (c_{ij} - f_{ij}) \tau_{ij} - \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} > c_{ij}}} (f_{ij} - c_{ij}) \tau_{ij} \leq$$

$$\leq \sum_{ij \in A} f_{ij} (\mu_j - \mu_i) + \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} < c_{ij}}} (c_{ij} - f_{ij}) b_{ij} - \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} > c_{ij}}} (f_{ij} - c_{ij}) a_{ij}$$

ahol

$$\sum_{ij \in A} f_{ij} (\mu_j - \mu_i) = \sum_{j \in N} \mu_j \sum_{ij \in A} f_{ij} (f_{ij} - f_{ji}) = \mu_1 (-v) + \mu_r v$$

Ezzel bizonyítást befejeztük.

**Következmény:** Ha egyenlőség áll fenn, akkor a célfüggvények optimálisak.

### Optimalitási kritérium:

Az egyenlőség fennállásának elégséges feltétele, hogy létezzen olyan folyam, amelyre:

$$1^0 \text{ Ha } \tau_{ij} < \mu_j - \mu_i \text{ akkor } f_{ij} = 0$$

$$2^0 \text{ Ha } \tau_{ij} < b_{ij} \text{ akkor } f_{ij} \geq c_{ij}$$

$$3^0 \text{ Ha } \tau_{ij} > a_{ij} \text{ akkor } f_{ij} \leq c_{ij}$$

Kritikusnak nevezünk egy tevékenységet vagy kapcsolatot, ha  $\tau_{ij} = \mu_j - \mu_i$ . Vegyük észre, hogy folyam csak ilyen éleken folyhat.

Ha egy optimális megoldást ismerünk, akkor maximális folyam feladat megoldásával megkapható egy újabb optimális megoldás az előbbinél kisebb átfutási időre. De ha hálónk hurkot tartalmaz, akkor a megengedett megoldás létezése is kérdéses és általában egy kiinduló optimális megoldáshoz egy minimális költségű folyamfeladatot kell megoldanunk. Speciális esetben (pld. hurokmentes, csak minimális kapcsolatokat tartalmazó MPM háló) azonban triviális a kiinduló optimális megoldás.

**Észrevétel:**

1. A primál feladat célfüggvényének maximalizálása miatt az optimális  $\tau$  az alábbi értékeket veheti fel.

Ha  $b_{ij} > 0$  akkor  $\tau_{ij} = \min[\mu_j - \mu_i, b_{ij}]$ , ha  $a_{ij} < 0$  akkor  $\tau_{ij} = \max[\mu_j - \mu_i, a_{ij}]$ .

2. Egy optimális megoldás,  $\tau_{ij} = b_{ij}$ ,  $f_{ij} = 0, \forall ij \in A$ .<sup>2</sup>

Az optimalitási kritériumoknak megfelelően a következő osztályokba sorolhatjuk az éleket.

$A_I$	$1^0$ teljesül, (esetleg $3^0$ is)	$\tau_{ij} < \mu_j - \mu_i$	$f_{ij} = 0$
$A_{II}$	$2^0$ és $3^0$ teljesül,	$a_{ij} < \tau_{ij} < b_{ij}, \tau_{ij} = \mu_j - \mu_i$	$f_{ij} = c_{ij}$
$A_{III}$	csak $2^0$ teljesül,	$\tau_{ij} < b_{ij}, \tau_{ij} = \mu_j - \mu_i = a_{ij}$	$f_{ij} \geq c_{ij}$
$A_{IV}$	csak $3^0$ teljesül,	$a_{ij} < \tau_{ij}, \tau_{ij} = \mu_j - \mu_i = b_{ij}$	$f_{ij} \leq c_{ij}$
$A_V$	egyik sem teljesül,	$\tau_{ij} = a_{ij} = b_{ij} = \mu_j - \mu_i$	$f_{ij} \geq 0$

**Lemma:** Ha valamely p-re létezik optimális  $\mu, \tau, f$  akkor vagy létezik  $p^* < p$  amelyre van optimális  $\mu^*, \tau^*, f^*$  megoldás vagy p a legkisebb érték amelyre a feladat megoldható.

**Bizonyítás:**

Készítsük el az alábbi  $[N, A', r]$  szabad kapacitás hálózatot, ahol  $A'$  olyan kibővítés  $A$ -nak, hogy ha  $ij \in A$  de  $ij \notin A$  akkor legyen  $ji \in A'$  és ekkor  $r_{ij} = 0$ .<sup>3</sup>

Él csoport	Kapacitás az $ij \in A$	Kapacitás a $ji$ élen (ji nem biztos, hogy A-ba tartozik!)
$ij \in A_I$	$r_{ij} = 0,$	$r_{ji} = 0$
$ij \in A_{II}$	$r_{ij} = 0,$	$r_{ji} = 0$
$ij \in A_{III}$	$r_{ij} = \infty,$	$r_{ji} = f_{ij} - c_{ij}$
$ij \in A_{IV}$	$r_{ji} = c_{ij} - f_{ij},$	$r_{ji} = f_{ij}$
$ij \in A_V$	$r_{ij} = \infty,$	$r_{ji} = f_{ij}$

A többi él kapacitása legyen 0.

Keressünk maximális folyamot az előbb definiált hálózatban. Legyen a maximális folyam  $g$  a minimális vágás  $(S, T)$ .

Legyen  $f^* = g + f$ . A kapacitások megválasztása miatt  $f^*$  továbbra is megfelel az optimalitási kritériumoknak.

<sup>2</sup> Hurokmentes hálóban ez a leghosszabb átfutási időhöz tartozó minimális költségű megoldás. Ha a hálóban hurok van, nem biztos, hogy ez a leghosszabb átfutási időhöz tartozó megoldás.

<sup>3</sup> Az így kialakított szabad kapacitás hálózatban csak a minden egyes algoritmus lépésnek megfelelő folyamnövekményeket ábrázoljuk. Ez egy úgynevezett „residual network”.

Ha  $g$  végtelen, akkor van olyan út  $s$ -ből  $t$ -be, amelyen minden él vagy az  $A_{III}$  vagy az  $A_V$  csoportba tartozik, tehát azon az úton minden  $\tau_{ij} = a_{ij}$ , így  $p$  a legkisebb érték (átfutási idő) amelyre a feladat megoldható.

Ha  $g$  véges, akkor a vágásban lévő élek telítettek, azaz a vágásban vagy  $f_{ij}^* = 0$  vagy  $f_{ij}^* = c_{ij}$  ahol  $ij \in (S, T)$ . A vágásban csak  $A_I$ ,  $A_{II}$ ,  $A_{IV}$  típusú élek lehetnek, mert ezek kapacitása korlátos. A vágásban visszafelé bármilyen kapacitású él lehet. Vizsgáljuk meg a folyamainformációk segítségével, hogy a vágásban lévő és a vágásban visszafelé lévő élek milyen élcsoportba kerülhetnek az optimalitási kritériumok betartásával, ha változnak a  $T$  halmazban a potenciál értékek.

Ekkor egy élen a folyam vagy 0 vagy  $c$ .

Vágásban lévő élek  $i \in S, j \in T, ij \in A$ .

Vágásban lévő élek  $i \in S, j \in T, ij \in A$ .

**$A_I$**  ( $f_{ij}^* = 0$ ): a maximális csökkenés tetszőleges  $c$ -re, minden vágásban lévő  $A_I$  típusú élt figyelembe véve  $\delta_1 = \min_{\substack{i \in S, j \in T \\ ij \in A_I}} (\mu_j - \mu_i - b_{ij})$

**$A_{II}, A_{IV}$**  ( $f_{ij}^* = c_{ij}$ ): a maximális csökkenés  $\delta_2 = \min_{\substack{i \in S, j \in T \\ ij \in A_{II}}} (\mu_j - \mu_i - a_{ij})$ .

A vágásban visszafelé bármilyen él lehet. Ekkor  $i \in T, j \in S, ij \in A$  és a potenciálértékek a következőképpen változnak.

**$A_I, A_{IV}$**  vagy  **$A_V$**  típusú élek estén a csökkenés tetszőleges nagy lehet.

**$A_{II}, A_{III}$**  élek esetén a maximális csökkenés tetszőleges  $c$ -re  $\delta_{v2} = \min_{\substack{i \in T, j \in S \\ ij \in A_{II} \vee A_{III}}} (b_{ij} - \mu_j + \mu_i)$ .

A  $(t,s)$  él az algoritmus folyamán mindig visszafelé menő  **$A_{III}$**  típusú él lesz a vágásban. A maximális csökkentés a  $(t,s)$  élen:  $b_{ts} - \mu_s + \mu_t = 0 - 0 + p$ .

Most csökkentjük a potenciálértékeket úgy, hogy a folyamértékek változatlanok maradnak és az optimalitási kritérium továbbra is teljesül.

$$\delta := \min(\delta_1, \delta_2, \delta_4, \delta_{v2}, \delta_{v3})$$

ahol  $\delta$  biztosan pozitív mennyiség.

Legyenek az új potenciál értékek a következők szerint megválasztva.

$$\mu_i^* = \mu_i, \text{ ha } i \in S,$$

$$\mu_i^* = \mu_i - \lambda, \text{ ha } i \in T,$$

$$\text{ahol } \lambda = 0, 1, 2, \dots, \delta$$

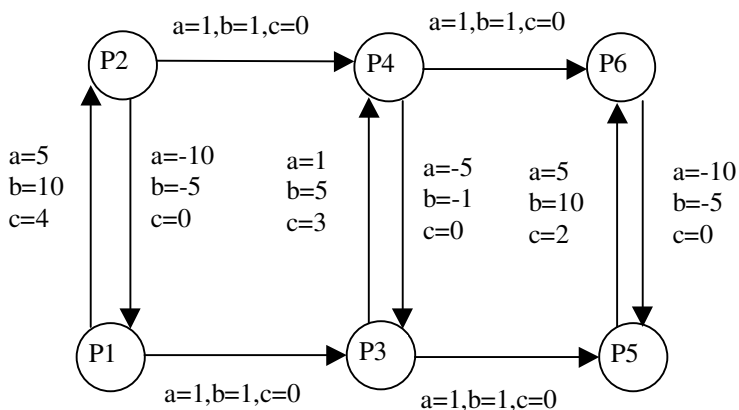
$$\text{illetve } \tau_{ij}^* := \min[\mu_j - \mu_i, b_{ij}].$$

A  $\mu^*, \tau^*, f^*$  értékek az optimalitási kritériumot kielégítik.

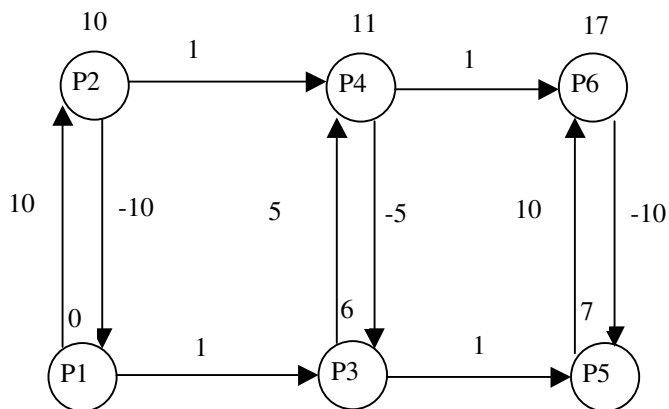
Ezzel a bizonyítást befejeztük.

**Példa**

1. Példa: Határozzuk meg az alábbi tervütem hálón minden lehetséges átfutási időre a minimális költségű megoldást.



Kiinduló megoldás



$f=0$  minden élre.

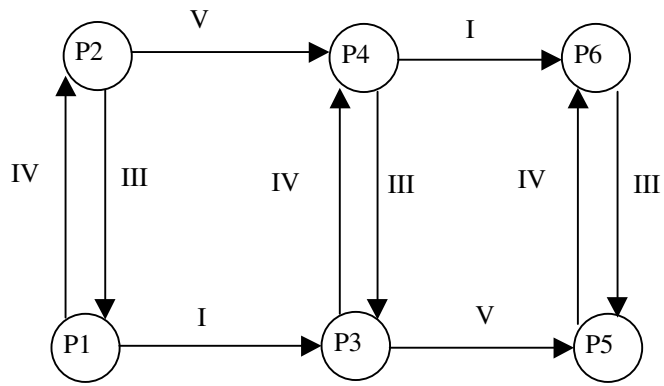
Primál célfüggvény értéke:

$$\sum_{ij \in A} c_{ij} \tau_{ij} = c_{12} \tau_{12} + c_{34} \tau_{34} + c_{56} \tau_{56} = 40 + 15 + 20 = 75.$$

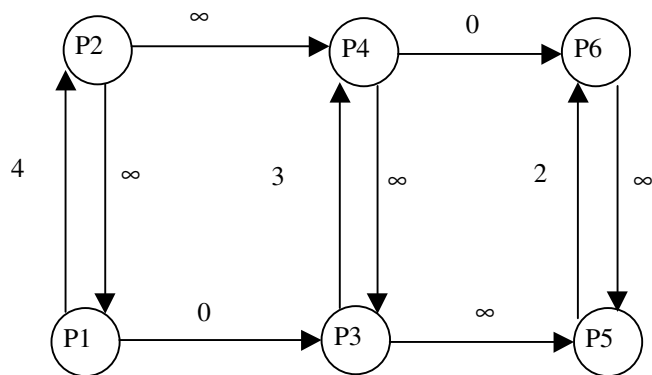
A duál célfüggvény értéke:

$$pv + (c_{12} - f_{12})b_{12} + (c_{34} - f_{34})b_{34} + (c_{56} - f_{56})b_{56} = 0 + 40 + 15 + 20 = 75$$

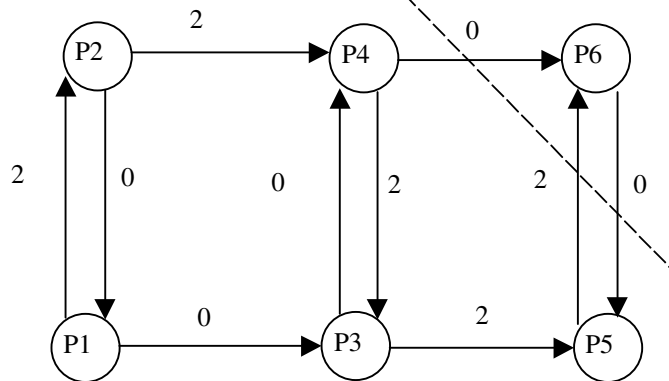
Élek osztályozása



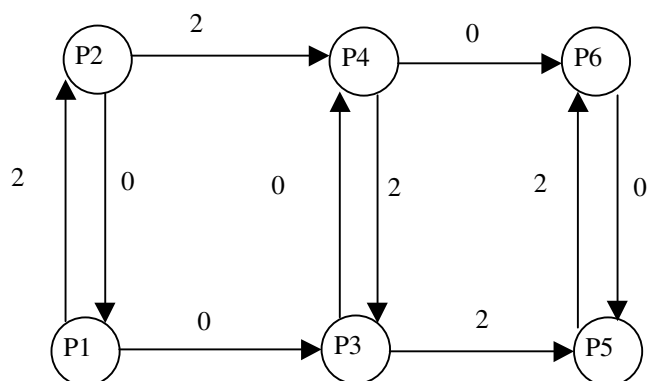
szabad kapacitás hálózat



g maximális folyam, minimális vágás



f\* folyam



$$\delta_{46} = 17 - 11 - 1 = 5$$

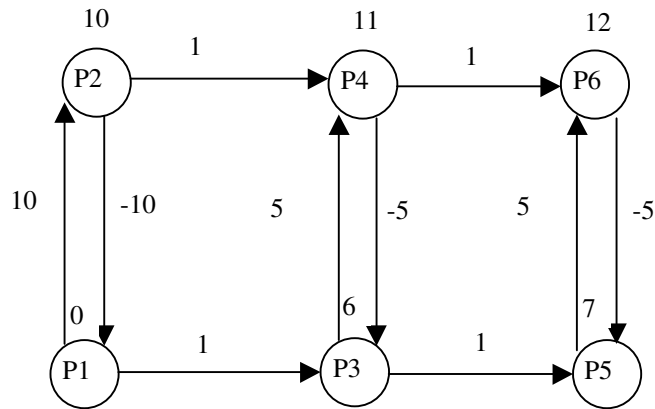
$$\delta_{56} = 17 - 7 - 5 = 5$$

a vágásban visszafelé

$$\delta_{65} = -5 - 7 + 17 = 5$$

$$\delta = 5$$

Az új potenciál értékek és tevékenységidők



Primál célfüggvény értéke:

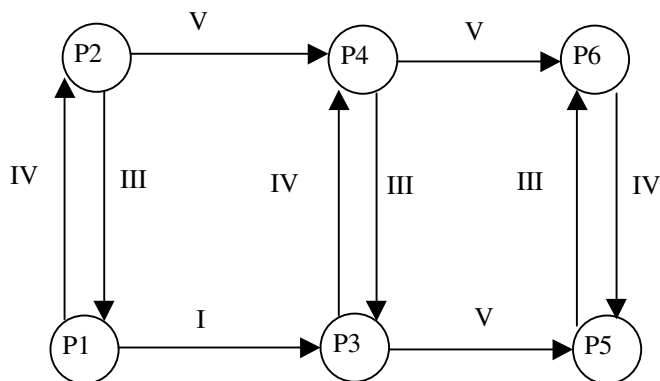
$$\sum_{ij \in A} c_{ij} \tau_{ij} = c_{12} \tau_{12} + c_{34} \tau_{34} + c_{56} \tau_{56} = 40 + 15 + 10 = 65 .$$

A duál célfüggvény értéke:

$$p v + (c_{12} - f_{12}) b_{12} + (c_{34} - f_{34}) b_{34} - (f_{24} - c_{24}) a_{24} - (f_{43} - c_{43}) a_{43} - (f_{35} - c_{35}) a_{35} = 24 + 20 + 15 - 2 + 10 - 2 = 65$$

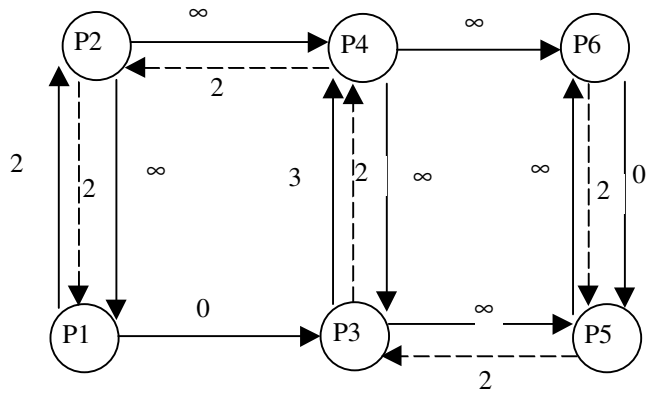
2. iterációs lépés

Élek osztályozása (csak a vágásban lévő élek változhattak !)

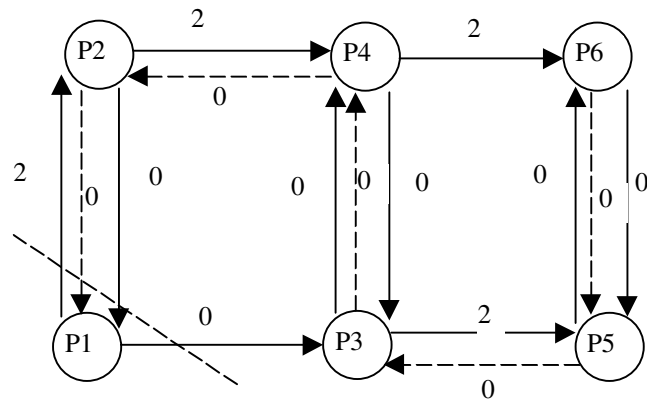


szabad kapacitás hálózat (szaggatott vonallal jelöltem a csak a folyamatszámításhoz szükséges éleket)

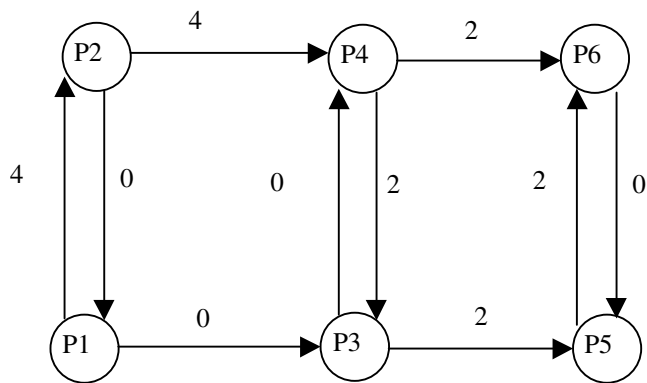




g maximális folyam, minimális vágás (több lehetőség közül tetszés szerint választottam)



f\* folyam



$$\delta_{12} = 10 - 0 - 5 = 5$$

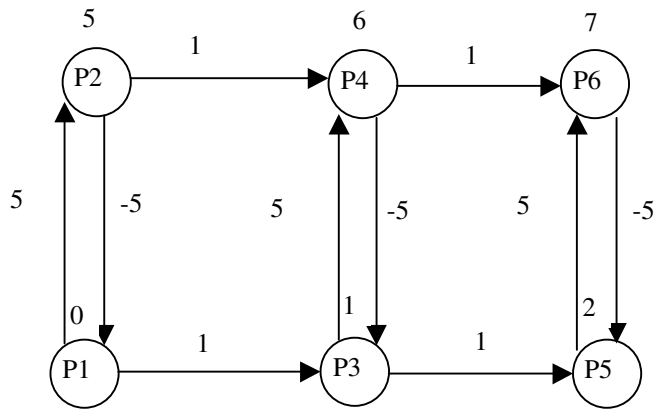
$$\delta_{13} = 6 - 0 - 1 = 5$$

a vágásban visszafelé

$$\delta_{21} = -5 - 0 + 10 = 5$$

$$\delta = 5$$

az új potenciál értékek és tevékenység idők



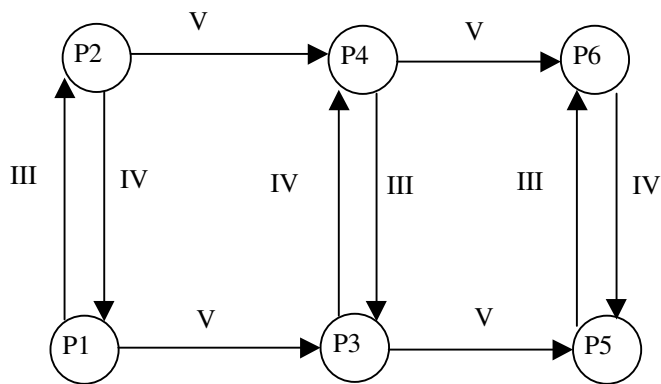
$$\sum_{ij \in A} c_{ij} \tau_{ij} = c_{12} \tau_{12} + c_{34} \tau_{34} + c_{56} \tau_{56} = 20 + 15 + 10 = 45.$$

A duál célfüggvény értéke:

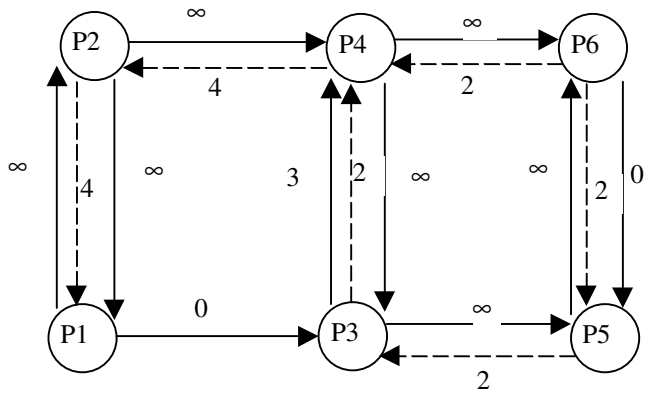
$$pV + (c_{34} - f_{34})b_{34} - (f_{24} - c_{24})a_{24} - (f_{43} - c_{43})a_{43} - (f_{46} - c_{46})a_{46} - (f_{35} - c_{35})a_{35} = 28 + 15 - 4 + 10 - 2 - 2 = 45$$

3. iteráció

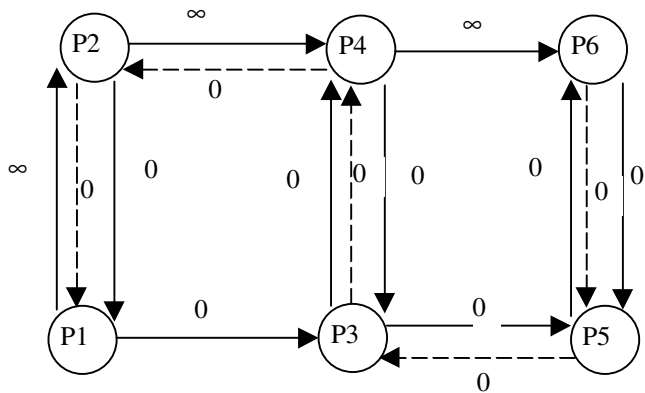
Élek osztályozása (csak a vágásban lévő élek változhattak !)



szabad kapacitás hálózat (szaggatott vonallal jelöltem a csak a folyamatszámításhoz szükséges éleket)

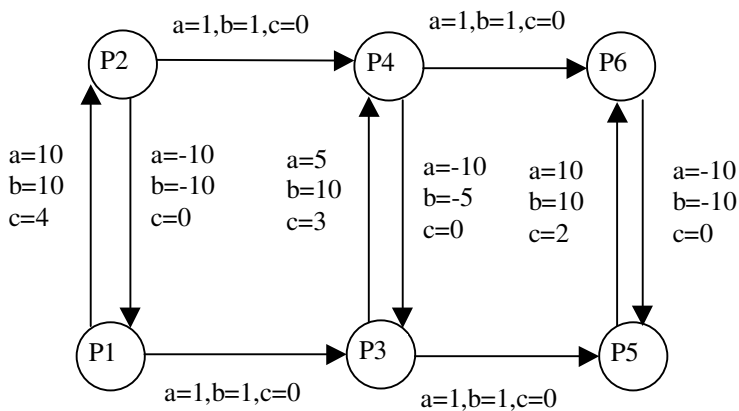


g maximális folyam, minimális vágás (több lehetőség közül tetszés szerint választottam)

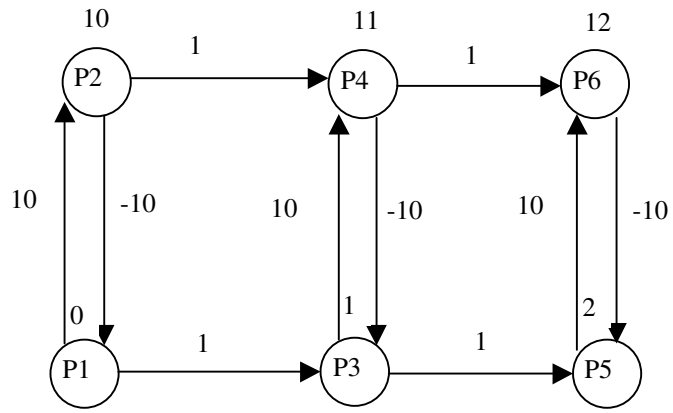


Mivel a maximális folyam végtelen, ezért algoritmusunk leáll. 7 nap az elérhető legrövidebb átfutási idő.

2. Példa: Határozzuk meg az alábbi tervütem hálón a minden lehetséges átfutási időre a minimális költségű megoldást.



Kiinduló megoldás



Élek osztályozása

