

"Kötetlenül"

a

Hálós Időtervezési Technikákról

Dr. Vattai Zoltán András
BME Építéskivitelezési Tszk.

utolsó frissítés: 2007.05.27.

TARTALOM

Előszó

Bevezetés

- A – Gráftechnikai alapfogalmak
- B – Leghosszabb út – minimális potenciál
- C – CPM/PERT hálószerkesztés
- D – Időparaméterek, időelemzési alapfogalmak
- E – A CPM^{time} modell
- F – A PERT^{time} modell
- G – Maximális folyam – minimális vágás
- H – A CPM^{cost} modell
- I – Az MPM/PDM modell
- J – Valamennyi közül a leghosszabb út
- K – A Floyd-Warshall algoritmus
- L – A GTM modell

Az időterv

Erőforrás allokáció

Nyomon követés, aktualizálás

Végszó

Irodalomjegyzék

Mellékletek:

Hasznos olvasmányok szabadidő esetére

Magyar-Angol szószedet

Változások jegyzéke

ELŐSZÓ

Ha hálós ütemtervekről, vagy tervütem-hálókról esik szó, akaratlanul is három élményem jut eszembe.

Az első egy egyetemi kollégához fűződik, akivel egy több tanszék által közösen oktatott kurzus tervezetét egyeztetjük. „Á! Hálós ütemterv!” – kiáltott fel – „Emlékszem! Hogy azt hogy utáltuk!” De mit lehet egy *ábrázolási módon* utálni? Különösen annak tükrében, hogy ugyanez a kolléga a következő percben már szélesen gesztikulálva, alakzatokat rajzolva a levegőbe, elrendezve az asztalon talált tárgyakat mesélte el legutóbbi, sikerrel végrehajtott feladatát.

A második egy több évtizedes tapasztalattal bíró építésvezetőhöz kötődik, aki egy durván alábecsült időtartamú (helyesebben tévesen szerződött) nagy önkormányzati beruházás kapcsán kérte a segítségünket. Hosszan mesélte a beruházás körülményeit, az önkormányzat által késlekedve aláírt szerződést, a feladat érdekességét, stb., meg hogy igazából az önkormányzattal folyó határidő-korrekciós tárgyalásokhoz, érvként kell neki az ütemterv, de az sem baj, ha közvetlenül használni is tudják. Mikor azonban – mintegy összefoglalásként – rákérdeztünk „Jó! Mi az, amit kritikusként szeretnétek feltüntetni?”, majdnem a széke mellett fogalt helyet kávé-kínáló mozdulatából. „Hogyan? Azt így is lehet?” De hát, nem mi modellezünk? Nem mi magunk *fogalmazzuk meg* a megoldandó problémát?

A harmadik élmény viszont nem egy személyhez, inkább személyes interjúkhoz kapcsolódik. Ipari felkéréseknél bevált gyakorlatunk, hogy az előzetesen elkészült logikai vázat a kivitelezésben ténylegesen résztvevő munkacsoportok képviselőivel pontosítjuk, tökéletesítjük. Az ilyen találkozók során kifaggatjuk – mintegy meginterjúvoljuk – őket az általuk végzendő feladatrész sajátosságairól, feltételeiről, figyelembe veendő szempontokról, stb.. Tökéletesen le tudják írni (helyesebben el tudják mesélni) feladat-részük úgymond *operatív környezetét*. De amikor ahhoz a kérdéshez érünk: „Na jó, akkor most mondjátok meg, szerintetek mennyi időbe telik ez nektek!”, az maga a vég. Teljes csend, vagy jó esetben: „Hát az attól függ. Ki tudja? Kérdezzük a főnököt! A múltkor is...”, stb.. (Nyilván nem akarnak alku-hátrányba, vagy ellentmondásba kerülni a kialkudott – vagy éppen diktált – szerződéses feltételekkel.) De hát, miért kellene nekik egyetlen, szent, kőbe vésett értéket mondaniuk? A hálós modellben pont az a szép, hogy, ha a logikai váz jó, elviseli a kezdeti kisebb tévedéseket, és előre jelzi, ha baj van. És azt is, hogy hol a baj.

Lehet, hogy ebben mi oktatók is ludasok vagyunk. Túlon túl misztifikált a háló, avagy túlon túl tudományoskodó, vagy éppen szűkszavú annak leírása a tankönyvekben. Lehet, hogy a munkahelyen kevés az a partner, akivel ezen a nyelven (is) lehet kommunikálni. De egyáltalán: Bizonyos, hogy elsődlegesen a végrehajtás helyszínére szánt dolog ez a technika? Egyáltalán: Ütemterv a háló?

Nos, ilyen előzetes gondolatok közepette kezdtünk bele a már régen elhatározott könyv (fejezet) írásába. Elsődlegesen a gyakorlati megfontolásokra, lehetőségekre koncentrálna. Nem feledve, persze, a szigorúan elméleti kérdéseket sem, de esetenként inkább csak utalva rájuk, hiszen e témakörben már számtalan tudományos munka, könyv, dolgozat, cikk, szoftver, stb. született, melyeket sokan (köztük mi magunk is) sok helyen követtek már el. Szeretnénk eleve oldani az esetleges misztikus ködöt. Megfogható, sőt – eredeti célunknak megfelelően – képességbeli közelségbe hozni az olvasóhoz a hálós időmodellezési technikát, hogy szakmai, gyakorlati munkája során magabiztosan tudjon bánni ezzel az értő kezekben kifinomult, beszédes, leíró nyelvvel.

Magam részéről az előadások során szoktam új hallgatóimnak mondani, hogy ne higgyenek nekem! Lássák be(!), hogy igazam van! Ha nem megy, akkor kérdezzenek! A következőkben felvezetésre kerülő ismeretek tárgyalása során gyakran fog az olvasó záró-, avagy gondolatjelek közötti, vagy éppen idézőjelbe tett megfogalmazásokkal, terminusokkal találkozni, melyek alapvetően a szokásos egyéb szóhasználatok bemutatását, a dolgok más összefüggésekben történő megvilágítását, illetve – remélhetőleg – jobb megértését szolgálják. Bízom benne, hogy ez a szóbeli előadásoknál bevált, szuggesztív előadásmód, nem lesz zavaró írott formában sem. Ha pedig túltúl szájbarágósnak tűnik a dolog, az nem baj. Az csak azt jelzi, hogy az olvasó első olvasatra is megértette a közvetíteni szántakat.

Ajánljuk e könyvet (fejezetet) azoknak, akik még nem tanultak a hálós időmodellekről, de valamilyen oknál fogva az felkeltette az érdeklődésüket. Ajánljuk azoknak is, akik már tanultak róla, talán már dolgoztak is vele, de szeretnének magabiztosabb közelségbe kerülni az ilyen típusú eszközök által nyújtott szolgáltatásokhoz. És végül – de nem utolsó sorban – ajánljuk azoknak, akik valamilyen felsőbb kényszer miatt kénytelenek elsajátítani ezt a nyelvezetet, vagy egyszerűen valamely iskola, egyetem diákjai, és valamely tantárgy-tematika előírja azt a számukra.

Tekintve, hogy a következőkben a hálós időmodellek kapcsán viszonylag sok mindenről esik szó, valamint igazodva az eredetileg szándékozott egyetemi oktatási segédletként történő felhasználáshoz, az egyes fejezeteknél (olykor csak bekezdéseknél) a jobb margón szürke nagybetűkkel jelöltük meg az egyetemi képzés különböző szintjein elvárható mélységű ismereteket. Ezek szerint:

- *H* : Háttér-információ, az általános intelligenciát szolgáló ismeretek;
- *B* : Bachelor (B.Sc.), alafokon elvárható ismeretek;
- *M* : Master (M.Sc.), mesterfokon elvárható ismeretek;
- *P* : Philosopher (Ph.D.), a témakör iránt tudományosan érdeklődőktől elvárható ismeretek.

Az előrebecsátott gondolatok lezárásaként tartozunk még a címben szereplő „kötetlenség” magyarázatával: A következő oldalakon tárgyalásra kerülő ismeretek olvasása (bízást: elsajátítása) során az olvasó tapasztalni fogja, hogy e könyv (fejezet) stílusában, szerkesztésében „fegyelmezetlenebb”, mint, ami egy hagyományos (tan)könyvtől, avagy jegyzettől elvárható. Nincsenek például „hivatkozható” ábra- és képlet-azonosító feliratok. Vannak viszont „szószátyárabb”, alternatív megfogalmazások, stb.. Másrészt, eredeti szándékaink szerint e könyv (fejezet) az INTERNET-en elérhető „elektronikus jegyzetként” kerül publikálásra - következőképp ... „nincs bekötve”. ☺

És még valami: Tekintve, hogy „az ördög (így a ~nyomda~ ördöge sem) nem alszik”, valamint a szerző(k) sem tévedhetetlen(ek), sőt a források között is olykor pontatlan, avagy eltérő információk is fellelhetők (remélem ezen utóbbiak közül kevésnek a nyomára lehet bukkanni a következőkben foglaltak olvasása során), örömmel vesszük, ha olvasóink az esetleg előforduló hibákra, tévedésekre, avagy pontatlanságokra, de akár hiányokra, vagy általuk javasolt eltérő szerkesztési megoldásokra felhívják a figyelmünket.

Budapest, 2007

Dr. Vattai Zoltán András

BME Építéskivitelezési Tanszék
1111 Műegyetem rkp 3. K.II.17.
E-mail: zvattai@ekt.bme.hu
admin@ekt.bme.hu

® Jelen könyvben (fejezetben), mint oktatási háttéranyagban közölt ábrák, táblázatok és írások közvetlen oktatási, tanulási célokra szabadon-, egyéb célokra szabatos hivatkozás mellett, korlátozás nélkül felhasználhatók.

BEVEZETÉS

A hálós időtervezési technikák fejlődésének története – mint a technika- és tudománytörténet számos eredményének fejlődéstörténete – összeforr a haditechnika és a fegyverkezés történeti fejlődésével. Magának az operációkutatásnak – az alkalmazott matematikai eszközök egy később a matematikán belül önálló tudományterületté váló csoportjának, melyen belül a hálós időtervezési technikák is kifejlődtek – a története a II. Világháborúhoz kötődik, mikor is a tudomány mintegy korszerű önálló „fegyvernem” jelent meg a nagyszabású (kontinens-közi) hadműveletek tervezésében, előkészítésében, végrehajtásában és értékelésében.

(Innen az elnevezés: *Operation Research* = Operáció Kutatás, értsd: hadműveleti kutatás.)

Az alkalmazott tudomány a háborús évek után az azt követő pszichológiai hadviselés (értsd: a Hiedegháború) korszakában is megmaradt az elsősorú stratégiai fegyverek között és töltött be meghatározó szerepet a „modernkori” hadviselés technika-történetében. (Lásd: rakéta-programok, nukleáris fegyverek, lézertechnika, INTERNET, GPS, stb.). Igaz, a „vészorszakban” kidolgozott, és azóta is folyamatos fejlődést produkáló ilyen felhasználású matematikai eszközök a közvetlen hadicélú felhasználást követően viszonylag gyorsan beépültek a civil hétköznapokba is, úgyhogy ma már inkább a békésebb *Management Science* (menedzsment tudomány) elnevezéssel illetjük őket. A hálós időmodellek különböző változatai hatékony segédeszközként voltak jelen az amerikai haditengerészet nukleáris arzenáljának kifejlesztésénél (Polaris Program, PERT, 1958-71), évszázados múlttal bíró hadi és vegyi-anyag gyártó vállalat beruházásainál (du Pont, CPM, 1957). De jelen voltak Európában atomerőmű (Franciaország, PM, 1960) és olimpiai stadion (Németország, München, MPM, 1972) építésénél is – hogy csak a korai alkalmazások néhány legnevesebbjét említsük.

Fejlődésüket és elterjedésüket igen nagymértékben befolyásolta a bonyolult, illetve nagy volumenű feladatok, vállalkozások egyre fürgébb és okosabb szellemi segéd munkásainak, a számítógépeknek, illetve számítástechnikai eszközöknek a fejlődése is. Szorosan a számítástechnikai piachoz kötődően fejlesztette ki az IBM cég PDM elnevezésű módszerét (1972, lásd később), és célzott egyetemi (MIT) kutatásokból nőtte ki magát világhírű szoftverre – és etalonná – az amerikai PRIMAVERA programrendszer. Míg végül a tudomány és a *számítástechnika* túl nem lép rajtuk, vagy mint egyszerű alkotórészeket, opcionális eszközöket, vagy mint szimpla matematikai műveleteket (mint amilyen – mondjuk – az integrálás, vagy a deriválás) be nem építi az egyre összetettebb szakértői, avagy *szimulációs* rendszerekbe.

Mielőtt belekezdenénk a hálós időmodellek különböző változatainak, egyáltalán fogalmának tárgyalásába, a félreértések és naiv várakozások elkerülése végett fontos néhány alapvetést, megállapítást előre bocsátanunk:

- A hálós időtervezési technikák sajátos nyelvezetű *modellek*. Sem részeikben, sem egészükben „fetisizálni” nem szabad őket. A háló belső összefüggései, a kiindulási és az eredményül kapott számszerű eredmények, és például maga a „kritikus út” sem a modellezett projekt belső összefüggései, számszerű eredményei és kritikus útja, hanem egy többé-kevésbé helytálló leképezésé, modellé, amelyet egy projekt kapcsán a feladatok megoldásának elősegítésére mi magunk alkotunk. A megalkotott modell pedig vagy helytálló (törekvés), vagy nem (képeség). Ezek a technikák sem tudnak többet, mint alkalmazóik. Minden adat és eredmény észszerű fenntartással kezelendő. Nem jó a túlzott óvatosság, de a túlzott magabiztosság sem – még rutinos „hálókezelők” esetében sem. Egyrészt a modell által jelzett bizonytalanság, avagy bizonyosság nem biztos, hogy a projekt bizonytalansága, avagy bizonyossága, de lehet, hogy csak a modellé. Másrészt a számok ritkán hazudnak. ...

- Nem maga a hálós időmodell a produktum, nem az a lényeg, hanem a hozzá vezető út. Megalkotása során a tervezők, döntéshozók olyan kérdések megválaszolására és olyan mélységű, a dolgokat összefüggéseikben kezelő elemzésekre kényszerülnek, melyek segítik feltárni a modellezett projekt esetleges kockázatos pontjait, ok-okozati viszonyait, hatásmechanizmusát. A számítástechnikában nem az a szépség, hogy helyettünk rajzol meg egy objektumot, avagy végez el nagy tömegű számításokat, hanem az, hogy szellemi kapacitásainkat – a rutinfeladatoktól felszabadítván – *változatok* sokaságának több szempontból történő vizsgálatára összpontosíthatjuk.
- Aki egy családi ház építésére hálós ütemtervet készít, megérdemli. A hálós időmodellek előnyei alapvetően nagyméretű, összetett feladatok modellezésénél, vagy a modell nagy tömegű (gyakori, ismételt, avagy tipizált) felhasználásánál érvényesülnek. Elsődlegesen a belső összefüggésekre koncentrálnak. Úgy mondjuk, hogy egy jó hálós időmodell legfőbb erénye az *állékonysága*. A számszerű időadatok több-kevesebb változása sem borítja fel a modell- és a modellezett jelenség logikáját, miközben helyesen jelzi az esetleges változások, változtatások tovagyrúzó hatásait (*dinamikus időmodell*). Ebből adódóan az alkotórészek (tevékenységek, folyamatok) időbecslésének problémáját magától a hálós időelemzéstől csaknem függetlenül kezelhetjük.
- Végül – egy általános félreértés okán: A hálós időmodellek *nem ütemtervek*. (Ebből a szempontból hibás a közkeletű „hálós ütemterv” elnevezés.) A hálós modellek alkalmazásával alapvetően a majdani tényleges ütemtervek kialakításának (a megfogalmazott belső összefüggések, korlátozások rendszerét kielégítő, azzal ellentmondásba nem kerülő) *kereteit* tudjuk előállítani. A számtalan szóba jöhető ütemterv változathoz pedig majd az egyéb szempontok alapján is kedvezőnek (vagy alkalmasnak) ítélt kerül majd a szerződésbe és válik a megvalósítás elsőszámú támpontjává. Ebből adódóan alapvetően a *tervezés és az ellenőrzés* eszközei.

A *hálós időtervezés* építőiparbeli széleskörű alkalmazását az építőipar jellegzetességei indokolják. E szerint igen nagy mennyiségű – részben idegen, nem saját – erőforrások kerülnek viszonylagosan hosszú időre ideiglenesen lekötésre, miközben a megvalósítás számos jelentős kockázattól terhes és a vállalkozói haszon az igénybevett, vagy csak megmozgatott tőke összes tömegéhez viszonyítva jellemzően igen csekély (erős versenyhelyzet). Ilyen esetekben a körültekintő tervezés, a folyamatos követés, az előrejelzés és a *kockázatkezelés* kiemelt jelentőséggel bír. Nagyobb beruházások esetén akár törvényileg előírtan, de sokszor a finanszírozók (bankok), avagy építetők (beruházók) által megkívánt módon is előtérbe kerül a beruházás hálós időmodellje, melynek helytállósága minden résztvevő elemi érdeke.

A következő fejezetekben olyan hálós időmodellezési technikákat tekintünk át, mint például

- a CPM, amit minden menedzsmenttel foglalkozó szakembernek ismernie szakmai kötelesség,
- a PERT, mely megtanít arra, hogy, ha nem is tudunk semmit, mégis mondhatunk valamit, és az még használható is legyen,
- az MPM, vagy PDM, amit hol így, hol úgy neveznek, sőt egyes szoftvereknél egyszerűen csak *PERT-diagram*ként emlegetnek (alapvetően a rövidítés kifejtésének eredeti olvasatából adódóan), és amely a tevékenységek közötti többszörös és többféle kapcsolat kezelésének lehetőségével a termelésirányítás egyik széles körben elterjedt eszköze, és végül
- az általunk GTM néven referált eszközrendszer, mely elsődlegesen az összes előbbi technika még meglévő korlátainak feloldását, és közös megközelítését célozza.

Mielőtt azonban ezek tárgyalásába kezdhetnénk, fontos néhány alkalmazásra kerülő (gráf-technikai) fogalmat tisztáznunk.

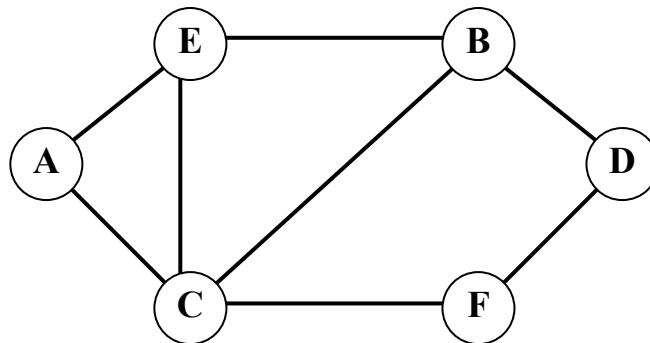
A - GRÁFTECHNIKAI ALAPFOGALMAK

A gráfok *sajátos logikai struktúrák erősen absztrahált kvázi-grafikus leképezései*. E tömör megfogalmazás megértéséhez érdemes azt szavanként értelmezni:

- Olyan *sajátos* struktúrák leképezésére alkalmas, melyekben jól beazonosított összetevőket és közöttük páronként meghatározott kapcsolatok összetett rendszerét modellezzük.
- *Logikai struktúrák* modellezéséről kell beszélnünk, hiszen nem csak fizikai mivoltukban jelenlévő összetevők (gépelemek, települések, stb.), de elvont jelenségek (ok-okozati viszonyok), folyamatok (ipari termelés, gyártás), kategóriák (társadalmi csoportok) adott összefüggéseinek elemzése esetében is használhatók.
- *Erősen absztrahált*, mert igen kevés – a szükséges legkevesebb – építőelem (csomópont, él, súlyszám) igénybevételével ír le akár igen bonyolult és terjedelmes rendszereket.
- *Kvázi-grafikus leképezések*, hiszen a gráf-összefüggések nem csak kétdimenziós grafika formájában, de táblázat, vektorok, és halmazok formájában is megadhatók. A gráf szó önmagában – kétségtelenül – a grafikára utal.

A gráfok elmélete Euler Königsbergi hídjai¹ óta az idők folyamán a matematikán belül önálló tudományterületté nőtte ki magát. Számptalan elméleti és gyakorlati problémát és feladatot fogalmaztak-, majd oldottak meg a segítségükkel. Ezen irdatlan feladat-halmazból csupán kettő² az, melyből – mint sajátos tulajdonságokkal bíró gráfokon értelmezett feladat-analógiából – a hálós időmodellezési, avagy *idő-ütemterv hálós technikák* kibontakoztak és váltak – értő kezek között – hasznos segítséget nyújtó eszközzé.

A matematikai szakirodalomban használatos definíciója szerint: A gráf ($G=graph=gráf$) csomópontok ($N=node=csomó$) és élek ($E=edge=él$) rendezett halmaza ($G=[N,E]$), ahol az élek összerendelt csomópont-párok ($e_i=\{n_1,n_2\},...$).



$$N = \{A,B,C,D,E,F\}$$

$$E = \{\{A,C\}, \{A,E\}, \{B,C\}, \{B,D\}, \{B,E\}, \{C,E\}, \{C,F\}, \{D,F\}\}$$

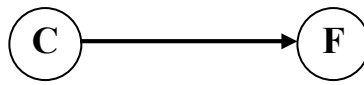
$$G = [N,E]$$

Az időtervezési technikáknál alkalmazott *sajátos tulajdonságokkal* bíró gráfok lehatárolása előtt további gráf-jellemzők és alapfogalmak tisztázására is szükség van:

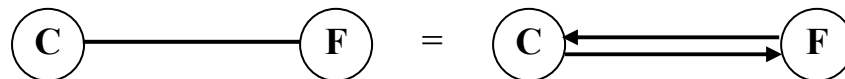
¹ Königsberg (ma Kalinyingrád) lakói a XVIII. Században azzal a kérdéssel fordultak a svájci származású matematikushoz, a szentpétervári akadémia tanárához, Eulerhez, hogy vajon lehet-e a város meglévő hét hídját érintve olyan körsétát bejárni, melynek során minden hídon átmennek egyszer, de csakis egyszer. Nemleges választát Euler be is bizonyította. ...

² A „leghosszabb út” problémája és a „minimális potenciál-rendszer” problémája

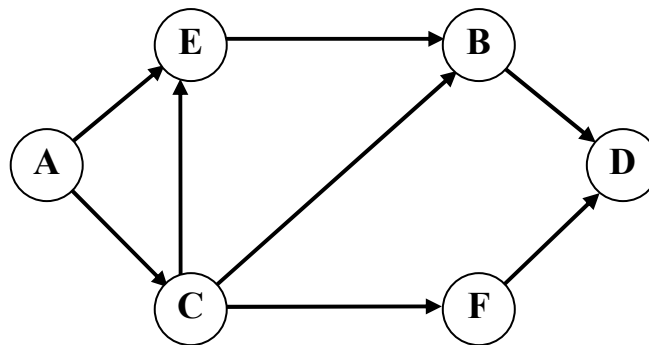
Irányított él: Összerendelt csomópont-pár, melynél az összerendelést (függőséget, logikai kapcsolatot) csak egyik irányban értelmezzük. Az irányított él tipikus grafikus megjelenítése a kapcsolat értelmezésének irányát mutató nyíl a két összerendelt csomópont között.



Az irányított élek csomópont-párjait kerek zárójelek, mint koordináta-párok között szoktuk megadni, ahol az első koordináta a nyíl kezdőpontjára, mint *kiinduló (megelőző) csomópont-ra*, a második pedig végpontjára, mint *cél (követő) csomópont-ra* hivatkozik ($e_i=(n_1,n_2)$). Rögtön érdemes megjegyezni, hogy az irányítatlan élek egyenértékűen helyettesíthetők egy-egy ellentétes irányú irányított él-párral ($\{n_1,n_2\}=(n_1,n_2)+(n_2,n_1)$).



Irányított gráf: Hagyományos értelmezés szerint olyan gráf, melynek minden éle irányított. (Vesd össze a fenti megjegyzéssel!) Az irányított gráfok szakirodalomban gyakori angol (amerikai) eredetű megnevezése: *DiGráf* (*DiGraph=Directed Graph=Irányított Gráf*). Az irányított gráfok *él-halmazát* a továbbiakban – az irányítatlan gráfoktól megkülönböztetendő – „*A*” betűvel (*A=arrow=nyíl*) jelöljük.



$$N = \{A, B, C, D, E, F\}$$

$$A = \{(A, C), (A, E), (C, B), (B, D), (E, B), (C, E), (C, F), (F, D)\}$$

$$G = [N, A]$$

Forrás: Az irányított gráf olyan pontja, mely legalább egy (irányított) élnek kiindulópontja, de egyetlen (irányított) élnek sem végpontja (lásd például: a fentebb bemutatott irányított gráf „A” pontja). A forrás a modellezett jelenségek jellegzetes *kiindulási állapot* reprezentánsa. Jellemzően csak outputtal bír a többi gráf-elem irányában, miközben onnan semmilyen inputot nem fogad. (Tipikus *süket főnök*. Csak mondja a magáét, miközben nem hajlandó meghallgatni senkit.)

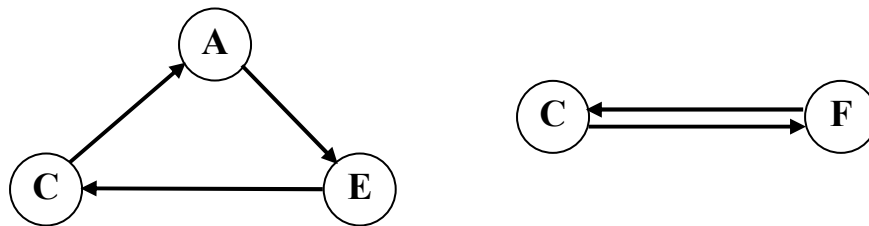
Nyelő: Az irányított gráf olyan pontja, mely legalább egy (irányított) élnek végpontja, de egyetlen (irányított) élnek sem kezdőpontja (lásd például: a fentebb bemutatott irányított gráf „D” pontja). A nyelő a modellezett jelenségek jellegzetes *cél-állapot* reprezentánsa. Jellemzően csak inputot fogad a többi gráf-elem irányából, miközben oda semmilyen outputtal nem bír. (Tipikus *Bólogató János*. Mindent helybenhagy, mindent megcsinál amit mondanak neki, de egy önálló épkézláb kezdeményezése nincs.)

Megjegyzés: Az utóbbi két gráf-elem megnevezésére nincsen egységes gyakorlat a vonatkozó szakirodalomban. A csak kiinduló nyilakkal bíró csomópontot szokták *origin* (=kezdet), a csak beérkező nyilakkal bírókat pedig *terminal* (=záró,vég) névvel referálni. Mi a *folymmodelleknél* használatos elnevezésüket használjuk, megkülönböztetendő az egyes élek kezdő- és végpontjától.

Út: Az irányított gráf egy csomópontjából egy másikba vezető nyíl-folytonos él-láncolat. Az útra szokás „ $P[i,j]$ ” ($P=$ path=út,ösvény) jelöléssel hivatkozni, ahol i a kiindulási csomópontot, j pedig a cél csomópontot jelenti. A jelölés fogyatékosága, hogy adott két pont (i és j) között több nyíl-folytonos él-láncolat létezhet, így ez a jelölés nem egyértelmű, illetve a két pont közötti valamennyi út-változatra vonatkozó hivatkozásként értendő. Egy út egyértelmű megadása az adott él-láncolat által rendre felfűzött csomópontok felsorolásával lehetséges (lásd pl.: az előzőekben bemutatott irányított gráf $P[A,D]=\{A,C,E,B,D\}$ útja). Fontos megkötés az út értelmezésében, hogy az ismétlődő részeket (önmagába záródó él-láncolatokat – lásd: *Hurok*) nem tartalmazhat.

Megjegyzés: Az olyan nyíl-folytonos él-láncolatokat (csomópont-felsorolásokat), melyek akár többszörös ismétlődéseket tartalmaznak, *pálya* névvel referáljuk – többnyire valamilyen mozgás leírásaként. Út nem csak irányított gráfon, de irányítatlan gráfon is értelmezhető hiszen az irányítatlan gráfok értelmezhetők az irányított gráfok speciális – úgy nevezett *szimmetrikus* – eseteként (lásd: fentebb már szereplő megjegyzések). Az irányítatlan gráfon beazonosított (irány kitüntetés nélküli) él-láncolatot a szakirodalom *láncc* (angolul: *chain*) néven emlegeti.

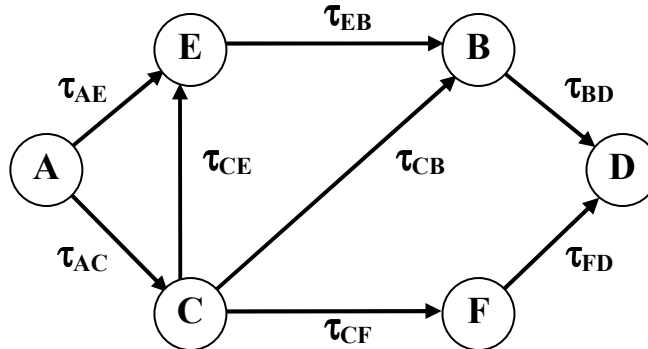
Hurok: Önmagába záródó nyíl-folytonos él-láncolat. A hurok ($L=$ loop=hurok) megadásáról, illetve beazonosításának módjáról gyakorlatilag ugyanazok mondhatók el, mint az út esetében – egyetlen dolgot kivéve: A felfűzött csomópontok felsorolásában egyetlen ismétlődés fordulhat elő: A kiindulási pont megegyezik cél ponttal (lásd: $L[A,A]=\{„A”, „E”, „C”, „A”\}$, lentebb). Némi pongyolással szokták a hurkot *önmagába záródó út*-ként is emlegetni.



Megjegyzések: Az irányítatlan gráf élei önmagukban is hurokként értelmezhetők. A hurkok beazonosításakor az azonos éleket tartalmazó hurkokat egyazon huroknak szokás értelmezni, függetlenül attól, hogy az élek felsorolását melyik csomóponttól kezdjük ($\{A,E,C,A\} \equiv \{E,C,A,E\}$). Hurkok jelenléte a gráf-modellben számos gyakorlati feladat esetében zavaró, avagy ellehetetlenítő hatású lehet, amiért azokat – ott – előzetesen fel kell számolni, illetve kizárni szükséges. A szakirodalom a hurkok-terminológiában sem egységes. Több alkalmazásban hurok alatt olyan *éleket* értenek, melyek kezdő és végpontja ugyanaz (Mi az itt tárgyalásra kerülők vonatkozásában az ilyen élek létét eleve kizárjuk.), míg az önmagába záródó él-láncolatot *cycle* (=ciklus,kör) néven emlegetik.

Súly: A gráf-struktúrához társított, élek mentén értelmezett, számszerű (kvantitatív) jellemzők. Az egyes súly-számok ($W=$ weight=súly) (más szóhasználatban: *paraméterek*), illetve a súlyozott gráf éleinek hivatkozásainál szokás az egyidejűleg az adott ($i \rightarrow j$) él létét is reprezentáló alsó index-páros (pl.: w_{ij} , vagy τ_{ij}) jelölést használni.

Súlyozott gráf: Olyan gráf, melynek valamennyi éle mentén kvantitatív jellemzőket (többnyire konstans egész értékeket) értelmezünk. Itt rögtön meg kell jegyeznünk, hogy több feladat megoldása során szokás a súlyozatlan gráfok éleit egységnyi súllyal ($w_{ij}=1$) ellátni, és (például táblázatokban, lásd később) leképezni. Ilyen formán a súlyozatlan gráfok a súlyozott gráfok speciális esetként értelmezhetők.



$$N = \{A, B, C, D, E, F\}$$

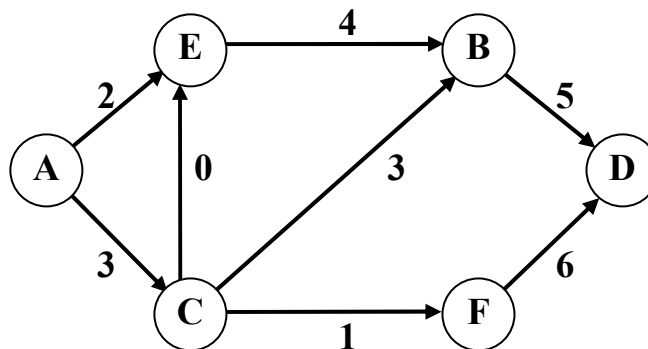
$$A = \{(A, C), (A, E), (C, B), (B, D), (E, B), (C, E), (C, F), (F, D)\}$$

$$\tau = \{ \tau_{AC}, \tau_{AE}, \tau_{CB}, \tau_{BD}, \tau_{EB}, \tau_{CE}, \tau_{CF}, \tau_{FD} \}$$

$$G = [N, A, \tau]$$

A súlyszámok birtokában értelmezhetők a gráfon olyan kvantitatív jellemzők, mint például az **úthossz** ($|P[i, j]|$), vagy **hurokhossz** ($|L[i, i]|$), ami az adott utat, illetve hurkot alkotó élek súlyszámainak összege, avagy a **legrövidebb út**, a **leghosszabb út**, a **maximális folyam**,³ és így tovább...

Hálózat: Definíció szerint a hálózat (angolul: *network*): *súlyozott, irányított, hurokmentes gráf, egyetlen forrással és egyetlen nyelővel, valamint nem-negatív súlyszámokkal.*



Megjegyzés: Az idő-modellezési feladatokhoz használt gráfok korai, hálózatokra történő korlátozásának okai között leginkább a kezdeti számítástechnikai képességeket, és az eleinte használatos *címkezési*- és *mátrix* technikákat sejtethetjük. Az ütemezési technikák fejlődésével – mint később látni fogjuk – a gráf-struktúra illetően megkötései szinte kivétel nélkül feloldhatók, mégis tökéletesen szemléletes és kezelhető gráf-időmodelleket kapunk. A továbbiakban a *hálózat*, illetve *háló* terminusokat sok esetben fogjuk a *gráf* egyszerű szinonimájaként használni.

³ Bővebben lásd: ...

M

Mint az a bevezető gondolatok között már említést nyert, a gráf-összefüggéseket nem csak kétdimenziós grafika, vagy halmazok formájában, de táblázatos és vektoros formában is meg lehet jeleníteni. A gráf leírására használatos táblázatot (mátrixot) súlyozatlan gráf esetén **struktúratáblának**, vagy **adjacenciamátrixnak** nevezzük. Ennek a gráf csomópontjaival azonos számú sora („honnan”) és oszlopa („hova”) értelmezéssel. A táblázat megfelelő cellájában szereplő jel (pl.: +/-), avagy érték (pl.: 0/1) jelzi, hogy adott két pont (sor és oszlop) között adott irányban van-e közvetlen (egyetlen él menti) kapcsolat, vagy nincs. Súlyozott gráf esetében a kapcsolatot maga a súlyszám ($a_{ij}=w_{ij}$), míg annak hiányát valamilyen megkülönböztető, tipikusan a táblázatban fel nem tüntetett, de nem feltétlenül nulla érték (M) jelzi. A súlyozott gráfok táblázatos leképezéseit **paraméteres struktúratáblaként**, vagy egyszerűen **paramétermátrixként** (\underline{A}) szoktuk emlegetni.

A struktúratáblák azonos első- és második indexű celláit (a_{ii}) a tábla (mátrix) **átlójának** nevezzük. Az első- és második indexek felcserélésével beazonosított cellák (a_{ij} és a_{ji}) egymás átlóra **szimmetrikus** párijai. Ez utóbbi két fogalom felhasználásával állítható, hogy az irányítatlan gráfok struktúratáblái az átlóra szimmetrikusak. (Erre utal a *szimmetrikus gráf* elnevezés is.)

Az alábbi táblázatokban a fejezet elején bemutatott gráf, és a legutóbbi, szintén illusztrációként szereplő hálózat leképezését láthatjuk. Az utóbbin (jobb oldali tábla) világosan beazonosítható a *forrás* („A”: nincs megelőző kapcsolata, oszlopa üres, „oda nem vezet semmi”) és a *nyelő* („D”: nincs követő kapcsolata, sora üres, „onnan sehová nem vezet semmi”), az előbbin (bal oldali tábla) pedig a *szimmetria* a szembeűnő.

	A	B	C	D	E	F
A			+		+	
B			+	+	+	
C	+	+			+	+
D		+				+
E	+	+	+			
F			+	+		

	A	B	C	D	E	F
A			3		2	
B				5		
C		3			0	1
D						
E		4				
F				6		

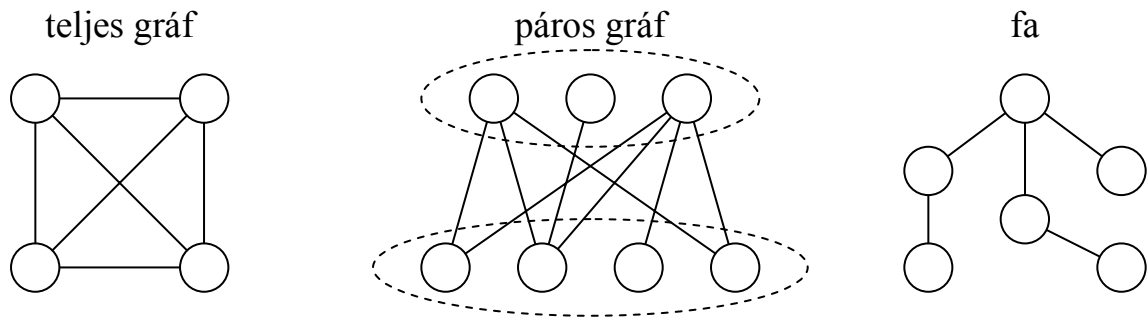
Mint a fenti két illusztratív példából sejthető, a gráfok – de különösen a hálózatok – struktúratáblái meglehetősen „üresek”. A viszonylag terjedelmes táblázatnak viszonylag kevés cellájában szerepel közvetlen kapcsolatot jelző érték. A nagyméretű feladatok és a – kezdetben – erősen korlátos számítástechnikai (operatív memória) kapacitás ellentmondása hívta életre a gráf-információk *vektoros* leképezését, mely kifejezetten a meglévő kapcsolatokra koncentrál. Egy-egy vektor az adott gráf-elemet közvetlenül követő (avagy megelőző) további gráf-elemek felsorolását tartalmazza (lásd lentebb: az irányított gráf definíciójánál bemutatott gráf leképezése). Ez utóbbi felsorolás szélsőséges esetének tekinthető, amikor egy-egy (kötött struktúrájú: *kezdőpont-végpont-súly*) vektor egyetlen kapcsolatra korlátozódik, ami így az *él*-, illetve *súly-halmazok* elemenkénti megadását jelenti.

$$a=\{C,E\}; \quad b=\{D\}; \quad c=\{B,E,F\}; \quad e=\{B\}; \quad f=\{D\}$$

Az élek és csomópontok összefüggései alapján a különböző logikai – és gyakorlati – feladatok számos sajátos gráf-struktúra megkülönböztetését igényelhetik. Ilyen például a **teljes gráf**, melynek minden csomópontja közvetlen éllel kapcsolódik valamennyi másik csomópont-hoz (struktúratáblája *teljesen* kitöltött); a **páros gráf**, melyben a csomópontoknak két világos halmaza különböztethető meg, és minden egyes él kiindulási csomópontja az egyik, végcsomópontja pedig a másik csomópont-halmazból kerül ki (tipikusan a *kijelölési*, illetve *hozzárendelési* feladatoknál alkalmazható), a

P

fa, melyen bármely két csomópont között csak egyetlen út létezik (tipikusan az egymást követő, úgymond *szekvenciális* lépések és/vagy *döntések* segédeszköze), és így tovább...



A gráf-topológiákkal kapcsolatos problémakör a *kiteríthetőség*, avagy a **kiterített gráf** fogalma. Síkban kiteríthető egy gráf, ha úgy megrajzolható, hogy élei nem keresztezik egymást. (Annál „elegánsabb” megjelenésű egy gráf, minél kevesebb éle keresztezi egymást. Lásd a fejezet elején bemutatott gráfot.) Már nem pusztán topológiai kérdés, hogy egy gráf **összefüggő**-e, vagy sem. (Különíthetők-e el olyan gráf-részek, melyek között semmilyen kapcsolat nem létezik?). Ez utóbbi irányítottnak is értelmezhető („Létezik-e út innen ide”) – ami tipikusan a hálózati folyam-modelleknél felmerülő **vágás** fogalmához is elvezet...

A gráfelmélet számtalan további fogalmat kezel, mint például *kör*, *csillag*, *átló*, *rang*, *kifeszítő fa*, *kolorikus szám*, stb., melyek tárgyalásától – értelemszerűen terjedelmi okok miatt, és mert nem kapcsolódnak szorosan a továbbiakban tárgyalandó témákhoz – eltekintünk.

A gráfokon, illetve azok segítségével hasonlóan számtalan elméleti- és gyakorlati feladat fogalmazható- és oldható meg. Az alábbiakban csak a valamilyen vonatkozásban az építési menedzsment témakörében is felmerülő/alkalmazható problémák közül említünk néhányat:

- **Útkeresés:** Létezik-e kapcsolat a gráf adott két pontja között?
- **Összefüggőség (integritás) vizsgálat:** Különíthetők-e el olyan gráf-részek, melyek között semmilyen kapcsolat – él, út – nem létezik?
- **Hurokkeresés:** Található-e az adott irányított gráfon önmagába záródó nyíl-folytonos él-láncolat? Mely élek kiiktatásával számolhatók fel ezek a leghatékonyabban?
- **Dominancia:** Található-e a gráfon olyan csomópont-halmaz, melyből az összes többi csomópont elérhető, avagy amely az összes többi pontból elérhető?
- **Útvariáns számlálás:** Adott hálózaton két adott csomópont között hány darab útvariáns létezik, és az egyes élek hány ilyen útvariánsnak részei?
- **Leghosszabb út / legrövidebb út:** Két adott pont között melyik a leghosszabb/rövidebb út az összes fellelhető útvariáns közül?
- **Súlypont / centrum / átló:** Melyik a gráf azon pontja, melyből az összes többi együttesen (súlypont), vagy a legtávolabbi csomópont is (centrum) a legrövidebb úton elérhető? Hol húzódik és milyen hosszú a gráf csomópontjai közötti legrövidebb utak közül a leghosszabb (átló)?
- **Maximális folyam / minimális vágás:** Két adott csomópont között mennyi a modellezett ellátó hálózat-rész átbocsátó képessége, ha az élek súlyszámai az élek átbocsátó képességének mérőszámai? Ha az növelésre szorul, hol kell beavatkozni?
- **Potenciál feladatok:** Milyen minimális potenciál-rendszer alakítható ki a modellezett feltétel-rendszer figyelembevételével, ha a gráf élei és súlyszámai potenciálkülönbségekre felírt korlátozások?

Az általunk a továbbiakban tárgyalásra kerülő idő-modellezési, ütemezési feladatok a *leghosszabb út* megtalálására, illetve a *potenciál feladatokra* vezethetők vissza ... azokkal képeznek analógiát.

B – LEGHOSSZABB ÚT / MINIMÁLIS POTENCIÁL

Mint az az előzőekben említést nyert, a hálós időmodellek két-, egymással szoros összefüggésben álló, súlyozott irányított gráfon – még pontosabban szólva: *hálózat*on – megfogalmazott feladattal, a *leghosszabb út* megkeresésének-, illetve a *minimális potenciálrendszer* meghatározásának problémájával képeznek analógiát.

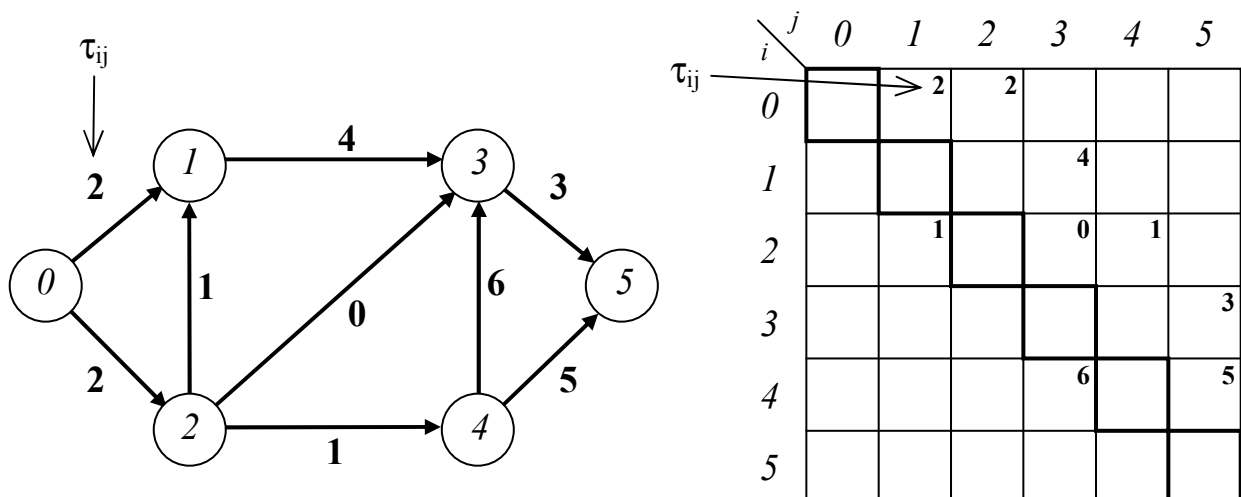
A leghosszabb út analógiája szerint: Adott $G[N,A,\tau]$ súlyozott irányított gráfon két kitüntetett csomópont – rendszerint az egyetlen *forrás* (s) és az egyetlen *nyelő* (t) – között megkeresendő a létező leghosszabb út ($\Sigma \tau_{ij} \rightarrow \max \mid ij \in P[s,t]$).

A minimális potenciálrendszer analógiája szerint: A keresett nem-negatív potenciálok egymáshoz viszonyított relatív különbségeire adott (τ) alsó korlát-rendszer figyelembevételével olyan (π) potenciál-rendszer határozandó meg, melyben a legnagyobb potenciál értéke a lehető legkisebb ($\max \{\pi_i\} \rightarrow \min \mid \pi_i \geq 0 \ \forall i; \ \pi_j - \pi_i \geq \tau_{ij} \ \forall \tau_{ij} \in \tau$).

A feladatok megoldhatóságához hozzátartozik, hogy a gráf pozitív hosszúságú hurkot, illetve a potenciál különbségekre adott korlát-rendszer egymásnak ellentmondó korlátozásokat nem tartalmazhat⁴. Mindkét feladatnak sajátja ugyanakkor, hogy a feladat teljes körű megoldását nem csak egyetlen út, vagy egyetlen potenciálrendszer, de számos változat képezheti. Tekintettel az esetlegesen igen nagy számú szóba jöhető megoldás-változatra, szokás a lehetséges megoldásokat a potenciál feladat esetében a potenciálok szélsőértékeivel (alsó- és felső határértékek), míg az útkeresési feladatnál a valamennyi leghosszabb út élei- és csomópontjai által alkotott rész-gráffal megadni.

A továbbiakban a *minimális potenciálrendszer* meghatározását a gráfon, míg a *leghosszabb út* keresési feladat megoldását a gráf struktúratábláján szemléltetve mutatjuk meg.

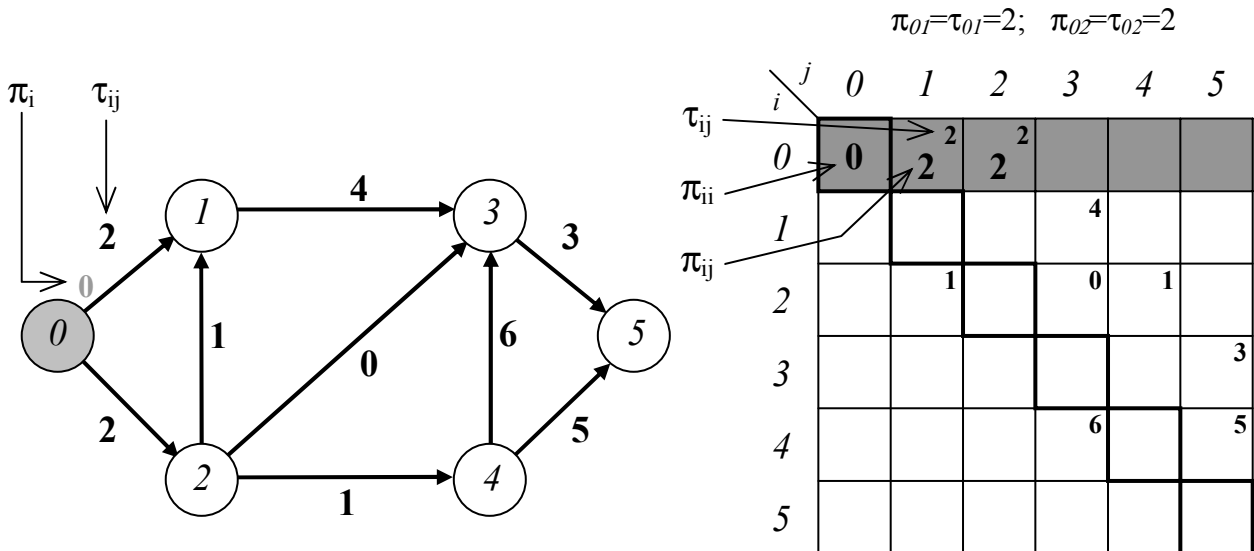
Javasoljuk az olvasónak az alábbi fejezetrész négyszeri elolvasását: Először folyamatos olvasatban, felvezetésként, azután csak a gráfon-, majd csak a táblázatban történtek követésével. Végül pedig ismételtelen folyamatosan, de a számítások, a gráf és a táblázat összevetésével.



⁴ A feltétel a gráf-feladat „hálózat”-okra korlátozásával automatikusan teljesíthető (Lásd: hálózat definíciója). Negatív súlyszámok megengedésével azonban a szigorú lehatárolás lazítható. Így – nem-pozitív hosszúságú – hurkok is megengedhetők, és ugyancsak felmerül a több kezdőpont („forrás”) és több végpont („nyelő”) megengedhetősége is, melyek mellett a feladatok szintén megoldhatók. A potenciál-feladat esetében pedig megfelelően átalakított alsó korlátozásokkal bármilyen értelmű korlátozás elérhető. Ezekre példát a későbbi fejezetek során mutatunk.

1. lépés: A számítások kiinduló pontjának, a *forrásnak*⁵ a beazonosítása és ahhoz a kezdő *zérus* időpotenciál ($\pi_0=0$), illetve *nulla* távolság ($\pi_{00}=0$) rendelése. Ezen értékeket a kiindulási pont (forrás) fölé, illetve a kiindulási pont (forrás) átlóbeli cellájába írunk.

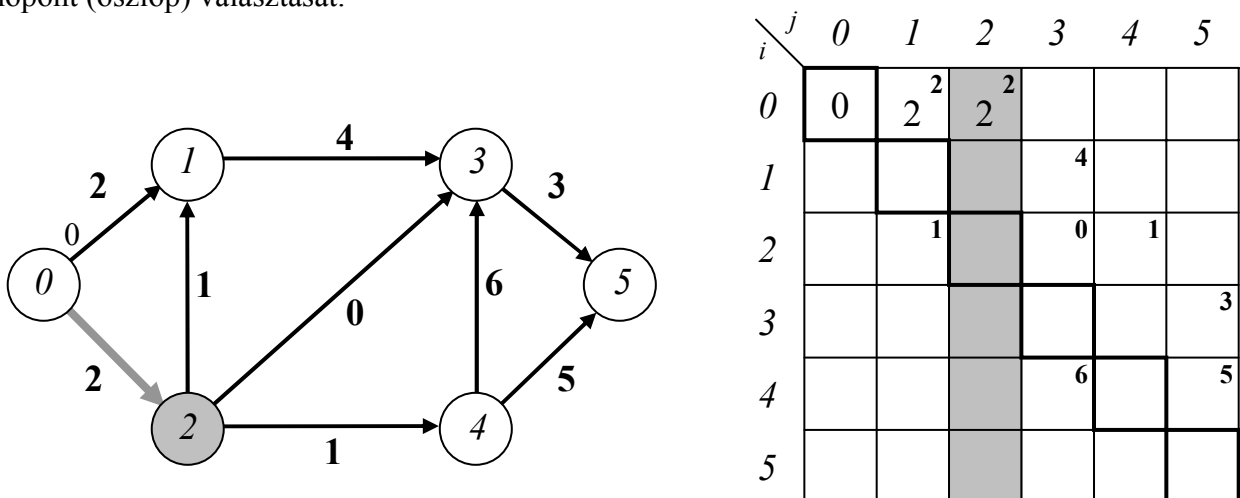
Táblázatos megoldás esetén ezzel egyidejűleg a *forrás* sorában rögzítjük a *forrásból* egyetlen élből álló út mentén elérhető csomópontokba vezető utak hosszát ($\pi_{0j}=\tau_{0j} \mid \tau_{0j} \neq M; j \neq 0$).



2. lépés: Gráf mentén: „Nyíl-irányban”, felgöngyölítő jelleggel haladva, a következő olyan (*j*) csomópont beazonosítása, melynél még nem került sor a legkisebb időpotenciál meghatározására, de amelybe beérkező valamennyi (*ij*) él kiindulópontjánál már igen.

Táblázatos megoldás esetén: Megkeresendő az a „*j*” oszlop, melyben az átló cellája még „üres” ($\pi_{jj}=M$), de az oszlop valamennyi létező élhez tartozó cellájában már szerepel valamilyen (a forrásból az adott csomóponthoz vezető-, és utolsó élként az *ij* élt magába foglaló) leg hosszabb út hosszát jelző érték ($\tau_{ij} \neq M$ és $\pi_{ij} \neq M$). – Azaz, a forrásból az adott „*j*” csomópontba vezető valamennyi útvariánst már megvizsgáltuk.

Esetünkben ez a „2” jelű csomópont (a táblázatban a „2” jelű oszlop). Ha több ilyen van, közülük tetszőlegesen választhatunk, de az algoritmus egyértelműségéért ajánljuk a (leg)kisebb indexű csomópont (oszlop) választását.



⁵ Megjegyzés: Példánkánál csak az egyszerűség – és a hagyomány – kedvéért láttuk el a forrást „0” csomópont-indexszel (a táblázatban ennek a „0” indexű sor-, illetve „0” indexű oszlop felel meg), ami nem követelmény, pusztán didaktikailag indokolható. (Lásd: Gráf-technikai alapfogalmak, forrás és struktúra tábla leírása.)

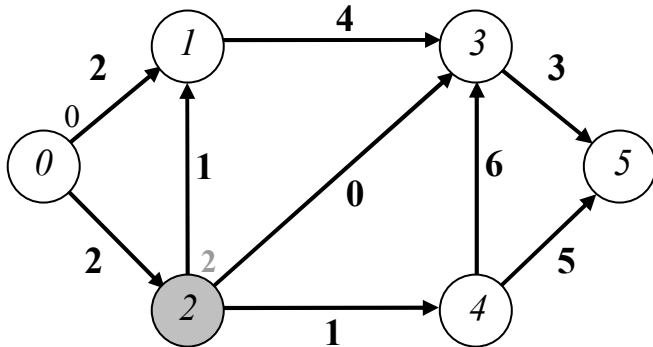
3. lépés: A 2. lépésben beazonosított (j) csomópontokhoz rendelhető legkisebb időpotenciál (π_j) nem más, mint az oda beérkező (ij) élek és súlyszámaik (τ_{ij}) által reprezentált, adott potenciálkülönbségekhez vonatkozó ($\pi_j \geq \pi_i + \tau_{ij}$) alsó korlátozásokat kielégítő legkisebb érték ($\pi_j = \max \{ \pi_i + \tau_{ij} \mid \forall ij \in A \}$), amit a csomópont fölé írva rögzítünk.

Esetünkben egyetlen él mentén: $\pi_2 = \max \{ \pi_0 + \tau_{02} \} = \max \{ 0 + 2 \} = 2$.

Táblázatos megoldás esetén: A 2. lépésben beazonosított j oszlopban található (átlón kívüli) értékek közül a legnagyobb értéket az átlóbeli cellába írva rögzítjük a j pontba vezető leghosszabb út hosszát ($\pi_{jj} = \max_i \{ \pi_{ij} \} \mid \pi_{ij} \neq M; i \neq j$). Ezt rögtön követően a j pont sorában meghatározzuk a j pontot közvetlenül (egyetlen él mentén) követő k pontokhoz a kiindulási pontból (forrásból) a j ponton át vezető leghosszabb utak hosszát ($\pi_{jk} = \pi_{jj} + \tau_{jk} \mid \tau_{jk} \neq M; k \neq j$).

$$\pi_2 = \max \{ 0 + 2 \} = 2$$

$$\pi_{22} = \max \{ 2 \}; \pi_{21} = 2 + 1 = 3; \pi_{23} = 2 + 0 = 2; \pi_{24} = 2 + 1 = 3$$



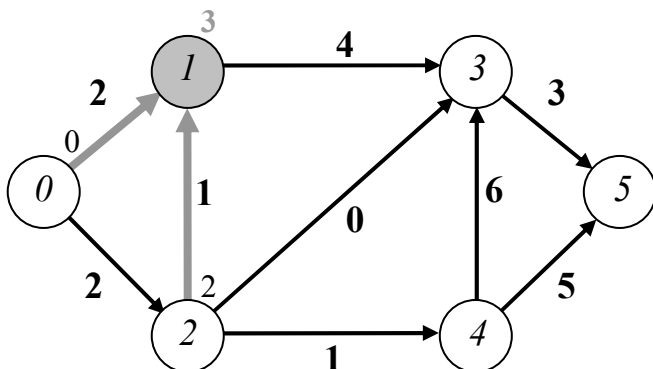
$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5
0	0	2 ²	2 ²			
1				4		
2		3 ¹	2	2 ⁰	3 ¹	
3						3
4				6		5
5						

Követő lépések: A legkisebb időpotenciálok, illetve a forrásból az egyes csomópontokba vezető leghosszabb utak hosszának meghatározása a **2. és 3. lépés** ismétlésével – mintegy „felgöngyöltő” jelleggel – történik mindaddig, míg a számításokkal el nem érjük a célpontot (nyelőt), illetve a táblázatban az átló teljes kitöltésre nem kerül.

Demonstratív példánk megoldását az alábbiakban – további kiegészítő magyarázat nélkül, de – a gráf mentén, illetve a táblázatban eszközöndő számítások szimultán feltüntetésével mutatjuk meg.

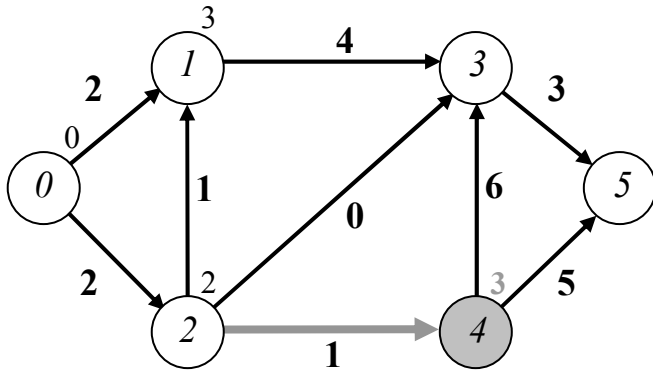
$$\pi_1 = \max \{ \pi_0 + \tau_{01} = 0 + 2 = 2, \pi_2 + \tau_{21} = 2 + 1 = 3 \} = 3$$

$$\pi_{11} = \max \{ \pi_{01} = 2, \pi_{21} = 3 \} = 3; \pi_{13} = \pi_{11} + \tau_{13} = 3 + 4 = 7$$



$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5
0	0	2 ²	2 ²			
1		3		7 ⁴		
2		3 ¹	2	2 ⁰	3 ¹	
3						3
4				6		5
5						

$$\pi_4 = \max \{ \pi_2 + \tau_{24} = 2 + 1 = 3 \} = 3$$

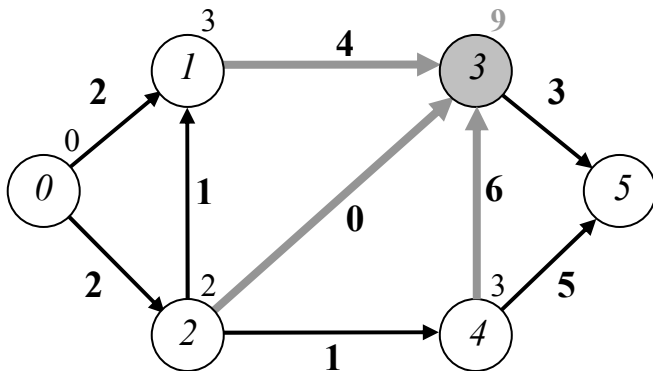


$$\pi_{44} = \max \{ \pi_{24} = 3 \} = 3; \quad \pi_{43} = \pi_{44} + \tau_{43} = 3 + 6 = 9;$$

$$\pi_{45} = \pi_{44} + \tau_{45} = 3 + 5 = 8$$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
0	0	2 ²	2 ²			
1		3		7 ⁴		
2		3 ¹	2	2 ⁰	3 ¹	
3						3
4				9 ⁶	3	8 ⁵
5						

$$\pi_3 = \max \{ \pi_1 + \tau_{13} = 3 + 4 = 7, \pi_2 + \tau_{23} = 2 + 0 = 2, \pi_4 + \tau_{43} = 3 + 6 = 9 \} = 9$$

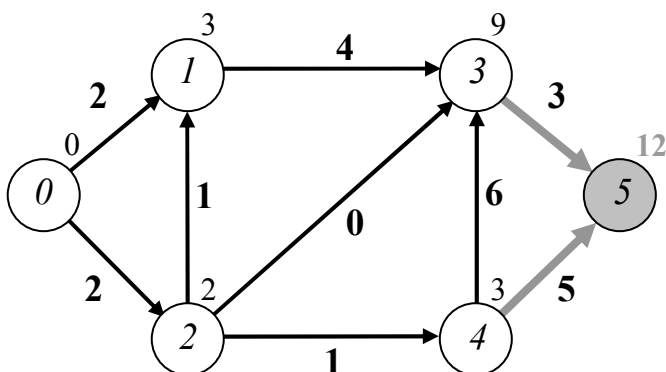


$$\pi_{33} = \max \{ \pi_{13} = 7, \pi_{23} = 2, \pi_{43} = 9 \} = 9;$$

$$\pi_{35} = \pi_{33} + \tau_{35} = 9 + 3 = 12$$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
0	0	2 ²	2 ²			
1		3		7 ⁴		
2		3 ¹	2	2 ⁰	3 ¹	
3				9		12 ³
4				9 ⁶	3	8 ⁵
5						

$$\pi_5 = \max \{ \pi_3 + \tau_{35} = 9 + 3 = 12, \pi_4 + \tau_{45} = 3 + 5 = 8 \} = 12$$



$$\pi_{55} = \max \{ \pi_{35} = 12, \pi_{45} = 8 \} = 12$$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
0	0	2 ²	2 ²			
1		3		7 ⁴		
2		3 ¹	2	2 ⁰	3 ¹	
3				9		12 ³
4				9 ⁶	3	8 ⁵
5						12

Megjegyzések:

- A táblázatos megoldás esetén szembevetendő a korai alkalmazásoknál megkívánt megoldás – miszerint a csomópontok indexelését úgy kellett kialakítani, hogy minden él esetében a kezdőpont indexe kisebb legyen a végpont indexénél („felső háromszöges kódolás” – lásd fentebb) – előnye. Tudniillik ekkor a megoldás a táblázat egyszerű, soronkénti, föntről lefelé történő kitöltésévé „fajul”. Ezen állítás igazának belátását – gyakorlásként – az olvasóra bízunk.
- Ha annak igénye felmerül, az élekhez egységnyi súlyszámok ($\tau_{ij}=1$) rendelésével a feladat itt ismertetett táblázatos megoldási algoritmus a háló „szintjeinek” (a csomópontokhoz rendelt potenciálok számítási sorrendjének, avagy a „felső háromszöges kódolás” csomópont-indexelési rendszerének) meghatározására is alkalmazható. Ezen állítás igazának belátását – szintén gyakorlásként – szintén az olvasóra bízunk.

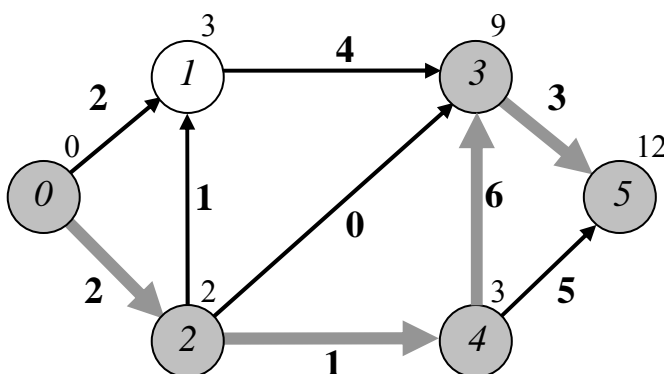
A leghosszabb út beazonosítása:

Táblázatos megoldás esetén az egyes csomópontokhoz rendelhető legkisebb időpotenciálok értékét – ami azonos a forrásból az egyes csomópontokba vezető leghosszabb utak hosszának értékével – az átló tartalmazza. A táblázat minden $\pi_{ij} \neq M \quad i \neq j$ értéke viszont azon – a forrásból az adott j pontba vezető – leghosszabb útnak a hosszát jelzi, melynek utolsó éle maga a τ_{ij} súlyszámmal bíró ij él.

A kitöltött táblázatban szereplő π_{ij} értékek mintegy *implicit címkék* segítségével maga a leghosszabb út viszonylag egyszerűen beazonosítható. Mindössze a leghosszabb utak utolsó éleit kell beazonosítanunk, lépésről lépésre visszafejtve a keresett ($P[st]$) *leghosszabb utat*. A cél-pontból (t) visszafelé haladva – oszlopában – megkeressük azt a cellát (sort), melyben szereplő érték megegyezik az átlóbeli értékkel ($\pi_{it} = \pi_{it}$). Ezáltal beazonosítottuk a leghosszabb út utolsó élét (it cella), és utolsó előtti (i) csomópontját. Következő lépésben a kiindulási pont (s) és az imént azonosított (i) csomópont közötti ($P[si]$) leghosszabb út utolsó élét kell beazonosítanunk. És így tovább, egészen addig, míg vissza nem érkezőnk a forráshoz.

Ellenőrzésképp: A beazonosított cellák (élek) súlyszámainak összege adja a feltárt (leghosszabb) út hosszát. Lásd a táblázatban bekarikázott τ_{ij} súlyszámok és általuk reprezentált élek ($3+6+1+2=12$).

Fenti módszerrel több azonos hosszúságú leghosszabb út (variáns) esetén is (melyet a felgöngyölítés során egy-egy oszlopban föllelhető több azonos $\pi_{ij} = \pi_{ji}$ érték jelenléte jelez) – egymás után, külön-külön – valamennyi alternatív útvariáns beazonosítható.



$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
0	0	2 ²	2 ²			
1		3		7 ⁴		
2		3 ¹	2 ²	2 ⁰	3 ¹	
3				9		12 ³
4				9 ⁶	3	8 ⁵
5						12

A gráf mentén is visszafejthető a mértékadó („leghosszabb”) út, szintén a cél-pontból (nyelőből) visszafelé haladva, azon élek (és csomópontok) beazonosításával, melyeknél az él és súlyszáma által reprezentált időpotenciál-különbség adott szélső értékére teljesül ($\pi_j - \pi_i = \tau_{ij}$).

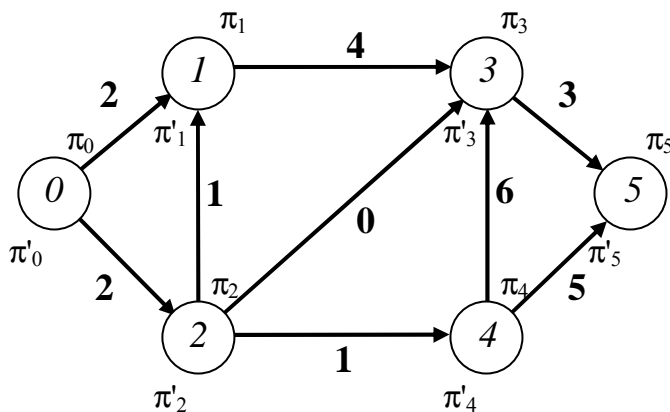
Mint látható, mind a minimális potenciál feladat megoldásának, mind a leghosszabb út keresési feladat megoldásának záró akkordjaként a gráfnak (korlát-halmaznak) ugyan azt a részét (részhalmazát) azonosítottuk be, mint leghosszabb utat, illetve mint mértékadó („domináns”) korlátozásokat.

Az is látható, hogy a gráfnak, illetve korlát-halmaznak nem minden eleme „domináns”. Nincs minden él és csomópont rajta a leghosszabb úton, illetve van olyan korlátozás, mely nem korlát-értékére, hanem „túlteljesül”. Ezek szerint viszont létezhet akár több olyan potenciál-rendszer változat, melynek legnagyobb értéke megegyezik az előbbieken beazonosítottal, miközben a „nem-domináns” korlátozások különböző mértékekben „teljesülnek túl”.

A teljes megoldás-halmaz behatárolása

A teljes megoldás-halmaz meghatározásához, helyesebben annak behatárolásához nézzük meg, hogy – valamennyi korlátozás betartása, és a legnagyobb potenciál értékének változatlansága mellett – szóba jöhető változatok esetén az egyes potenciálok milyen „érték-tartományon” mozoghatnak. Ezen értéktartományok alsó szélső-értékeit épp az előbb határoztuk meg („minimális potenciálok”). Most határozzuk meg a felső szélső-értékeket! Azaz: Valamennyi előbbi korlátozás figyelembevételével határozzunk meg olyan (π') „maximális” potenciál-rendszert, melyben a legnagyobb potenciál értéke megegyezik („nem nagyobb”) az előzőekben meghatározott legnagyobb potenciállal.

π_i	\geq	0
$\pi_1 - \pi_0$	\geq	2
$\pi_2 - \pi_0$	\geq	2
$\pi_3 - \pi_1$	\geq	4
$\pi_3 - \pi_4$	\geq	6
$\pi_4 - \pi_2$	\geq	1
$\pi_5 - \pi_3$	\geq	3
$\pi_5 - \pi_4$	\geq	5
$\pi_1 - \pi_2$	\geq	1
$\pi_3 - \pi_2$	\geq	0
π_i	\rightarrow	min



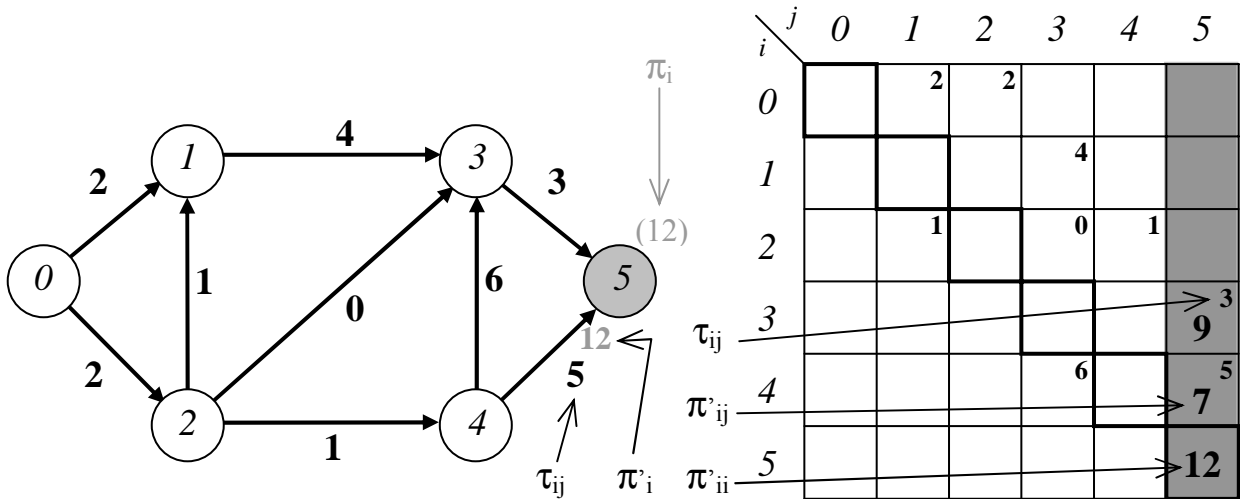
$\max \{ \pi_i \}$	\geq	π'_i
$\pi'_1 - \pi'_0$	\geq	2
$\pi'_2 - \pi'_0$	\geq	2
$\pi'_3 - \pi'_1$	\geq	4
$\pi'_3 - \pi'_4$	\geq	6
$\pi'_4 - \pi'_2$	\geq	1
$\pi'_5 - \pi'_3$	\geq	3
$\pi'_5 - \pi'_4$	\geq	5
$\pi'_1 - \pi'_2$	\geq	1
$\pi'_3 - \pi'_2$	\geq	0
π'_i	\rightarrow	max

A megoldás gondolatmenete azonos⁶ a legkisebb potenciálok meghatározásának gondolatmenetével, csak éppen fordított „haladási iránnyal”: képzeletben „megfordítva” a nyilakat és a rögzített legnagyobb potenciáltól visszafelé haladva („visszamérve”) a „számegyenesen”.

⁶ Tekintve, hogy a hálós időtervezési analógiánál a minimális potenciálok a lehetséges legkorábbi időpontoknak, a maximális potenciálok pedig a megengedett legkésőbbi időpontoknak felelnek meg, úgy is szoktuk mondani, hogy a legkorábbi-legkésőbbi határidőpontok meghatározása „szimmetrikus” feladat. Mindegy, hogy egy kezdési időponthoz igazodva határozom meg először a legkorábbi befejezéseket, vagy egy előre megadott határidőhöz viszonyítva a legkésőbbi kezdéseket, a belső összefüggések ugyanazok. A legtöbb járatos hálós ütemtervkészítő szoftver alternatívaként kínálja fel e választás lehetőségét, ami viszont inkább a tevékenységek lehetőségeken belüli („korai”/„késői”) tényleges ütemezésénél („allokáció”) nyer nagyobb jelentőséget (Lásd később).

1'. lépés: A számítások kiinduló pontjának⁷, a célpontnak („nyelőnek”) (n) a beazonosítása és ahhoz a kezdő $\pi'_n = \pi_n$ időpotenciál rendelése, amit a gráf mentén a csomópont alá írunk

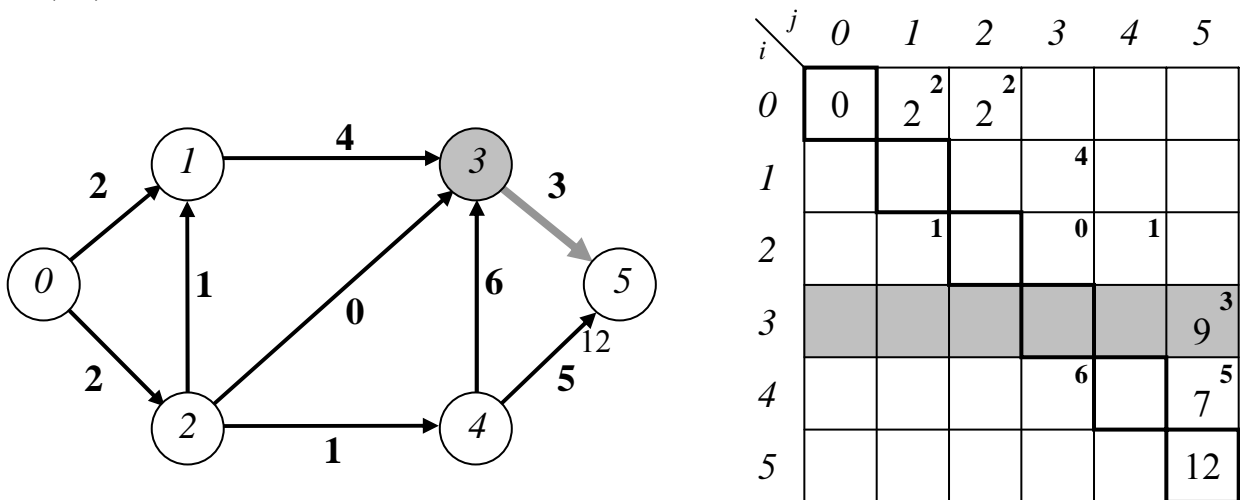
Táblázatos megoldás esetén ennek a lépésnek a „legnagyobb úthossz” megfelelő átlóbeli cellába írása ($\pi'_{nn} = \pi_{nn}$) felel meg, amit követően rögtön megtörténhet a – nyelőt közvetlenül (egyetlen él mentén) megelőző (i) csomópontokból a nyelőbe közvetlenül vezető – leghosszabb utak hosszának „visszamérése” ($\pi'_{in} = \pi'_{nn} - \tau_{in} \mid \tau_{in} \neq M; i \neq n$). Esetünkben: $\pi'_{35} = \pi'_{55} - \tau_{35} = 12 - 3 = 9$ és $\pi'_{45} = \pi'_{55} - \tau_{45} = 12 - 5 = 7$



2'. lépés: A következő olyan (i) csomópont beazonosítása, melynél még nem került sor a legnagyobb időpotenciál meghatározására, de amelyből kiinduló valamennyi él végpontjánál már igen.

Táblázatos megoldás esetén: Megkeresendő az az „ i ” sor, melyben az átló cellája még „üres” ($\pi'_{ii} = M$), de a sor valamennyi létező élt reprezentáló cellájában a közvetlen elérést jelző $\tau_{ij} \neq M$ érték mellett már szerepel – az adott csomópontból a nyelőbe vezető és első élként az ij élt magába foglaló „leghosszabb út” hosszának visszamérését jelző – $\pi'_{ij} \neq M$ érték. – Azaz, az adott „ i ” pontból a nyelőbe vezető valamennyi útvariánst már megvizsgáltuk.

Esetünkben ez a „3” jelű csomópont (a táblázatban a „3” jelű sor). Ha több ilyen van, közülük tetszőlegesen választhatunk, de az algoritmus egyértelműségéért ajánljuk a (leg)nagyobb indexű csomópont (sor) választását.



⁷ Esetünkben – és „hagyomány szerint” – a nyelőt a gráfon a legnagyobb indexű csomópont, a táblázatban az utolsó sor, illetve utolsó oszlop azonosítja, ami ugyanakkor – ne feledjük – nem követelmény. Lásd: Gráf-technikai alapfogalmak, forrás és struktúra tábla leírása.

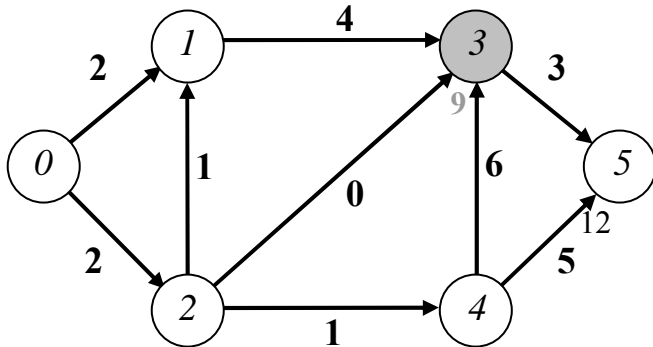
3'. lépés: A 2'. lépésben beazonosított (*i*) csomópontozhoz rendelhető legnagyobb időpotenciál (π'_i) nem más, mint az onnan kiinduló (*ij*) élek és súlyszaaik (τ_{ij}) által reprezentált potenciálkülönbségek vonatkozó ($\pi'_j - \tau_{ij} \geq \pi'_i$) korlátozásokat kielégítő legnagyobb érték ($\pi'_i = \min\{\pi'_j - \tau_{ij} \mid \forall ij \in A\}$), amit a csomópont alá írva rögzítünk.

Esetünkben egyetlen él mentén: $\pi'_3 = \min\{\pi'_5 - \tau_{35}\} = \min\{12 - 3\} = 9$.

Táblázatos megoldás esetén: A 2'. lépésben beazonosított *i* sorban található átlón kívüli értékek közül a legkisebbet az átlóbeli cellába írva rögzítjük, miáltal mintegy „visszamérjük” az adott *i* pontból a nyelőbe vezető leghosszabb út hosszát ($\pi'_{ii} = \min_j\{\pi'_{ij} \mid \pi'_{ij} \neq M; i \neq j\}$). Ezt követően az *i* pont oszlopában mérjük vissza az őt közvetlenül (egyetlen él mentén) megelőző *k* pontokból a célpontba (nyelőbe) vezető, a *ki* éleket, mint első éleket tartalmazó leghosszabb utak hosszát ($\pi'_{ki} = \pi'_{ii} - \tau_{ki} \mid \tau_{ki} \neq M; k \neq i$).

$$\pi'_3 = \min\{12 - 3 = 9\}$$

$$\pi'_{33} = \min\{9\}; \pi'_{13} = 9 - 4 = 5; \pi'_{23} = 9 - 0 = 9; \pi'_{43} = 9 - 6 = 3.$$



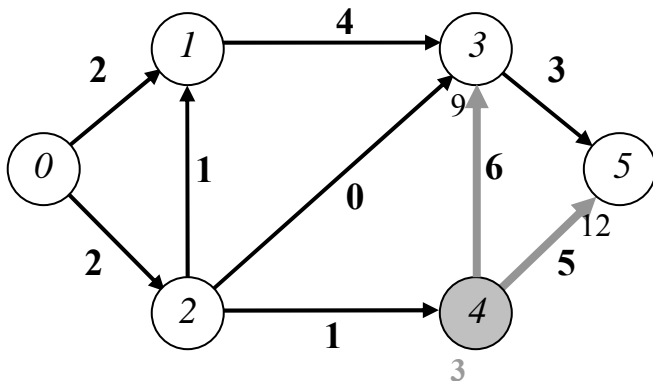
<i>i</i> \ <i>j</i>	0	1	2	3	4	5
0		2	2			
1				5 ⁴		
2		1		9 ⁰	1	
3				9		9 ³
4				3 ⁶		7 ⁵
5						12

Követő lépések: A legnagyobb időpotenciálok meghatározása, illetve az egyes csomópontokból a nyelőbe vezető leghosszabb utak hosszának „visszamérése” a 2'. és 3'. lépés ismétlésével történik mindaddig, míg a számításokkal el nem érjük a kiindulási pontot (forrást), azaz a forrásnál is meghatározásra nem kerül a legnagyobb időpotenciál, illetve a táblázat átlója teljes kitöltésre nem kerül.

Demonstratív példánk megoldását az alábbiakban – további kiegészítő magyarázat nélkül, de – a gráf mentén, illetve a táblázatban eszközöndő számítások szimultán feltüntetésével mutatjuk meg.

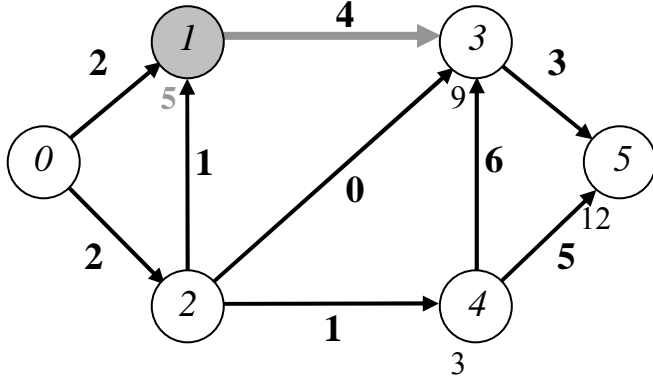
$$\pi'_{44} = \min\{\pi'_{43} = 3, \pi'_{45} = 7\} = 3; \pi'_{24} = \pi'_{44} - \tau_{24} = 3 - 1 = 2$$

$$\pi'_4 = \min\{\pi'_5 - \tau_{45} = 12 - 5 = 7; \pi'_3 - \tau_{43} = 9 - 6 = 3\} = 3$$



<i>i</i> \ <i>j</i>	0	1	2	3	4	5
0		2	2			
1				5 ⁴		
2		1		9 ⁰	2 ¹	
3				9		9 ³
4				3 ⁶	3	7 ⁵
5						12

$$\pi'_1 = \min\{\pi'_3 - \tau_{13} = 9 - 4 = 5\} = 5$$

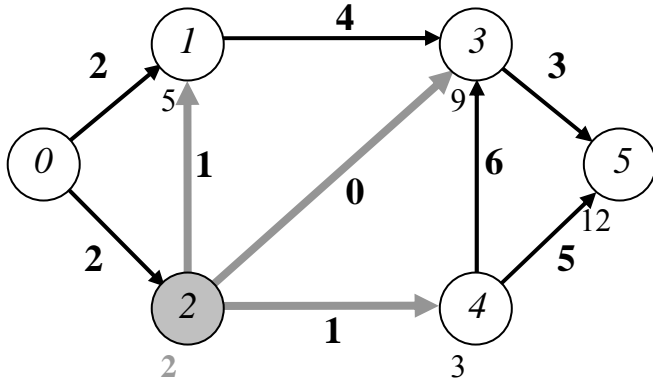


$$\pi'_{11} = \min\{\pi'_{13} = 5\} = 5;$$

$$\pi'_{01} = \pi'_{11} - \tau_{01} = 5 - 2 = 3; \quad \pi'_{21} = \pi'_{11} - \tau_{21} = 5 - 1 = 4$$

j \ i	0	1	2	3	4	5
0		3 ²	2			
1		5	5 ⁴			
2		4 ¹		9 ⁰	2 ¹	
3				9		9 ³
4				3 ⁶	3	7 ⁵
5						12

$$\pi'_2 = \min\{\pi'_1 - \tau_{21} = 5 - 1 = 4, \pi'_3 - \tau_{23} = 9 - 0 = 9, \pi'_4 - \tau_{24} = 3 - 1 = 2\} = 2$$

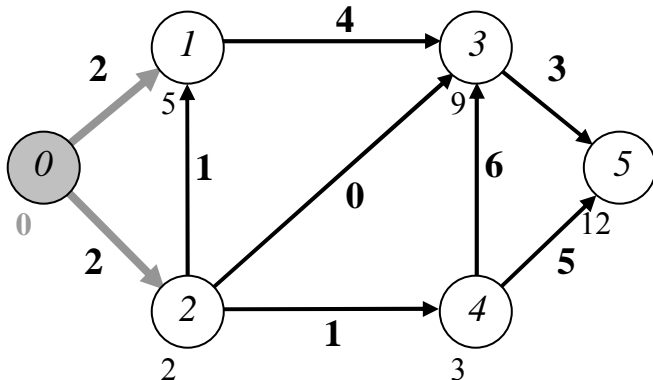


$$\pi'_{22} = \min\{\pi'_{21} = 4, \pi'_{23} = 9, \pi'_{24} = 2\} = 2;$$

$$\pi'_{02} = \pi'_{22} - \tau_{02} = 2 - 2 = 0$$

j \ i	0	1	2	3	4	5
0		3 ²	0 ²			
1		5		5 ⁴		
2		4 ¹	2	9 ⁰	2 ¹	
3				9		9 ³
4				3 ⁶	3	7 ⁵
5						12

$$\pi'_0 = \min\{\pi'_1 - \tau_{01} = 5 - 2 = 3, \pi'_2 - \tau_{02} = 2 - 2 = 0\} = 0$$



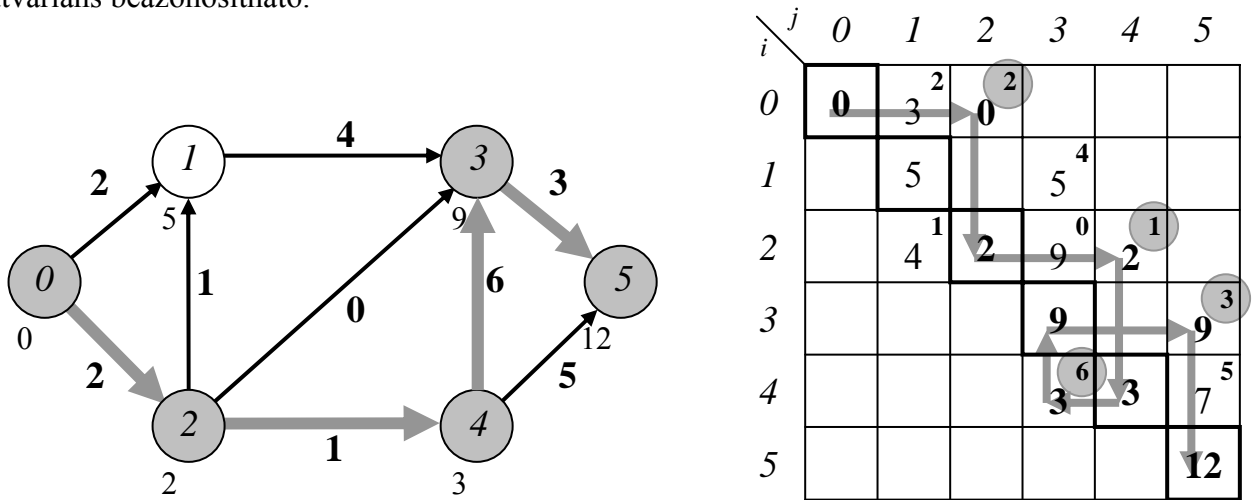
$$\pi'_{00} = \min\{\pi'_{01} = 3, \pi'_{02} = 0\} = 0$$

j \ i	0	1	2	3	4	5
0	0	3 ²	0 ²			
1		5		5 ⁴		
2		4 ¹	2	9 ⁰	2 ¹	
3				9		9 ³
4				3 ⁶	3	7 ⁵
5						12

Táblázatos megoldás esetén az egyes csomópontokhoz rendelhető legnagyobb időpotenciálok értékét – ami azonos az egyes csomópontokból a nyelőbe vezető leghosszabb utak hosszának a nyelőtől visszamért értékével – az átló tartalmazza. A táblázat minden $\pi'_{ij} \neq M \quad i \neq j$ értéke viszont azon – az adott i pontból a nyelőbe vezető – leghosszabb útnak a nyelőtől visszamért hosszát jelzi, melynek első éle maga a τ_{ij} súlyszámmal bíró ij él.

A kitöltött táblázatban szereplő π'_{ij} értékek mintegy *implicit címkék* segítségével a leghosszabb út – hasonlóan az előzőekben már megismert eljáráshoz, csak éppen előrefelé – beazonosítható. A leghosszabb utak első éleit közvetlenül be tudjuk azonosítani, lépésről lépésre felgöngyölítve a keresett ($P[st]$) leghosszabb utat. A forrásból (s) előrefelé haladva – sorában – megkeressük azt a cellát (oszlopot), melyben szereplő érték megegyezik az átlóbeli értékkel ($\pi'_{si} = \pi'_{ss}$). Ezáltal beazonosítottuk a leghosszabb út első élét (si cella), és második (i) csomópontját. Következő lépésben az imént beazonosított (i) pont és a nyelő (t) közötti ($P[it]$) leghosszabb út első élét – és második csomópontját – kell beazonosítanunk. És így tovább, egészen addig, míg el nem érkezünk a nyelőhöz. A beazonosított cellák (élek) súlyszámainak összege itt is a feltárt (leghosszabb) út hosszát adja. Lásd a táblázatban bekarikázott τ_{ij} súlyszámok és általuk reprezentált élek ($3+6+1+2=12$).

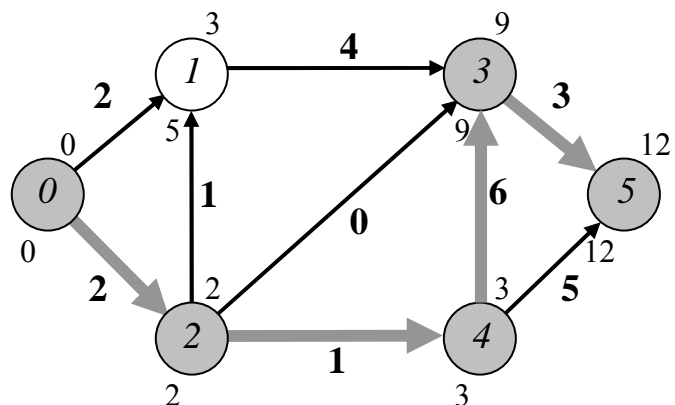
Az itt beazonosított leghosszabb ($P[st]$) út értelemszerűen meg kell, hogy egyezzen a minimális potenciálok meghatározásával párhuzamosan feltárt leghosszabb úttal. Több azonos hosszúságú leghosszabb út (variáns) esetén – melyet a felgöngyölítés során egy-egy sorban föllelhető több azonos $\pi'_{ij} = \pi'_{ji}$ érték jelenléte jelez – egymás után, külön-külön, a fenti módon, valamennyi alternatív útvariáns beazonosítható.



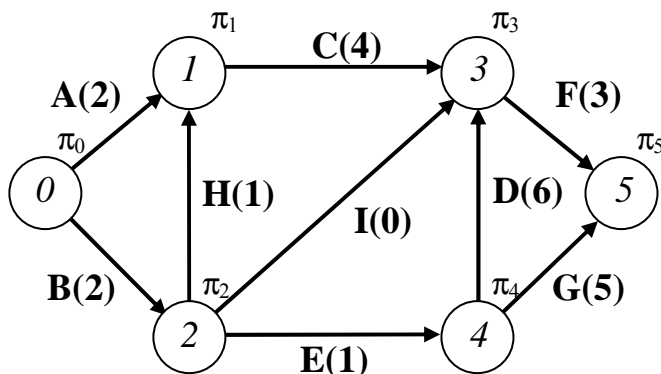
A gráfon a leghosszabb út a forrásból előrefelé haladva azonosítható be, azon élek és csomópontok megkeresésével, melyeknél $\pi'_j - \pi'_i = \tau_{ij}$, vagyis ahol a csomópont-páronként előre megadott irányított relatív időpotenciál-különbség szélső (alsó korlát) értékére (egyenlőségre) teljesül.

A számítások gyors ellenőrzéséhez megfogalmazható néhány „trivialitás”:

- A legkisebb időpotenciál egy csomópontnál sem lehet nagyobb a legnagyobb időpotenciálnál ($\pi_i \leq \pi'_i$).
- Leghosszabb úton lévő csomópontoknál a legkisebb és a legnagyobb potenciál értéke megegyezik ($\pi_i = \pi'_i$).
- A gráf értelmezhető leghosszabb útja „forrásból” „nyelőbe” vezet.



A minimális potenciál feladat és a leghosszabb út feladat kapcsolata



π_i	\geq	0
$\pi_1 - \pi_0$	\geq	2
$\pi_2 - \pi_0$	\geq	2
$\pi_3 - \pi_1$	\geq	4
$\pi_3 - \pi_4$	\geq	6
$\pi_4 - \pi_2$	\geq	1
$\pi_5 - \pi_3$	\geq	3
$\pi_5 - \pi_4$	\geq	5
$\pi_1 - \pi_2$	\geq	1
$\pi_3 - \pi_2$	\geq	0
π_5	\rightarrow	min

Az eddigiekben már többször említett *minimális potenciál* és *leghosszabb út* keresési feladatokat nemcsak a hálós ütemezési feladat analógiája köti össze. Közöttük szoros összefüggés van, melynek megmutatásához – anélkül, hogy azt részleteiben tárgyalnánk, inkább csak egyfajta kitekintés végett – a lineáris programozást hívjuk segítségül⁸.

Lineáris Programozás (LP) névvel illetjük az olyan több-változós szélsőérték („optimum”) keresési feladat-családot, melyben a változókra előírt feltétel-rendszer (tipikusan alsó-, avagy felső korlátozások, illetve egyenlőségi követelmények), és az optimalandó célfüggvény egyaránt a változók *lineáris kombinációjaként* (konstans értékkel történő szorzásukkal és ezek összegeként) írható fel. (Lásd például jobbra fent: $(-1) \cdot \pi_0 + 1 \cdot \pi_1 \geq 2$; ...; $1 \cdot \pi_3 + (-1) \cdot \pi_4 \geq 6$; ...; illetve $1 \cdot \pi_5 \rightarrow \min$)

Az LP modellben szereplő feltételek (korlátok) és a célfüggvény együtthatóit sajátos táblázatos rendszerbe rendezve szokás a feladatot a mátrix-algebra jelöléseivel $\underline{A} \cdot X \leq B$; $Z = \underline{C} \cdot X = \text{extr}$ alakban is felírni, ahol \underline{A} a változókra felírt feltétel-rendszerbeli együtthatókat tartalmazó mátrixot, X a változók oszlopvektorát, B a változókra felírt feltétel-rendszerbeli korlátértékek oszlopvektorát, \underline{C} a célfüggvényben szereplő változók együtthatóinak sorvektorát, Z pedig a célfüggvény értékét jelöli, mely utóbbinak a szélső értékét („extremálisát”), azaz minimumát, vagy maximumát keressük. Ezeken túl az X vektor elemeire előírjuk a nem-negativitást ($x_i \geq 0$) is.

A *minimális potenciál* feladat esetében az X oszlopvektor elemei a (csomópontokhoz rendelendő) (π_i) potenciálok, B oszlopvektor elemei a potenciálkülönbségekre előírt (τ_{ij}) alsó korlátok, \underline{C} sorvektor elemei az utolsó egységnyi (1) elem kivételével zérus (0) értékek, Z célérték pedig a potenciál rendszer legnagyobb elemének (Π) értéke, míg az \underline{A} mátrix elemei az egymás alá írt (és „balra rendezett”) feltételekben (korlátozásokban) szereplő változók együtthatói (lásd lentebb).

Az optimum keresési feladatok megoldása során régi keletű tapasztalat, hogy a keresett optimális megoldás viszonylag hamar megjelenik a megoldáshalmazban, ugyanakkor további számottevő munkát igényelhet a talált megoldás optimális voltának igazolása, úgymond az optimum „verifikálása”. A megoldás hatékonyságát segíti, ha jó előre be tudunk építeni a modellbe olyan jellemzőt, mely egy-egy megoldás optimális voltát jelzi („optimum kritérium”).

⁸ Az összefüggések könnyebb tárgyalhatósága végett a fenti ábrán szereplő gráfnak nem csak a csomópontjait (0,1,2,3,4,5), de éleit is egyedi azonosítókkal (A,B,C,D,E,F,G,H,I) láttuk el, miközben a súlyszámokat az adott élek azonosítóit követő zárójelek között tüntettük fel.

Lineáris programozási feladatok megoldásánál gyakran alkalmazott módszer, hogy az alap feladat mellett, azzal egyidejűleg oldanak meg egy társ-feladatot, melynek segítségével az optimális megoldást a lehetséges megoldások halmazán két oldalról („alulról”, maximum feladatként és „felülről”, minimum feladatként) cserkészik be („primál-duál” feladat-pár). Ha az optimum keresés során olyan lehetséges megoldás kerül előtérbe, mely egyidejűleg mind a „primál”, mind a társított „duál” feladatnak lehetséges megoldása, akkor az a megoldás optimális megoldás („optimum kritérium”).

Az alábbiakban feladatainkat a lineáris programozás „nyelvezete” szerint „kódoltuk”.

A minimális potenciál feladatnál a táblázatba foglalt egyenlőtlenség-rendszer (korlátrendszer) és a célfüggvény konstans együtthatói mellett a táblázat bal oldalán (szürke oszlop) feltüntettük a gráfon az egyes korlátozásokat reprezentáló élek azonosítóit, valamint a táblázat melletti jobb-oldali szürke mezőben a korlátozások nem tabulált olvasatát.

	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5		τ_{ij}
A	-1	1	0	0	0	0	\geq	2
B	-1	0	1	0	0	0	\geq	2
C	0	-1	0	1	0	0	\geq	4
D	0	0	0	1	-1	0	\geq	6
E	0	0	-1	0	1	0	\geq	1
F	0	0	0	-1	0	1	\geq	3
G	0	0	0	0	-1	1	\geq	5
H	0	1	-1	0	0	0	\geq	1
I	0	0	-1	1	0	0	\geq	0
Π	0	0	0	0	0	1	\rightarrow	min

π_i	\geq	0
$\pi_1 - \pi_0$	\geq	2
$\pi_2 - \pi_0$	\geq	2
$\pi_3 - \pi_1$	\geq	4
$\pi_3 - \pi_4$	\geq	6
$\pi_4 - \pi_2$	\geq	1
$\pi_5 - \pi_3$	\geq	3
$\pi_5 - \pi_4$	\geq	5
$\pi_1 - \pi_2$	\geq	1
$\pi_3 - \pi_2$	\geq	0
π_5	\rightarrow	min

Mint látható, minden egyes élhez egy-egy korlátozás tartozik, mely az adott él kezdő- és vég-csomópontjához rendelendő potenciálok minimális különbségét írja elő. Az előállítandó potenciál rendszer számára előírjuk, hogy valamennyi potenciálnak nem-negatívnak kell lennie (LP alapvetés, illetve jobb oldali szürke mező első sora), és e korlátozások mellett keressük a cél-csomópont (,,nyelőhöz”) rendelhető időpotenciálnak, azaz a potenciál-rendszer legnagyobb értékű elemének ($\pi_5 = \Pi = \pi_i^{\max}$) a legkisebb értékét (utolsó sor).

	X_A	X_B	X_C	X_D	X_E	X_F	X_G	X_H	X_I		Pr_i
0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	\leq	0
1	1	0	-1	0	0	0	0	1	0	\leq	0
2	0	1	0	0	-1	0	0	-1	-1	\leq	0
3	0	0	1	1	0	-1	0	0	1	\leq	0
4	0	0	0	-1	1	0	-1	0	0	\leq	0
5	0	0	0	0	0	1	1	0	0	\leq	1
L	2	2	4	6	1	3	5	1	0	\rightarrow	max

forrás
 A, H < C
 B < E, H, I
 C, D, I < F
 E < D, G
 nyelvő

+2	+4	+3		=	9	A - C - F
+2	+4	+3	+1	=	10	B - H - C - F
+2		+3	+0	=	5	B - I - F
+2	+6	+1	+3	=	12	B - E - D - F
+2		+1	+5	=	8	B - E - G

A leghosszabb út feladatnál a szintén táblázatba foglalt korlátrendszer és célfüggvény konstans együtthatói mellett, a táblázat bal oldalán feltüntettük a gráfon az egyes korlátozásokat reprezentáló csomópontok azonosítóit, valamint a táblázat melletti szürke mezőben a korlátozások közvetlen megelőzési listának megfelelő olvasatát.

A táblázat egy-egy sorában +1 együttható jelöli az adott csomópontba érkező éleket, és -1 együttható jelöli az adott csomópontból kiinduló éleket.

Maguk a korlátozások (Pr_i) azt reprezentálják, hogy ha egy csomópontba beérkezünk a keresett út mentén, azt el is kell hagynunk (+1-1=0) – kivétel persze a forrás (csak -1), illetve a nyelvő (csak +1). A feladat úgy kiválasztani az adott konstans „hosszúságú” élek halmazából éleket, hogy azok a

forrásból a nyelőbe mutató nyíl-folytonos él-láncolatot képezzenek és él-paramétereik összege (L) a lehető legnagyobb legyen. Az X vektor (táblázat felső sora) elemei keresett értékükkel azt reprezentálják, hogy egy-egy adott él a keresett útnak része-e (1), avagy nem (0). Próbaképpen a gráfon is érdemes ellenőrizni, hogy adott konkrét feladatunknál valóban csak az öt létező forrás-nyelő útvariánsnak megfelelően (melyeket a táblázat alatti önálló szürke mezőben tüntettünk fel) lehet kiválasztani az éleket, úgy hogy azok egyik „csomóponti” korlátozásnak se mondjanak ellent.

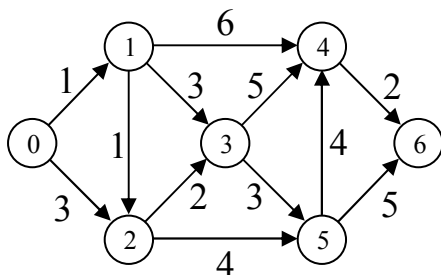
A *minimális potenciál* feladat és a *leghosszabb út* feladat együttható-tábláit összehasonlítva szembevetünk, hogy a *minimális potenciál* feladat együttható táblázatának sorai megegyeznek a *leghosszabb út* feladat oszlopaival és viszont, illetve, hogy a *minimális potenciál* feladatnál alsó korlátozások mellett minimumot keresünk, míg a *leghosszabb út* feladatnál felső korlátozások mellett maximumot (LP primál-duál alap-összefüggések). A *minimális potenciál* feladatnál az élek segítségével felírt korlátok (τ_{ij}) mellett keresünk a csomópontokhoz rendelhető (potenciál) értékeket (π_i), illetve célértéket (Π), a *leghosszabb út* feladatnál pedig a csomópontok segítségével felírt korlátok (Pr_i) mellett keresünk az élekhez rendelhető értékeket (X_i), illetve célértéket (L). Mindkét feladat megoldása pedig a gráf ugyanazon részletét, a leghosszabb út-, avagy a mértékadó feltételrendszer „éleit” és „csomópontjait” azonosítja. Mindezek alapján úgy mondjuk, hogy a *minimális potenciál* feladat és a *leghosszabb út* feladat egymásnak „primál-duál feladat-párja”. (Az, hogy a kettő közül éppen melyiket tekintjük „primálnak”, illetve „duálnak”, nem bír jelentőséggel.)

Bővebben a Lineáris Programozásról lásd: ...

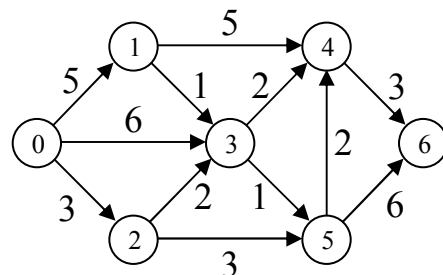
Gyakorló feladatok:

Struktúratáblák használatával, illetve a gráfok mentén határozza meg a „leghosszabb utakat”! A gráfok éleit és súlyszámait potenciál-különbségekre felírt alsó korlátként értelmezve határozza meg a „minimális-maximális potenciál-rendszereket”!

B.1 feladat:



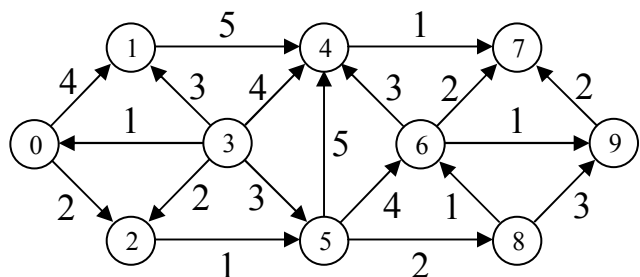
B.2 feladat:



B.3 feladat:

$\pi_2 - \pi_0 \geq 3;$	$\pi_5 - \pi_3 \geq 4;$
$\pi_3 - \pi_0 \geq 1;$	$\pi_1 - \pi_4 \geq 4;$
$\pi_0 - \pi_1 \geq 3;$	$\pi_3 - \pi_4 \geq 7;$
$\pi_3 - \pi_1 \geq 5;$	$\pi_5 - \pi_4 \geq 6;$
$\pi_5 - \pi_2 \geq 2;$	$\pi_6 - \pi_4 \geq 2;$
$\pi_2 - \pi_3 \geq 1;$	$\pi_6 - \pi_5 \geq 5.$

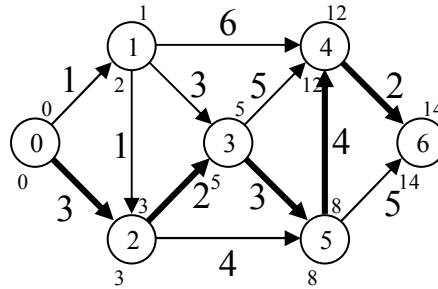
B.4 feladat:



Feladat megoldások

B.1 A feladat a minimális-maximális potenciálrendszer gráf-menti és táblázatos számításának és a leghosszabb út, illetve „mértékadó korlátozások” beazonosításának gyakorlását szolgálja.

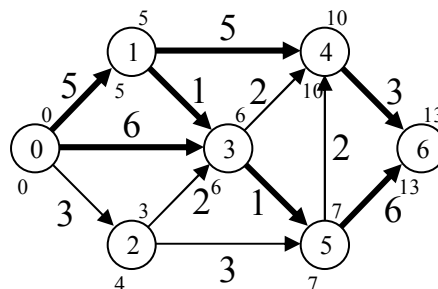
0	1	2	3	4	5	6
0	0	1 ¹	3 ³			
1		1	2 ¹	4 ³	7 ⁶	
2			3	5 ²		7 ⁴
3				5	10 ⁵	8 ³
4					12 ⁴	14 ²
5					12 ⁴	8 ⁵
6						14



0	1	2	3	4	5	6
0	0	1 ¹	0 ³			
1		2	2 ¹	2 ³	6 ⁶	
2			3	3 ²		4 ⁴
3				5	7 ⁵	5 ³
4					12 ⁴	12 ²
5					8 ⁴	8 ⁵
6						14

B.2 A feladat a többszörös „leghosszabb utak” felismerését és feltárásának gyakorlását szolgálja.

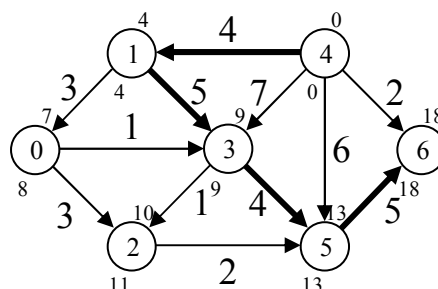
0	1	2	3	4	5	6
0	0	5 ⁵	3 ³	6 ⁶		
1		5		6 ¹	10 ⁵	
2			3	5 ²		6 ³
3				6	8 ²	7 ¹
4					10 ³	13 ³
5					9 ²	7 ⁶
6						13



0	1	2	3	4	5	6
0	0	0 ⁵	1 ³	0 ⁶		
1		5		5 ¹	5 ⁵	
2			4	4 ²		4 ³
3				6	8 ²	6 ¹
4					10 ³	10 ³
5					8 ²	7 ⁶
6						13

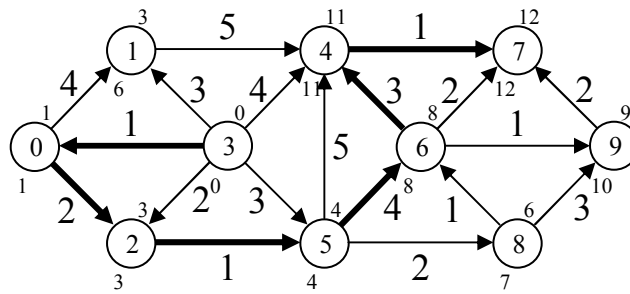
B.3 A feladat elsődlegesen a potenciál-különbségekre felírt korlátozások értelmezését, a számítások kiindulópontjának a helyes beazonosítását, illetve a táblázat helyes használatát teszteli. A gráf megrajzolása nem szükséges. Mi itt csak a megoldás szemléletesebbé tételé végett közlünk egy lehetséges topológiát.

0	1	2	3	4	5	6
0	7		10 ³	8 ¹		
1	7 ³	4		9 ⁵		
2			10			12 ²
3				10 ¹	9	13 ⁴
4		4 ⁴	7	7	0	6 ⁶
5						13 ⁵
6						18



0	1	2	3	4	5	6
0	8		8 ³	8 ¹		
1	5 ³	4		4 ⁵		
2			11			11 ²
3				10 ¹	9	9 ⁴
4		0 ⁴	2	7	0	7 ⁶
5						13 ⁵
6						18

B.4 A feladatot teszt-feladatként, a gyakoroltság, a megoldási rutin felmérésére lehet használni.



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	5 ⁴	3 ²							
1		3			8 ⁵					
2			3			4 ¹				
3	1 ¹	3 ³	2 ²	0	4 ⁴	3 ³				
4					11			12 ¹		
5					9 ⁵	4	8 ⁴		6 ²	
6					11 ³		8	10 ²		9 ¹
7								12		
8							7 ¹		6	9 ³
9								11 ²		9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2 ⁴	1 ²							
1		6			6 ⁵					
2			3					3 ¹		
3	0 ¹	3 ³	1 ²	0	7 ⁴	1 ³				
4					11			11 ¹		
5					6 ⁵	4	4 ⁴		5 ²	
6					8 ³		8	10 ²		9 ¹
7								12		
8							7 ¹		7	7 ³
9								10 ²		10

C – CPM/PERT - HÁLÓSZERKESZTÉS


A különböző hálós idő-modellezési technikák tárgyalása előtt – modell-filozófiai okokból – fontos két, egyébiránt átjárható időtervezési fogalmat tisztázni:

- **Esemény:** idő-elem, melynek (időbeli) kiterjedése nincsen, pusztán (időbeli) pozíciója.
- **Folyamat, vagy tevékenység:** idő-elem, mely (időbeli) kiterjedéssel bír, (időbeli) pozíciója és (időbeli) tartama egyaránt megfontolás tárgyát képezi.

A két fogalom átjárható, hiszen az esemény felfogható „0” (zérus) időtartamú folyamatként, a folyamat (időbeli kiterjedése, időtartama) pedig felfogható két esemény (befejezés és kezdés) közötti idő-különbségként. Ez az átjárhatóság azonban, ha nem elég körültekintően bánnak vele – mint később, az MPM/GTM technikáknál látni fogjuk – számos modellezési csapdát és értelmezési (félre-értelmezési) veszélyt is rejt magában.

Gráf-elemek értelmezése

A CPM és PERT modelleket szokás *tevékenység-él* (angol rövidítéssel: AOA = Activity on Arrow = tevékenység az élen) típusú hálós idő-modellezési technikaként is jellemezni, ami a grafikus elemekhez rendelt műszaki tartalomtól adódik. A két technika hasonlóságának érzetét leginkább az időelemzéshez használatos számítások hasonló menete, és a modellek grafikus megjelenésének hasonlósága kelti. A gráf-elemekhez kötött értelmezések között azonban látszólag árnyalatnyi, de modell-filozófiai értelemben lényeges különbségek vannak:

Nyíl / Él : 

- **CPM:** Konkrétan beazonosított, jól becsülhető és parametrizálható műszaki tartalommal bíró *tevékenység* (tipikusan rutin-jellegű feladatok).
- **PERT:** Névleg beazonosított, de – tapasztalatok híján – nehezen becsülhető, csak többkevesebb bizonytalansággal parametrizálható *folyamat* (tipikusan kutatás, fejlesztés).

Súly / Él-paraméter: τ_{ij} , (a-m-b)

- **CPM:** Konkrét (*diszkrét*) érték, a tevékenység becsült időtartama.
- **PERT:** Hármaskétes időbecslés alapján (lásd később) számított várható értékkel és szórással bíró valószínűségi (*sztochasztikus*) változó, a nevesített folyamat vélhető időigénye. A leghosszabb út-, illetve minimális potenciál meghatározása diszkrét értékek (*várható értékek*) figyelembevételével, a bizonytalanság kezelése további (előkészítő, illetve kiegészítő) számításokkal (*szórás, variancia*) történik

Csomópont: 

- **CPM:** Közvetlen megelőzési kapcsolat. A csomópontba, mint végpontba érkező nyilak által reprezentált *megelőző* tevékenységek közvetlen, *elő-feltételi* (ok-okozati) kapcsolatban állnak a csomópontból, mint kezdőpontból kiinduló nyilak által reprezentált *követő* tevékenységekkel. Fontos három dolgot hangsúlyosan megjegyezni:

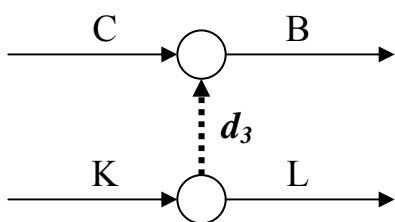
1. A csomópontok értelmezése szerint valamennyi megelőző tevékenységnek *teljes terjedelmében* el kell készülnie ahhoz, hogy bármelyik követő tevékenység elkezdhető legyen.
 2. A csomópont az oda beérkező nyilak által reprezentált tevékenységek között, avagy az onnan kiinduló nyilak által reprezentált tevékenységek között *semmilyen* kapcsolatot nem létesít. Nem jelenti azt, hogy azok egyszerre fejeződnenek be, vagy egyszerre kezdődnenek el.
 3. A csomópont nem reprezentál semmilyen nevesített *eseményt*.
- **PERT:** A *tevékenység* terminusok helyén *folyamat* megnevezéseket használva gyakorlatilag ugyanazok mondhatók el, mint a CPM esetében, egy kivétellel: A PERT technikával modellezett projektek, illetve folyamatok jellegének megfelelően (kutatás, fejlesztés) a csomópontokhoz – mint egyedüli konkrét dologhoz – rendelhető konkrétan beazonosított *esemény*-értelmezés. Például: döntési pont, rész cél, beszámolójelentés, munkafázis lezárása-, vagy megnyitása, stb.. Ebből adódóan szokták a PERT technikát *esemény orientált* projekt-modellként is emlegetni.

A csomópontokhoz, mint egyedileg beazonosított *gráf-elemhez* viszont (az oda beérkező nyilak által reprezentált tevékenységek/folyamatok számára *befejezési*-, az onnan kiinduló nyilak által reprezentált tevékenységek/folyamatok számára pedig *kezdési határidő* értelmezéssel) közös relatív határidő-értékek (*időpotenciálok*) rendelhetők.

Tekintve, hogy a hálós időmodellek grafikus reprezentációján általában lényegesen kevesebb csomópont, mint él található, a manuális számítások első lépésként többnyire ezen *közös relatív határidő-értékek* meghatározására irányulnak.

Kiegészítő grafikai elem:➔

- **CPM/PERT:** Az egyértelmű grafikus leképezés, illetve csomópont-páros él-azonosítás teszi szükségessé a többnyire szaggatott nyíllal jelzett *látszattevékenység* – mint kiegészítő grafikai elem – bevezetését. A látszat-tevékenység a csomópontok és az élek bizonyos tulajdonságaival egyaránt bír. Látszólag tevékenység, hiszen élként (nyílként) jelenik meg a gráfon, de hozzárendelt műszaki tartalom nélkül, „0” (zérus) tevékenységidővel – és ez a számítások során így is kerül figyelembevételre. Ugyanakkor csomópontként is viselkedik, mert kizárólagos szerepe közvetlen megelőzési viszonyok (kapcsolatok) megjelenítése. Értelmezésekor az általa összekötött csomópontok megelőzési viszonyai adott irányban együtt értelmezendők (adott irányban „átfolyik rajta az információ”). A látszattevékenységet szokás d_i formában jelölni, ahol a d látszattevékenység (angolul: *dummy activity*) voltára utal, míg az i index egy egyszerű (látszattevékenység-) sorszám. (Lásd még: Szerkesztési szabályok)



A mellékelt gráf-részlet például úgy értelmezendő, hogy K tevékenység egyaránt közvetlenül megelőzi B és L tevékenységeket (azaz B és L elkezdéséhez egyaránt szükséges K befejezése), míg C csak B tevékenységet előzi meg (C befejezése csak B elkezdéséhez szükséges).

Megjegyzés: Több szakirodalmi forrás említi – sőt javasolja – a gráf-elemek *tevékenység-csomó* (angolul: AON = Activity on Node = tevékenység a csomóponton) rendszerű megfontolását, amivel a látszattevékenységek szükségessége kiküszöbölhető. Ekkor a tevékenységeket csomópontok jelölik, míg az élek súly-paraméter nélküli, egyszerű megelőzési viszonyokat

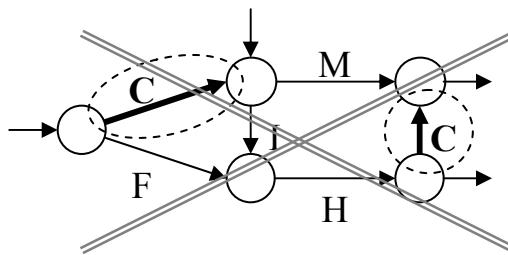
jeleznék. (Így a csomópontnak lesz „hossza”, míg az él „kiterjedés” nélkül marad.) Bár számszakilag ez semmi problémát nem jelent, ezt a megoldást több okból sem javasoljuk. (Békülékenyebben szólva: tárgyalásától eltekintünk.) Egyrészt kevésbé illeszkedik az előzőekben bemutatott *leghosszabb út*, és *minimális potenciál* analógiára. Másrészt az így kialakítható modell semmivel sem tud többet, mint az itt felvezetett megfeleltetés. Harmadrészt rejtett modellezési, és szerkesztési hibák lehetőségét hordozza magában (lásd az MPM/PDM tárgyalásánál). Később valóban használni fogunk „AON” megfeleltetéseket, de további kiegészítő elemekkel, és részben eltérő idő-elemzési algoritmusokkal (lásd: MPM/PDM).

Szerkesztési szabályok

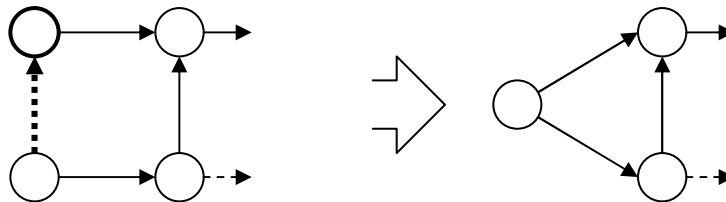
B

Általános modellezési szabályok:

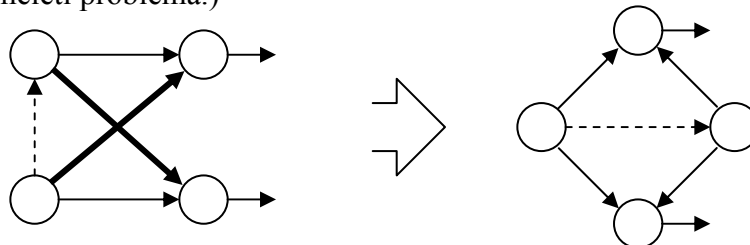
- Az idő-modellbe bevont minden összetevő (*tevékenység-él*) egyszer és csakis egyszer szerepelhet a modellben.



- A modell csak a lehető legkevesebb számú, minimálisan szükséges elem-készletből építkezzék. Amennyire csak lehet, kerülni kell a felesleges, valójában kiváltható többletelemeket (felesleges csomópontokat és látszat-tevékenységeket).

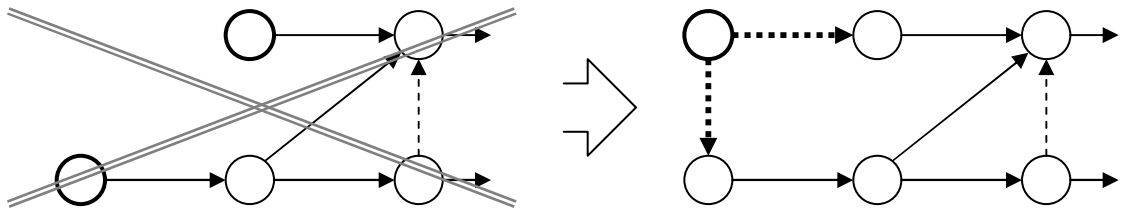


- Amennyire csak lehetséges – az áttekinthetőség, és az elegancia kedvéért – célszerű minél inkább *síkba kiteríthető* (minél kevesebb egymást keresztező élt tartalmazó) grafikus gráf-reprezentáció (topológia) kialakítására törekedni. (Ez egyébként önmagában is egy komoly gráfelméleti probléma.)

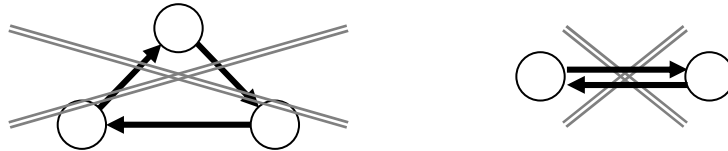


A hálózat definíciójából adódó szabályok:

- Az ütemterv-hálóban csak egyetlen forrás és egyetlen nyelő megengedett. Bár az ütemterv-háló *hálózatokra* történő – valójában nem szükségszerű – korlátozásáról már esett szó, a megkötés didaktikai okokból – akár mint szerkesztési elv – teljességgel elfogadható. („*Tessék világosan megmondani, honnan hova kell eljutni!*”) A feltétel – esetleg újabb csomópont és közbeiktatott látszattevékenység(ek) segítségével – minden nehézség nélkül teljesíthető.



- Az ütemterv-hálóban hurok nem megengedett. Logikai ellentmondáshoz vezetne. („Egy tevékenység nem előzheti meg önmagát!”)

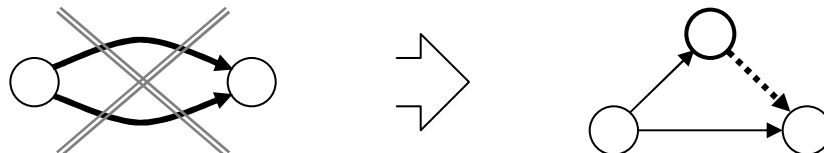


- Az ütemterv-hálón csak nem-negatív súlyszámok megengedettek. Az élek tevékenységként történő értelmezéséből logikusan adódik: Nehéz a negatív időtartamot értelmezni. („Az idő nem nagyon szeret visszafelé folyni.”)



Az alkalmazott korai algoritmusoktól örökölt megszorítások:

- A tervütem-hálóban két csomópont között azonos irányítással csak egyetlen él megengedett (csomópont-páros él-azonosítás kötelme). Ha mégis szükséges lenne, a megoldás újabb csomópont és közbeiktatott látszat-tevékenység (él) alkalmazása.

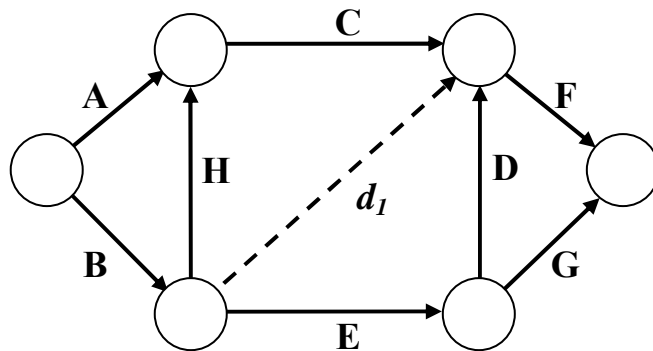


- Történetileg érdemes megjegyezni, hogy egyes korai alkalmazásoknál a csomópontok kódolását (sorszámozását) oly módon igényelték kialakítani, hogy minden egyes él esetén a kezdőpont sorszáma kisebb legyen, mint a végpont sorszáma. Ezen kitétel alkalmazásával a gráf ú. n. *felső-háromszöges* (a gráf struktúratáblájában csak az átló felett szerepelnek közvetlen kapcsolatokat jelző értékek) leképezését lehet előállítani. Egyébiránt e megkötés szükségtelen, a továbbiakban nem is vesszük figyelembe.

Közvetlen megelőzési lista

A közvetlen megelőzési lista CPM/PERT modellek fel nem paraméterezett (súlyszámok nélküli) gráf-információinak, a modellezni kívánt tevékenységek közvetlen megelőzési viszonyainak legtöbbször leírás módja. Formailag egymást követő sorokban, soronként egy-egy relációs operátor (<) előtt sorolja fel valamennyi-, az operátor után felsorolt tevékenységeket közvetlenül megelőző tevékenységet (lásd alábbi példa).

Az alábbi ábrán egy CPM/PERT hálós idő-modell súlyszámok nélkül ábrája, mellette struktúrájának *közvetlen megelőzési lista* olvasata látható.



Közvetlen megelőzési lista

- A, H < C
- B, C, D < F
- B < E, F, H
- E < D, G

Fontos észrevenni, hogy a közvetlen megelőzési lista magát a gráfot (annak topológiáját) nem írja le, sőt, ugyanaz a közvetlen megelőzési-viszony halmaz számtalan eltérő topológiájú gráf-moddal szemléltethető. Felírási módtól függően a közvetlen megelőzési lista egy-egy sora egyidejűleg több közvetlen megelőzési kapcsolatot is azonosíthat. Fenti példánk második sora (B,C,D<F) is például egyidejűleg jelzi, hogy B (tevékenység) közvetlenül megelőzi F-et, C közvetlenül megelőzi F-et, és D közvetlenül megelőzi F-et. (Miközben B, C és D viszonyáról nem állít semmit.)

Ahogy az említést nyert, a közvetlen megelőzési listában adott feltételek többféle gráf-topológiával is megjeleníthetők. Ezek jellemzően a *látszattevékenységek* számában és elhelyezésében, illetve a gráf *kiterítettségének* mértékében (keresztező élek helye és száma) térnek el egymástól. Fontos azonban, hogy ugyanazt a belső összefüggésrendszert kell kifejezniük, mint az előre megadott közvetlen megelőzési lista, amiről a felvázolt gráf-topológia megelőzési viszonyainak és az eredeti listának *bontott* (páronként történő, lásd előző bekezdés) összeolvasásával lehet meggyőződni.

A közvetlen megelőzési listákkal kapcsolatban általános elvárás, hogy azok csak és kizárólag a közvetlen megelőzési viszonyokat tartalmazzák. Fenti példánál maradvá: B tevékenységnek is teljes terjedelmében el kell készülnie, mielőtt C tevékenység elkezdődik, de kettejük közé még H tevékenység „beékelődik”, így relatív sorrendjük (kapcsolatuk) közvetetten (és nem közvetlenül) érvényesül. Az is önálló (operációkutatási rész-) feladat, hogy a megelőzési listát a közvetetten teljesülő kapcsolatokról „megtisztítsuk”. Ennek tárgyalásától itt azonban részben terjedelmi okok miatt – de még inkább modell-filozófiai megfontolásokból – eltekintünk.

A modellezési gyakorlatban tudniillik a feladat nem így jelentkezik. Általában adva van egy *operatív információs halmaz* (megelőzési lista), ami alapján elkészítendő a grafikus modell (gráf). Annak mérlegelésére pedig, hogy a megadott lista közvetlen megelőzési lista-e, vagy nem (közvetlen okozati kapcsolatokat rögzít-e, vagy sem), a gráf megrajzolásának „nincs joga”. Mindennemű ilyen előzetesen előállított lista célszerűen közvetlen megelőzési listaként kezelendő. (E megközelítésnek különösen fontos szerepe lesz a többszörös-, és többféle kapcsolatot kezelni tudó, későbbiekben bemutatásra kerülő MPM/PDM modelleknél.) A helyzetet csak tovább bonyolítja, hogy egy-egy közvetlen megelőzési listában foglalt megelőzési viszonyok összessége többféle csoportosításban is megjeleníthető. Az ilyen változatok egyenértékűsége csak valamennyi közvetlen kapcsolat egyenként történő, bontott felsorolásával, illetve táblázatos megjelenítéssel ellenőrizhető.

A modellbe bevonni szándékozott tevékenységek beazonosítása után az operatív információk halmazát, mint *megelőzési feltételek* listáját – első közelítésben nem foglalkozva az egyébként közvetetten eleve teljesülő sorrendiségi viszonyokkal – többnyire egyszerű előállítani. Nézzünk egy példát: Szöveget szeretnék verni a falba. Mi kell hozzá? Először is fal. Aztán szög, kalapács, én mint munkás és idő. Ezeket el kell készíteni, helyszínre kell szállítani, rendelkezésre kell bocsátani, stb. (megelőző tevékenységek). Bevertem a szöveget a falba. Mit tehetek ezután? Otthagyhatom („kész”), rögzíthetek rá valamit, beverhetem a következőt, stb. (követő tevékenységek).

Az operatív információk előállításánál kétfajta megközelítési módot szoktunk megkülönböztetni, melyeknek az eredményt tekintve nem szabad eltérést mutatniuk:

- Előrefelé építkező („Ez után mi jöhet?”) – úgymond „induktív” – megközelítés;
- Visszafelé építkező („Ehhez mi kell?”) – úgymond „deduktív” – megközelítés.

Hogy melyik megközelítés alkalmazása a célszerűbb, az az alkalmazó (tervező) egyéni habitusának függvénye. A járatos szoftverek mindkét „építkezési módot” támogatják.

Gyakorló feladatok:

Készítsen CPM/PERT hálós diagramokat az alábbi operatív információk alapján!

C.1 feladat: $A < C$; $B < D$

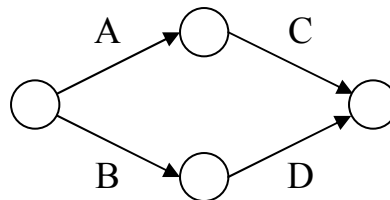
C.2 feladat: $A < C$; $B < C, D$

C.3 feladat: $A, H < C$; $B, C, D < F$; $B < E, F, H$; $E < D, G$

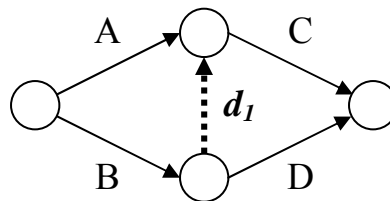
C.4 feladat: $D, H < E$; $C, G < B, I$; $A, B, I < H$; $F < C, G$; $I < D, H$; $G < A, B, I$

Feladat megoldások

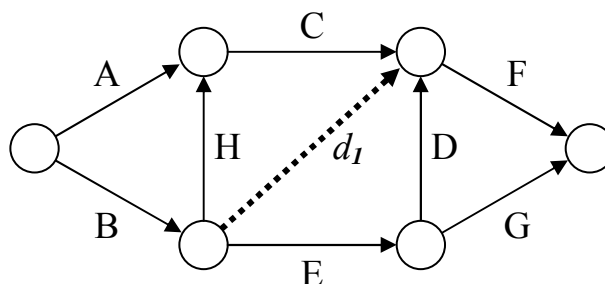
C.1 A feladat a *hálózat* tulajdonságainak kezelését (...egyetlen forrás, egyetlen nyelő...) teszteli.



C.2 A feladat a *látszattevékenység* használatának ismeretét teszteli.



C.3 A szemfüles olvasó felismerheti a közvetlen megelőzési lista tárgyalásánál bemutatott hálózatot. Érdeemes megfigyelni, hogy a megadott közvetlen megelőzési lista kétszer tartalmazza a $B < F$ közvetlen kapcsolatot. (Esetünkben a látszattevékenység kezdő- és vég pontjánál.)

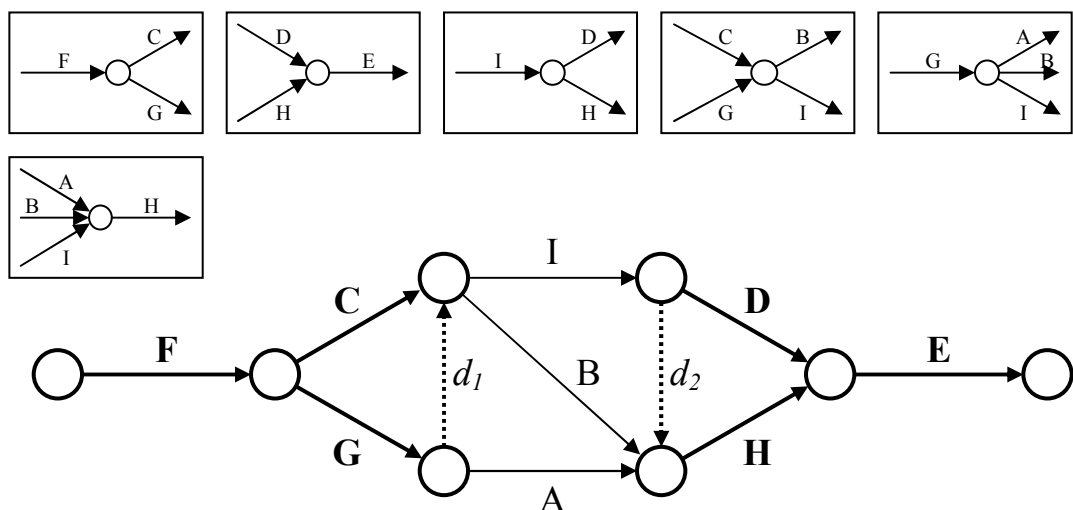


C.4 Összetettebb „manuális” feladat esetén az alábbi probléma-megközelítést javasoljuk:

- Először próbáljuk beazonosítani a hálózat *forrását* és az onnan közvetlenül kiinduló tevékenységeket (nem szerepelnek a megelőzési relációk jobb oldalán, hiszen nincsen megelőző tevékenységük), valamint *nyelőjét* és az oda közvetlenül beérkező tevékenységeket (nem szerepelnek a megelőzési relációk bal oldalán, hiszen nincsen követő tevékenységük). Esetünkben a forrásból indul F, és a nyelőbe érkezik E.
- A továbbiakban innen („szélről-befelé”) haladva próbáljuk meg elhelyezni a további tevékenységeket, eleinte az egyszerűbb-, majd később az egyre összetettebb megelőzési kapcsolatok figyelembevételével, szükség szerint látszatevékenységek közbeiktatásával. (Ne ijedjünk meg, ha ez csak többszöri próbálkozás, és módosításuk után sikerül.) Esetünkben viszonylag hamar meg fogjuk találni a C, D, G és H tevékenységek helyét (amivel már hatot el is helyezünk a kilencből), és igazából „csak” három tevékenység (A, B és I) elhelyezkedése okozhat komolyabb fejtörést.
- Végül ellenőrizzük, hogy valóban szükség van-e valamennyi általunk beépített látszatevékenységre, illetve, hogy a csomópontok és élek más elrendezésével (más „topológiával”) kiküszöbölhetők-e az esetleg egymást keresztező élek („kiteríthető”-e a gráf).
- Ellenőrzésképpen „olvassuk vissza” az általunk alkotott gráf *közvetlen megelőzési viszonyait*, és ha az eredeti lista tartalmával egyezőt kapunk, sikerrel vettük az akadályt.

Megjegyzések:

- Némileg segítheti a megoldást, ha a közvetlen megelőzési lista egy-egy relációjelét csomóponttal, bal oldalát oda beérkező-, jobb oldalát pedig onnan kiinduló nyilakkal szemléltetve egy-egy *képkockát* („puzzle-elemet”) rajzolunk. Jóllehet ezek a képkockák még változtatásra, szétszedésre, forgatásra, módosításra, stb. szorulhatnak, nem túl nagy feladatoknál a vizuális leképezést segíthetik. (Lentebb, megoldásunk bemutatásánál mutatunk erre példát.)
- Másfajta megközelítést jelenthet valamennyi tevékenység egy-egy különálló, két-két csomópont közötti nyilként történő felvétele, és a közvetlen megelőzési relációk látszatevékenységekkel történő rögzítése, majd a csomópontok és élek célszerű átrendezésével a szükségtelen látszatevékenységek lépésenkénti kiiktatása. Nem túl elegáns és olykor igen időigényes, de célravezető megoldás lehet. (Kicsit „izzadság szagú....”)
- Példánkban is érdemes megfigyelni, hogy a közvetlen megelőzési listában három közvetlen kapcsolat ($G < B$, $G < I$, $I < H$) is kétszer szerepel. (Vesd össze a közvetlen megelőzési listánál tárgyaltakkal.)



D – IDŐPARAMÉTEREK, IDŐELEMZÉSI ALAPFOGALMAK

Érdekes paradoxon a hálós idő-tervezési technikák gyakorlati alkalmazásában, hogy sokkal egyszerűbb egy adott technológiai megoldáshoz elfogadható logikai struktúrát (hálót) alkotni, mint azt időparaméterekkel ellátni. A techno-logikai összefüggések tisztázását a célszerűség, a szakmai specializáció, a funkcionális- és tér-kapcsolatok sokkal jobban támogatják (behatárolják), mint bármilyen más megfontolás az egyes összetevőkhöz (tevékenységekhez) szinte „végtelen” változatban rendelkezhető erőforrások (munkaerő, gépesítés, munkarend, elő-szerelés, stb.), és ezen keresztül a tevékenység-időtartamok megválasztását.

A hálós időmodellezési technikák a tevékenység időtartamokat eredendően input adatként kezelik. Igaz, a fejlettebb eljárások – egyéb ráakodó algoritmusokkal, konkurens értékelési szempontokkal kiegészítve – alkalmasak több szempont alapján is megfelelő ütemtervek kialakítására (ide értve a tevékenység-időtartamok megválasztását is), a hálós idő-elemzés mindig konkrét (diszkrét) értékekkel történik. Alkalmanként a megfelelő ütemterv kialakítása időtartam-változatok sokaságának vizsgálatát igényelheti, amit viszont a megfelelően kialakított hálós struktúra – némi jártasság birtokában – gyorsan végigvihető számításokkal és gyors kiértékelési lehetőségekkel támogat.

A következő fejezetekben bemutatásra kerülő hálós idő-modellezési technikáknál az egyes tevékenységek „időtartamai” (a gráf-élek súlyszámjai) különféle értelmezéseket kapnak. Van, ahol minden egyes időtartam egy-egy konkrét időérték (CPM), van, ahol egy-egy valószínűségi változó várható értéke – társítva további valószínűségi jellemzőkkel (PERT), és van, ahol szélső-értékekkel adott érték-tartományok, melyeken egy-egy másodlagos célfüggvény nyer értelmezést (CPM^{cost}).

Az egyik technika megelégszik az eseményeket, illetve közvetlen megelőzési viszonyokat reprezentáló csomópontokhoz rendelhető „idő-potenciálok” készletével (PERT), míg a másik ezek alapján számított- és a tevékenységeket reprezentáló élekhez rendelhető további idő-vonatkozású információkkal segíti a döntéshozókat (CPM).

A hálós időelemzés alap-gondolata (alap-feladata) azonban minden hálós idő-modellezési technikánál azonos: Egy folytonos, relatív időtengelyen (a forráshoz rendelt „0” időponthoz viszonyított) határ-időpontok meghatározása, melyek segítségével az egyéb szempontok alapján is megfelelőnek ítélt végleges ütemterv kialakítható. Ebben az összefüggésben a tevékenység időtartamok az előzőekben megismert *potenciál-különbségekre felírt alsó korlát-értékeknek*, míg a határ-időpontok a csomópontoknál meghatározandó *minimális-maximális potenciáloknak* feleltethetők meg.

A továbbiakban – az angol nyelvben kevésbé összecsengő szóhasználat³ okán – bevezetjük az alábbi (angol nyelvű szakirodalomból átvett) jelöléseket:

Hivatkozások, indexek:

A,B,C,... = él (tevékenység) azonosítók (ID=identifier=azonosító);

0 (zérus) = alsó indexként: a forrás (start), mint kezdő csomópont azonosítója;

n = alsó indexként: a nyelő (end), mint befejező csomópont azonosítója;

p (predecessor) = alsó indexként: adott tevékenység (nyíl) kezdő csomópontja, avagy adott csomópontba, mint végpontba beérkező, közvetlen megelőző tevékenységek (nyilak);

³ Vesd össze: Early/Late, avagy Korai/Késői; illetve Conditional/Independent, avagy Feltételes/Független

s (successor) = alsó indexként: adott tevékenység (nyíl) vég csomópontja, avagy adott csomópontból, mint kezdőpontból induló, közvetlen követő tevékenységek (nyilak).

Csomóponthoz („eseményhez”) rendelt idő-adatok:

E (Early time) = legkorábbi időpont, „minimális (idő-) potenciál”, π_i ;
L (Late time) = legkésőbbi időpont, „maximális (idő-) potenciál”, π_i' ;
SL (Slack) = csomóponti tartalékidő („lazaság”), $\pi_i' - \pi_i$;
T (Total time) = teljes átfutási idő, π_i^{\max} .

Élhez („tevékenységhez”) rendelt idő-adatok:

D (Duration) = időtartam, „minimális (idő-) potenciál különbség”, τ_{ij} ;
ES (Early Start) = legkorábbi kezdés;
EF (Early Finish) = legkorábbi befejezés;
LS (Late Start) = legkésőbbi kezdés;
LF (Late Finish) = legkésőbbi befejezés;
TF (Total Float) = teljes tartalékidő;
FF (Free Float) = szabad tartalékidő;
CF (Conditional Float) = feltételes tartalékidő;
IF (Independent Float) = független tartalékidő.

A csomópontokhoz rendelhető legkorábbi időpontok ($E_i = \pi_i$) és legkésőbbi időpontok ($L_i = \pi_i'$) meghatározása a tevékenységidők ($D = \tau_{ij}$) – mint egy-egy tevékenység kezdési- és befejezési időpontja közötti minimális idő-különbségek („alsó korlátok”) – figyelembe vételével az előzőekben ismertetett **leghosszabb út** keresési, avagy **minimális-maximális időpotenciál-rendszer** meghatározási algoritmusok szerint történik.

Tekintve, hogy a tipikus időütemterv-háló („gráf”, „hálózat”) struktúratáblája jellemzően igen terjedelmes, miközben celláinak kis hányada képvisel létező élt (tevékenységet), a számításokat jellemzően a gráf mentén szokás elvégezni. (A táblázatbeli számítások bemutatását didaktikai-, illetve „számítástechnikai” vonatkozások indokolhatják.) A fent bevezetett jelöléseket használva a számítási algoritmusok viszonylag egyszerűen leírhatók. ...

Legkorábbi időpontok meghatározása:

Az „odafelé számítás” („forward pass”), „nyíl-irányú számítás” („by-arrow pass”), „legkorábbi időpontok meghatározása” („early times”), minimális idő-potenciálok meghatározása” járatos terminusok mind ugyanazt a számítás-menetet jelölik:

$E_0 = 0$; (A számítások a forráshoz rendelt „0”-tól indulnak.)
 $ES = E_p$; (Bármely tevékenység legkorábbi kezdése az őt reprezentáló nyíl „kezdő” csomópontjához rendelt legkorábbi időponttal.)
 $EF = ES + D$; (Bármely tevékenység legkorábbi befejezése a legkorábbi kezdés és a tevékenységidő összegeként számítható.)
 $E = \max \{EF_p\}$; (Egy adott csomóponthoz rendelhető legkorábbi időpont nem más, mint az adott csomópontba érkező nyilak által reprezentált „megelőző” tevékenységek legkorábbi befejezései közül a legnagyobb érték.)

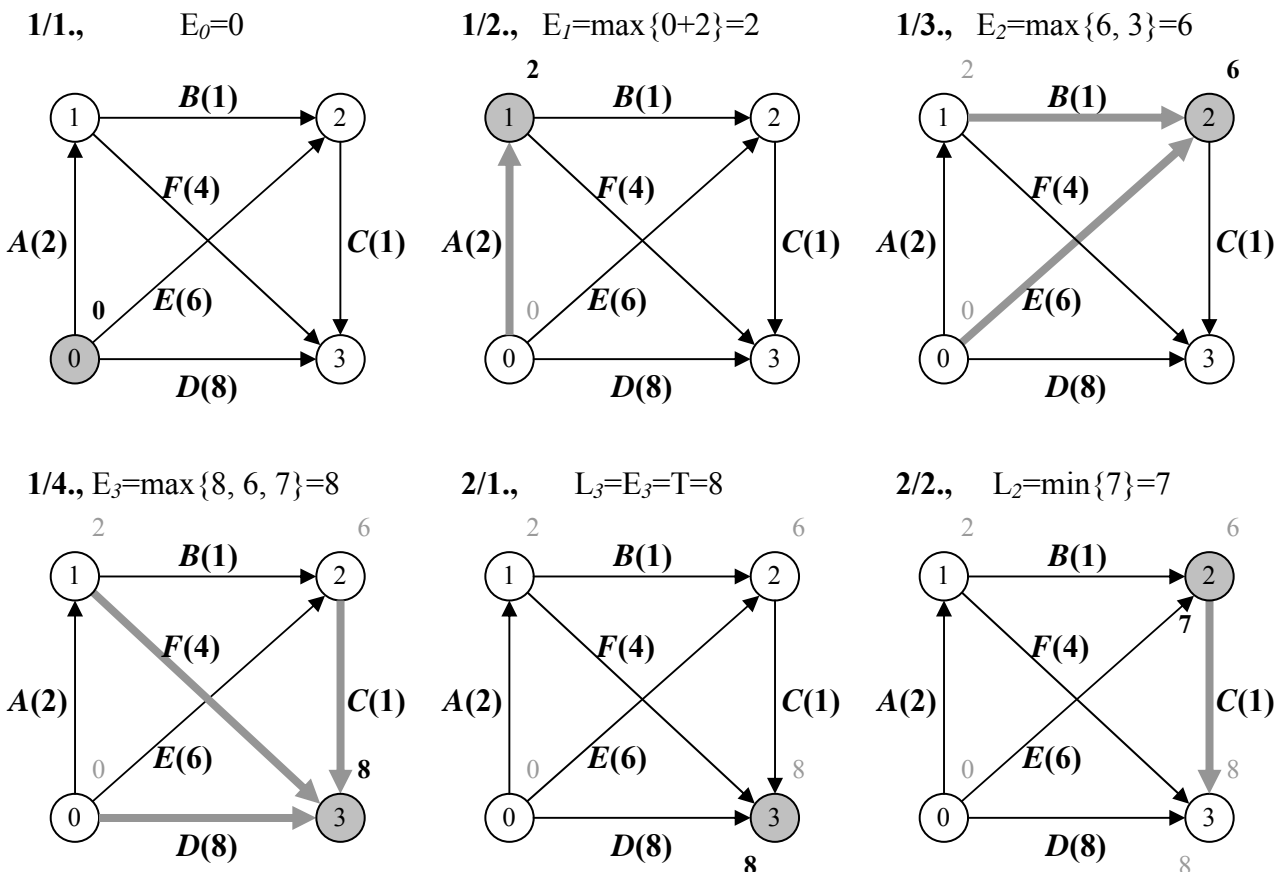
$T = \max \{E\} = E_n;$ (A teljes átfutási idő a csomópontokhoz rendelt legkorábbi időpontok közül a legnagyobb érték. ... ami a nyelőnél kell, hogy megjelenjék.)

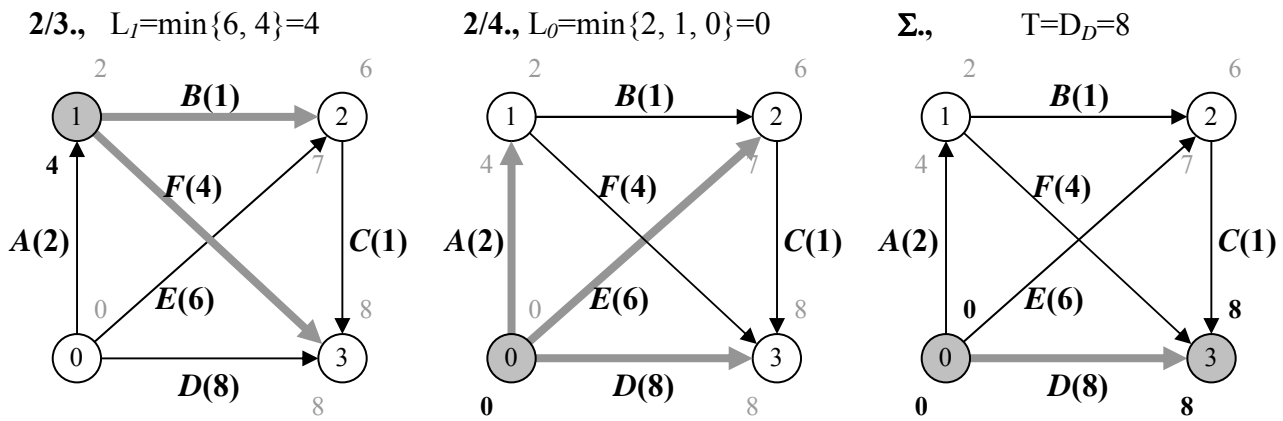
Legkésőbbi időpontok meghatározása:

A „visszafelé számítás” („backward pass”), „nyíl ellenében történő számítás” („counter-arrow pass”), „legkésőbbi időpontok meghatározása” („late times”), „maximális időpotenciálok meghatározása” járatos terminusok szintén egyazon számítás-menetre utalnak. A „legkésőbbi”, illetve „maximális” meghatározás – természetesen – úgy értendő, hogy: ahhoz, hogy a teljes modellezett feladat (projekt) még mindig a lehető leghamarabb elvégezhető legyen, mi az egyres tevékenységek kezdésének-, illetve befejezésének megengedhető legkésőbbi határ-időpontja.

- $L_n = E_n = T;$ (A számítások a nyelőnél meghatározott legkorábbi teljes befejezési időtől indulnak ... visszafelé.)
- $LF = L_s;$ (Bármely tevékenység legkésőbbi befejezése azonos az őt reprezentáló nyíl „vég” csomópontjához rendelt legkésőbbi időponttal.)
- $LS = LF - D;$ (Bármely tevékenység legkésőbbi kezdése a legkorábbi befejezés és a tevékenységidő különbségeként számítható.)
- $L = \min \{LS_s\}.$ (Egy adott csomópontba rendelhető legkésőbbi időpont nem más, mint az adott csomópontból kiinduló nyilak által reprezentált „követő” tevékenységek legkésőbbi kezdései közül a legkisebb érték.)

Az alábbi kis példán – mintegy a *leghosszabb út keresési*, avagy *minimális-maximális potenciál meghatározási* algoritmusok (lásd B fejezet) felelevenítéseként – mutatjuk meg a csomópontokhoz rendelhető határidőpontok gráf-menti számításának menetét, lépésről lépésre. A legkorábbi időpontokat (E) a csomópontok fölé, a legkésőbbieket (L) a csomópontok alá írtuk, az aktuális számítások helyét pedig szürke színnel emeltük ki a gráfon.





Ellenőrzési lehetőségek:

- $L_O = E_O$; (A „visszafelé” számítás végén „illik” „0”-val visszaérkezni a forrás-hoz! Ha nem így sikerült, akkor valamit elszámoltunk!)
- $E \leq L$. (A „legkésőbbi” időpont semelyik csomópontnál sem lehet kisebb, mint a „legkorábbi” időpont!)

Tartalékidők meghatározása:

A csomópontokhoz rendelhető legkésőbbi- és legkorábbi időpontok különbsége jelzi, hogy a lehető legrövidebb teljes átfutási idő mellett az egyes változatoknál a csomópontokhoz rendelhető határidőpontok (idő-potenciálok) milyen tartományon mozoghatnak. E „tartományok” kiterjedését a csomóponti tartalékidő – PERT szóhasználattal élve: „Slack” = (ütemtervbeli) „lazaság” – jelzi.

- $SL = L - E$; (A csomóponti tartalékidő a legkésőbbi- és a legkorábbi időpontok különbségeként kerül meghatározásra.)

Az egyes ütemterv változatoknál a csomópontokhoz rendelhető határidőpontok a legkorábbi- és legkésőbbi időhelyzetek között sem választhatók meg kötetlenül, hiszen közöttük a megadott minimális időkülönbségeket változatlanul biztosítani kell. E kötöttség jellemzésére a CPM technika kidolgozói – tekintettel az ott rögzített (diszkrét) tevékenység-időtartamokra, a határoló csomópontok szélső időhelyzetei alapján – az élekhez (tevékenységekhez) rendelhető négy darab kiemelt tulajdonsággal bíró „tartalék-időt” definiáltak:

- $TF = L_s - D - E_p$; (A kezdő csomópont legkorábbi időhelyzetben, a vég csomópont legkésőbbi időhelyzetben: „Teljes tartalékidő”. A teljes tartalékidő a tevékenységet reprezentáló nyíl vég csomópontjához meghatározott legkésőbbi idő-érték, a tevékenységidő, valamint a tevékenységet reprezentáló nyíl kezdő csomópontjához meghatározott legkorábbi időérték különbségeként számítható.)
- $FF = E_s - D - E_p$; (A kezdő csomópont és a vég csomópont egyaránt legkorábbi időhelyzetben: „Szabad tartalékidő”. A szabad tartalékidő a tevékenységet reprezentáló nyíl vég csomópontjához meghatározott legkorábbi idő-érték, a tevékenységidő, valamint a tevékenységet reprezentáló nyíl kezdő csomópontjához meghatározott legkorábbi időérték különbségeként számítható.)

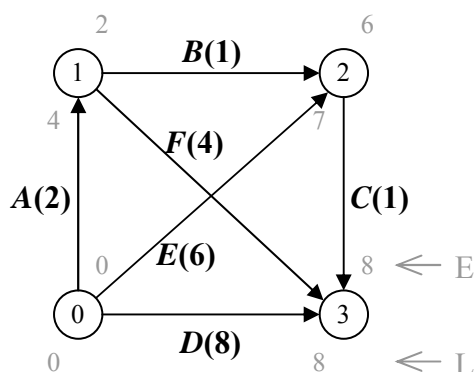
$$CF = L_s - D - L_p;$$

(A kezdő csomópont és a vég csomópont egyaránt legkésőbbi időhelyzetben: „Feltételes tartalékidő”. A feltételes tartalékidő a tevékenységet reprezentáló nyíl vég csomópontjához meghatározott legkésőbbi idő-érték, a tevékenységidő, valamint a tevékenységet reprezentáló nyíl kezdő csomópontjához meghatározott legkésőbbi időérték különbségeként számítható.)

$$IF = \max \{0; E_s - D - L_p\}$$

(A kezdő csomópont legkésőbbi időhelyzetben, a vég csomópont legkorábbi időhelyzetben: „Független tartalékidő”. A független tartalékidő a tevékenységet reprezentáló nyíl vég csomópontjához meghatározott legkorábbi idő-érték, a tevékenységidő, valamint a tevékenységet reprezentáló nyíl kezdő csomópontjához meghatározott legkésőbbi időérték különbségeként számítható. Bár optimalizálási feladatoknál negatív értékének is lehet jelentést tulajdonítani, eredendően csak a nem-negatív tartományban értelmezzük.)

A fenti kis feladatra vonatkozóan a csomópontokhoz és az élekhez rendelhető időadatokat és eredményeket az alábbi táblázatban foglaltuk össze. Javasoljuk az olvasónak a táblázatbeli értékek mindegyikére vonatkozóan a fent definiált összefüggések és értékek összevetését.



ID	D	E _p	L _p	E _s	L _s	ES	EF	LS	LF	TF	FF	CF	IF
A	2	0	0	2	4	0	2	2	4	2	0	2	0
B	1	2	4	6	7	2	3	6	7	4	3	2	1
C	1	6	7	8	8	6	7	7	8	1	1	0	0
D	8	0	0	8	8	0	0	8	8	0	0	0	0
E	6	0	0	6	7	0	6	1	7	1	0	1	0
F	4	2	4	8	8	2	6	4	8	2	2	0	0

Az időadatok egyéb összefüggései:

A későbbiekben bemutatásra kerülő (MPM/PDM) technikáknál lesz hasznos annak az összefüggésnek a felismerése, hogy a teljes tartalékidő a tevékenység legkorábbi- és legkésőbbi kezdési-, avagy befejezési időadatai alapján is számítható:

$$TF = L_s - D - E_p = LF - D - ES = LS - ES, \quad \text{illetve:} \quad TF = L_s - D - E_p = LF - D - (EF - D) = LF - EF.$$

A számszaki összefüggésekből következően az egyes éleknél (tevékenységeknél) meghatározható tartalékidők közül a teljes tartalékidő sohasem kisebb a másik háromnál:

$$FF, CF, IF \leq TF.$$

CPM szóhasználatával élve a hálós idő-modell azon csomópontjait (eseményeit), melyeknél a legkorábbi- és a legkésőbbi időpont megegyezik ($L - E = SL = 0$), **kritikus csomópontoknak** nevezzük; az ezek közötti nyilakkal reprezentált, tartalékidővel nem rendelkező tevékenységeket ($LS - ES = LF - EF = TF = 0$) pedig **kritikus tevékenységeknek** hívjuk. A kritikus tevékenységek (és kritikus csomópontok) együttesen alkotják a **kritikus utat**.

A kritikus út fogalmának felhasználásával további számszaki összefüggések fogalmazhatók meg:

- Azon nem-kritikus tevékenységeknél, amelyek a kritikus útból ágaznak ki ($ES=LS$), a feltételes tartalékidő megegyezik a teljes tartalékidővel ($CF=TF$);
- Azon nem-kritikus tevékenységeknél, melyek a kritikus útba kötnek be ($EF=LF$), a szabad tartalékidő megegyezik a teljes tartalékidővel ($FF=TF$).

Megjegyzések:

A szakirodalomban, illetve hétköznapi szóhasználatban széles körben elterjedt a kritikus „út” elnevezés, ami gráf-technikai kontextusban pontatlan, hiszen potenciálisan nem egyetlen összefüggő (leghosszabb) él-láncolatról van szó, de esetleg számos (azonos hosszúságú) él-láncolat (út) együtteséről. Később látni fogjuk, hogy a „kritikus útnak” több „ága” is lehet, sőt, „szélsőségesen befedezett” esetben a háló minden éle és csomópontja része lehet a kritikus útnak.

A CPM technikának köszönhető a kritikus út szemléletes definíciója, miszerint „a kritikus út azon tevékenységek láncolata, melyek bármelyikének esetleges késlekedése (értsd: időtartam-növekedése) a háló teljes átfutási idejének azonos mértékű növekedését okozná”. Ez az állítás itt és ebben az értelemben helytálló. Valamennyi hálós technikára általánosítani ezt a „definíciót” viszont nem szabad, mint azt majd látni fogjuk az MPM/PDM, és GTM technikák tárgyalásánál.

Nem igaz a fenti „szemléletes definíció” mintájára kézenfekvőnek tűnő állítás sem, miszerint „a kritikus út bármely tevékenységének időtartam-csökkenése azonos mértékű csökkenést von maga után a háló teljes átfutási idejében”, hiszen több alternatív leghosszabb („kritikus”) út lehet, illetve az adott tevékenységidő-csökkenés következtében a leghosszabb út más, addig nem kritikus él-láncolatra („szub-kritikus útra”) helyeződhet át.

Nem szabad elfelejteni hogy az a modell, amivel dolgozunk, számos ponton becslésekre és előzetes állásfoglalásokra épül. A kritikus utat fetiszizálni nem szabad. Mindössze a modellbeli mértékadó korlátozásokra és egymásra-épülésekre irányítja rá a modellező figyelmét. A modellezett tényleges feladat szempontjából számos helyen és céllal nyílik beavatkozási lehetőség. Számítalan olyan – akár idő-elemzésen kívüli szempont is – lehet, ami miatt egy-egy tevékenység, avagy tevékenység-lánc kiemelt figyelmet érdemel. Ebből a megfontolásból sok járatos „felhasználó-barát” szoftver – az eredményközlési (kiértékelési) szabadság növelésének jegyében – a kritikusság kritériumaként a tartalékidő tetszőleges, nullánál nagyobb értékének, mint korlát-értéknek a megadását is lehetővé tesz. (Adott értéknél kevesebb teljes tartalékidővel rendelkező tevékenységeket a rendszer kritikusként tünteti fel.)

Ugyancsak megtévesztő lehet szoftverek alkalmazásánál, ha azok a hálótechnika eszközrendszerét meghaladóan egyéb típusú – tipikusan naptári – megkötések egyidejű alkalmazását is lehetővé teszik, mely megkötések („constraints”) viszont „felülírhatják” a hálótechnikai összefüggéseket. Ennek következménye a kritikus út részleges, vagy teljes „eltűnése” lehet – ha az eredményül kapott időhelyzeteket nem hálótechnikai összefüggések idézik elő. Az ilyen esetekre beépített algoritmusok viszont már nem pusztán hálótechnikai, de sokkal inkább kombinatorikai elemeket tartalmaznak.

E – A CPM^{time} MODELL

H

A szakmai közéletben a „kritikus út módszere” néven ismert technika (*CPM = Critical Path Method = Kritikus Út Módszer*) életre hívása az amerikai Delaware állambeli Newark-i székhelyű vegyi-áru és hadianyag gyártó Du-Pont konszern nevéhez kötődik. A cég 1957-58 -ban létrehozott egy munkacsoportot annak vizsgálatára, miként lehetne a vállalat mérnöki feladatainál hasznosítani a korszerű menedzsment módszereket. Elsőként az építési beruházások előkészítését, illetve időterveit vették célba, melyhez a munkacsoportnak akkor egy UNIVAC-1 típusú számítógép állt rendelkezésére, melynek segítségével a számítógépekben rejlő potenciális lehetőségeket tesztelték. A munkába bevont ifjabb J. E. Kelley és Morgan Walker matematikusok felvetése szerint, ha a gépbe betáplálják a munkálatok időtartamait és a közöttük fennálló követési sorrende(ke)t, akkor az képes egy átfogó ütemterv generálására. 1957 decemberében az Univac Research Centre segítségével áttekintették és letisztázták a kezdeti koncepciót, aminek eredményeképpen megszületettek azok az algoritmusok, melyek együtt alkották az „alap” CPM-et (értsd: időelemzési- és fogalomrendszert). Ezekben a matematikai alapokban azóta sem történt lényegi változás.

1957-ben egy kísérleti csoportot hívtak életre az akkor Kelley-Walker metódusnak nevezett új módszer alkalmazására. A feladat egy a Kentucky állambeli Luisville-be tervezett, mintegy 10 millió dolláros üzem építésének megtervezése volt. A hálós modellt kifejezetten csak az előzetes tervek elkészültét követő építési feladatokra korlátozták. A teljes projektet több fő vizsgálati körre osztották, majd ezeket elemezve a feladatokat a munkafolyamatok szintjéig alábontották. Ezen munkafolyamatok összefüggéseit ábrázolták egy több mint 800 tevékenységet tartalmazó háló-diagramban.

A módszer akkora sikert aratott, hogy a Du Pont cég 1958 júliusában komoly erőforrásokat mozgósított a CPM egy másik – mintegy 20 millió dolláros – projektjüknél történő alkalmazására. A kristálytisza fogalmi rendszerre, és gépi feldolgozásra kiválóan alkalmas számítási algoritmusokra alapozva az új projektjénél – az eredeti CPM^{time} modell szélesebb rendszerbe integrálásával – már túl léptek a pusztá időtervezésen és nagy hangsúlyt fektettek a megvalósítás költség-vonatkozásaira is. A kidolgozásra került CPM^{cost} modell – az egyes tevékenységek feltételezett költség-idő összefüggéseiből kiindulva – lehetőséget biztosított a projekt optimális költség/idő mutatókkal kecsegtető ütemtervének kialakítására. (A CPM^{cost} modellről bővebben a „G” fejezetben esik szó.)

Ugyancsak CPM^{time} alapokra épül az ugyanebben az időben – de alkalmazásának sajátos történelmi körülményeiből adódóan – a köztudatba erőteljesebben „berobbant” PERT^{time} modell is, mely a hálós idő-modellezés leggyengébb összetevőjére, a tevékenység-időtartamok megválasztására (becslésére) fektetett kiemelt hangsúlyt. Ez utóbbi – először az Egyesült Államok Haditengerészetének kiemelt nemzeti prioritással (és forrásokkal) bíró projektjénél⁷ alkalmazott – módszer az egyes tevékenységek mértékadó voltának (esélyeinek) felderítése útján az erőforrások optimális átcsoportosítására adott lehetőséget, a lehető legrövidebb teljes átfutási idő elérése céljából. (A PERT^{time} modellt bővebben a következő „F” fejezetben tárgyaljuk.)

Magának a CPM^{time} modellnek a fogalmi-, szerkesztési- és számítási eszközrendszere az előző két fejezetben részleteiben tárgyalásra került. Az alábbiakban a gyakorlati idő-menedzsment szempontjából szemlélve tekintjük át a CPM^{time} modell összetevőit és szolgáltatott információit. Rögtön meg kell jegyeznünk azonban, hogy a tisztán „idő” modellt – a CPM^{time} modellt – önmagában már nemigen használják. Tiszta logikai rendszere alapvetően a hálós idő-modellezés alapjainak oktatásában nyújt nélkülözhetetlen segítséget. Kisebb „kiméretben” viszont szemléltetésre, gyors áttekintésre (nagyságrendi becslésre) ad lehetőséget akár a döntéshozás felső-, illetve középső szintjeinél is. ...

⁷ US Navy, POLARIS Projekt, 1958-71.

A gráf-elemek és idő-elemzési eredmények menedzsment-értelmezése

A modell és az eredmények értelmezésénél fontos ismételtén kihangsúlyozni, hogy a hálós modellek időelemzése által szolgáltatott határidő-értékek folyamatos relatív időtengely mentén értendők, és nem jelentik automatikusan a tevékenységek ütemezését. Pusztán annak kereteit határozzák meg.

Gráf-elemek, időadatok

Folyamatos nyíl: Tevékenység

Konkrét műszaki tartalommal egyedileg beazonosított tevékenység, időbeli kiterjedéssel bíró folyamat. („Erőforrás-hely”, illetve „költség-hely”)

Csomópont: Közvetlen megelőzési kapcsolat

Valamennyi az adott csomópontból kiinduló nyilak által reprezentált („követő”) tevékenység elkezdhetőségének feltétele, hogy a csomópontba érkező nyilak által reprezentált („megelőző”) tevékenységek mindegyike kész legyen. A „megelőző” tevékenységek közvetlen egymásra épülési (sorrendi, ok-okozati) viszonyban állnak a „követő” tevékenységek mindegyikével.

Szaggatott nyíl: „Látszattevékenység”, Közvetlen megelőzési kapcsolat

Valamennyi a szaggatott nyíl vég csomópontjából kiinduló nyilak által reprezentált („követő”) tevékenység elkezdhetőségének feltétele, hogy a szaggatott nyíl kezdő csomópontjába érkező nyilak által reprezentált („megelőző”) tevékenységek mindegyike kész legyen. A „megelőző” tevékenységek közvetlen egymásra épülési (sorrendi, ok-okozati) viszonyban állnak a „követő” tevékenységek mindegyikével. (Maga a nyíl munkavégzést, tevékenységet nem reprezentál, hanem kezdő és vég csomópontja között létesít irányított kapcsolatot.)

Súlyszám, él-paraméter: Tevékenység-időtartam

Önmagában az adott nyíl által reprezentált tevékenységnek az elvégzéséhez szükséges (becsült, előírányzott) időtartam. (A tevékenység-időtartamok egymástól független idő-értékek.)

Idő-elemzési eredmények – határ-időpontok

Teljes átfutási idő (T)

A modellezett összefüggések és előírányzott tevékenység-időtartam adatok alapján valamennyi modellbeli feladat elvégzéséhez minimálisan szükséges időtartam.

Legkorábbi kezdés (ES)

Az adott tevékenységet megelőző valamennyi feladat elvégzéséhez (a modellezett összefüggések és előírányzott tevékenység-időtartam adatok alapján) minimálisan szükséges időtartam.

Legkorábbi befejezés (EF)

Az adott tevékenység- és valamennyi megelőző feladata elvégzéséhez (a modellezett összefüggések és előírányzott tevékenység-időtartam adatok alapján) minimálisan szükséges időtartam.

Legkésőbbi kezdés (LS)

Az adott tevékenység- és az azt követő valamennyi feladat elvégzéséhez minimálisan szükséges időtartam figyelembevételével a tevékenység kezdésének legkésőbbi időpontja (a folytonos, relatív időtengelyen), mely mellett a teljes projekt még a lehető legrövidebb idő alatt megvalósítható.

Legkésőbbi befejezés (LF)

Az adott tevékenységet követő valamennyi feladat elvégzéséhez minimálisan szükséges időtartam figyelembevételével az adott tevékenység befejezésének legkésőbbi időpontja (a folytonos, relatív időtengelyen), mely mellett a teljes projekt még a lehető legrövidebb idő alatt megvalósítható.

Idő-elemzési eredmények – szabadságfokok

Teljes tartalékidő (TF):

Az adott tevékenység befejezésének lehetséges legnagyobb mértékű késedelme, anélkül, hogy az a projekt minimálisan szükséges teljes átfutási idejét megnövelné, feltéve, hogy az adott tevékenység valamennyi mértékadó megelőző tevékenységét lehetséges legkorábbi időzítése szerint lehet(ett) végrehajtani. („*Semmi késlekedés előtte, megengedhető legnagyobb késlekedés utána*”)

Szabad tartalékidő (FF):

A tevékenység befejezésének lehetséges legnagyobb mértékű késedelme anélkül, hogy az a projekt bármely más tevékenységének akár legkorábbi időpozíció szerinti kivitelezhetőségét veszélyeztetné, feltéve, hogy az adott tevékenység valamennyi mértékadó megelőző tevékenységét lehetséges legkorábbi időzítése szerint lehet(ett) végrehajtani. („*Semmi késlekedés előtte, semmi késlekedés utána*”)

Feltételes tartalékidő (CF):

A tevékenység befejezésének lehetséges legnagyobb mértékű (további) késedelme anélkül, hogy az a projekt minimálisan szükséges teljes átfutási idejét megnövelné, feltéve, hogy az adott tevékenység valamennyi mértékadó megelőző tevékenységét megengedhető legkésőbbi időzítése szerint lehet(ett) végrehajtani. („*Megengedhető legnagyobb késlekedés előtte, megengedhető legnagyobb késlekedés utána*”)

Független tartalékidő (FF):

A tevékenység befejezésének lehetséges legnagyobb mértékű (további) késedelme anélkül, hogy az a projekt bármely más tevékenységének akár legkorábbi időpozíció szerinti kivitelezhetőségét veszélyeztetné, feltéve, hogy az adott tevékenység valamennyi mértékadó megelőző tevékenységét megengedhető legkésőbbi időzítése szerint lehet(ett) végrehajtani. („*Megengedhető legnagyobb késlekedés előtte, semmi késlekedés utána*”) Csak nem-negatív értékeit értelmezzük.

Kritikus út (CP):

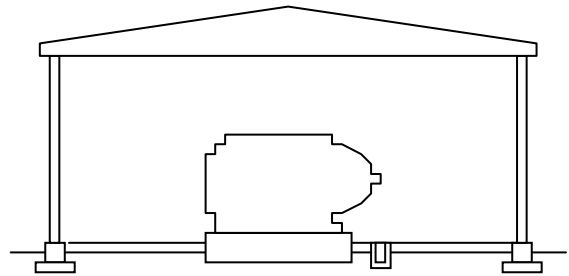
Az egymásra épülő tevékenységeknek azon láncolata(i), mely(ek) a projekt lehetséges legrövidebb megvalósítási idejét meghatározza(-zák). Amennyiben a modellezett projekt megvalósítási idejét a számítottéhoz képest csökkenteni szükséges, úgy a szükséges többlet erőforrásokat elsődlegesen e tevékenység-láncolato(ka)t alkotó (ú. n. „kritikus”) tevékenységekre kell fordítani. Másrészt, ha a kritikus utat alkotó tevékenységek bármelyike késedelmet szenved, annak közvetlen következménye várható a projekt teljes átfutási idejében.

A továbbiakban – feltételezve, hogy az olvasó az előző fejezetek alapján a CPM modell szerkesztésének szabályaival és a számítás algoritmusával már tisztában van – gyakorló feladatokon keresztül a modell alkalmazását, az eredmények értelmezését, abból következtetések levonását helyezzük előtérbe. Javasoljuk az olvasónak, hogy első megközelítésben önállóan próbáljon megoldást találni a felvetésre kerülő problémákra, és csak (legalább) egy általa készített javaslat birtokában hagyatkozzék az általunk bemutatásra kerülő lehetséges megoldások tanulmányozására.

Gyakorló feladatok:

E.1 feladat:

Egy a változó piaci tendenciákat figyelemmel kíséző nehézipari termékeket gyártó vállalat stratégiai beruházásainak keretében saját területén új gyártósor és üzemépület felállítását tervezi. A beruházás részét képezi több nagy méretű gépi egység beszerzése, elhelyezése, valamint az ezeket befogadó csarnoképület megépítése is. Az épület és gép sematikus rajzát a mellékelt ábra mutatja.



Készítse el a beruházás CPM hálós időmodelljét az egyes szakági vezetőkkel történt konzultációk alapján összeállított alábbi tevékenységlista, illetve a cég előző beruházásai során nyert tapasztalatok alapján becsült, munkanapban rögzített tevékenység időtartamok (zárójelben) figyelembe vételével! Végezze el modell időelemzését és értékelje annak eredményeit!

- | | |
|--|---|
| A – Beruházás jóváhagyása (5) | N – Építési-szerelési szerződés megkötése (20) |
| B – Technológiai gépészeti tervek kidolgozása (45) | O – Munkaterület átadása (5) |
| C – Technológiai gépészeti tervek jóváhagyása (5) | P – Terület előkészítés (10) |
| D – Technológiai gépegységek megrendelése (10) | Q – Nehéz gépalapok elkészítése (15) |
| E – Technológiai gépegységek gyártása, leszállítása (90) | R – Épület alaptettek elkészítése (10) |
| F – Fő technológiai gépegységek elhelyezése (5) | S – Csarnokszerkezet építése (20) |
| G – Technológiai gépészeti szerelés (15) | T – Közmű alapvezetékek építése (10) |
| H – Technológiai gépsor átvétele (5) | U – Épületgépészeti szerelése (20) |
| I – Technológiai gépsor próbaüzeme (30) | V – Szakipari- és egyéb befejező munkák (15) |
| J – Technológiai gépsor üzembe helyezése (10) | W – Épületgépészeti próbaüzem (10) |
| K – Építési üzemterület felszabadítása (30) | X – Külső kiszolgáló- és üzemi területek (20) |
| L – Építészeti tervek kidolgozása (60) | Y – Parkosítás, területrendezés (25) |
| M – Építészeti tervek jóváhagyása (15) | Z – Építési műszaki átadás-átvétel, levonulás (5) |

E.2 feladat:

Egy városi tömb-rehabilitáció részeként 600 m hosszú új gravitációs gyűjtő-csatorna épül. A kivitelező a feladatokat 3 fő technológiai folyamatra – úgymond „munkafrontra” – bontotta:

- A – „Ároknyitás”: Burkolatbontás, földkiemelés, árokdúcolás;
- B – „Csatornafektetés”: Ágyazat, cső- és aknaépítés (24fm cső után Ø1m akna), víztartási próba;
- C – „Helyreállítás”: Kidúcolás, földvisszatöltés, burkolat helyreállítás.

A technológiai folyamatok becsült időigénye: $D_A=36$ nap; $D_B=36$ nap; $D_C=36$ nap. A hatékony és biztonságos munkavégzés végett a „munkafrontok” között legalább 100 m manipulációs tér („minimális követési távolság”) biztosítandó. A generál ütemterv szerint mindezen munkálatokra 2 naptári hónap áll rendelkezésre.

Készítse el a munkálatok CPM hálós idő-modelljét! Végezze el az időelemzést, majd az eredményeket ábrázolja két-dimenziós ütemterven („ciklogram”-on)!

E.3 feladat:

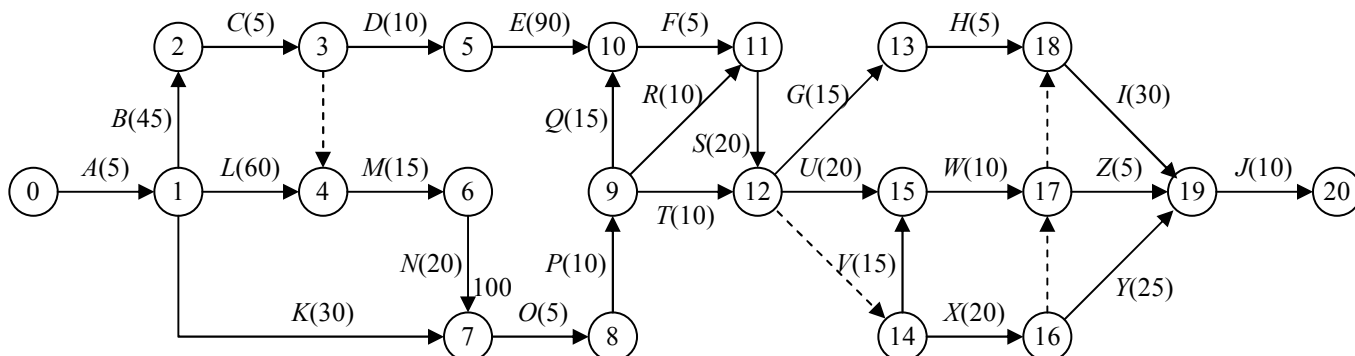
Mint E.2 feladat, de $D_B=24$ nap! Milyen heti munkarenddel („organizációs feltétellel”) tartható a generál ütemterv által szabott 2 hónapos teljes átfutási idő? *(Elméleti fejtegetés!)*

M

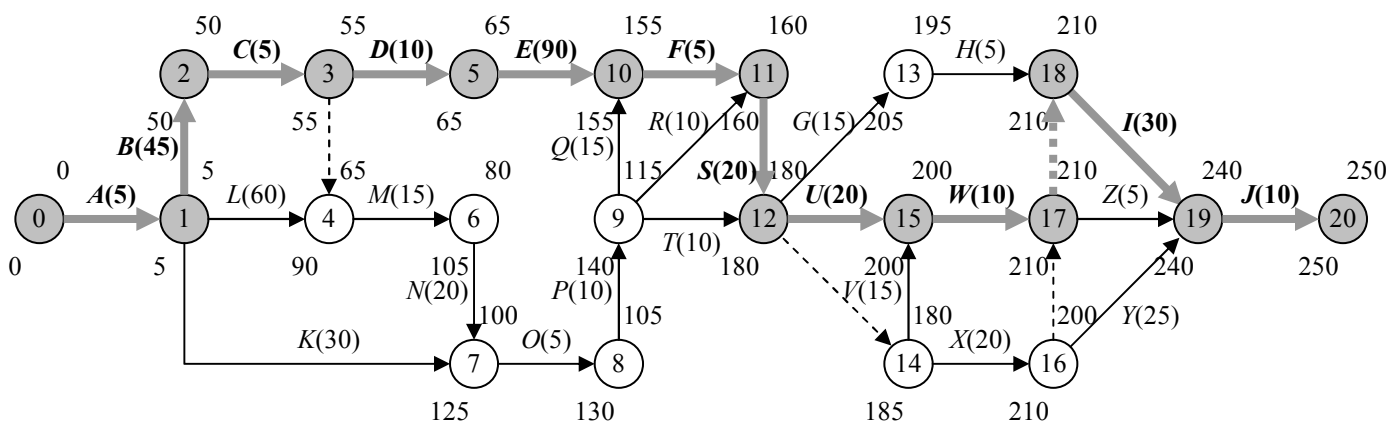
Feladat megoldások

E.1 Első lépésben a technológiai, logikai összefüggéseket tárjuk fel, mellyel egy időben – természetesen – számos szervezési döntés meghozatalára is kényszerülünk. Az alább bemutatott, általunk készített javaslat csak egy változat számos lehetséges megoldás és elrendezés közül. Mi a háló felső sávjába a technológiai gépészetre-, középső részébe a csarnoképültre-, alsó szegmensébe pedig a külső környezetre vonatkozó feladatokat igyekeztünk rendezni. Az elgondolás áttekinthetősége végett ezen a lapon ismételten feltüntetjük a tevékenységlistát.

- | | |
|--|---|
| A – Beruházás jóváhagyása (5) | N – Építési-szerelési szerződés megkötése (20) |
| B – Technológiai gépészeti tervek kidolgozása (45) | O – Munkaterület átadása (5) |
| C – Technológiai gépészeti tervek jóváhagyása (5) | P – Terület előkészítés (10) |
| D – Technológiai gépegységek megrendelése (10) | Q – Nehéz gépalapok elkészítése (15) |
| E – Technológiai gépegységek gyártása, leszállítása (90) | R – Épület alaptestek elkészítése (10) |
| F – Fő technológiai gépegységek elhelyezése (5) | S – Csarnokszerkezet építése (20) |
| G – Technológiai gépészeti szerelés (15) | T – Közmű alapvezetékek építése (10) |
| H – Technológiai gépsor átvétele (5) | U – Épületgépészeti szerelése (20) |
| I – Technológiai gépsor próbaüzeme (30) | V – Szakipari- és egyéb befejező munkák (15) |
| J – Technológiai gépsor üzembe helyezése (10) | W – Épületgépészeti próbaüzem (10) |
| K – Építési üzemterület felszabadítása (30) | X – Külső kiszolgáló- és üzemi területek (20) |
| L – Építészeti tervek kidolgozása (60) | Y – Parkosítás, területrendezés (25) |
| M – Építészeti tervek jóváhagyása (15) | Z – Építési műszaki átadás-átvétel, levonulás (5) |

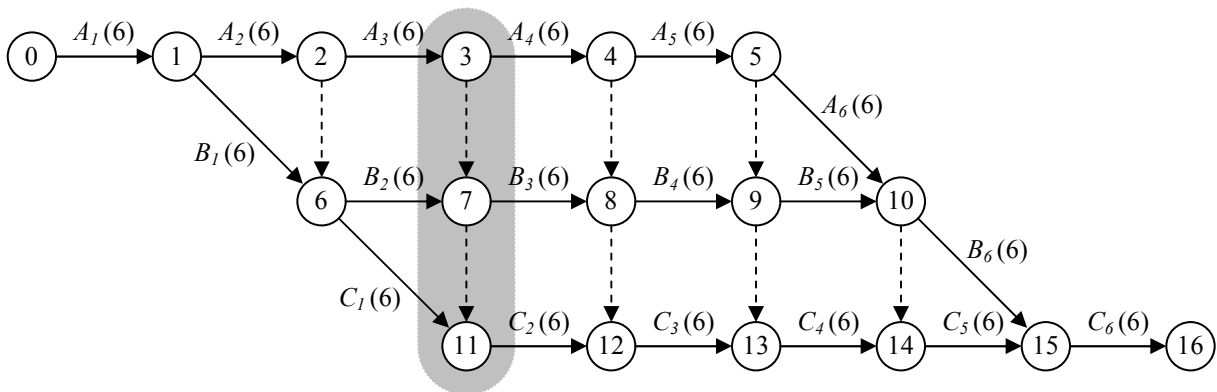


Az időelemzés tanúsága szerint a projekt teljes átfutási ideje mintegy 250 munkanap, amit leginkább – szemben azzal, amit a laikusok várnának – nem maga az építkezés, hanem a technológiai berendezések tervezése, gyártása, installációja és próbaüzeme okoz. Sőt, magát az építést előkészítő feladatoknál jelentős, mintegy hónapos tartalékidő is rendelkezésre áll. Kérdés: Hihető-e a modell? Valóban ezek a meghatározó folyamatok? Miként befolyásolható – ha szükséges, miként, és kiknek a felelősségi körében csökkenthető – a teljes átfutási idő? Mely feladatok hordozzák a legnagyobb idő-kockázatokat? Valóban minden lényeges elemet tartalmaz a modell? ... De ezek, ugye, már nem hálótechnikai kérdések. ...

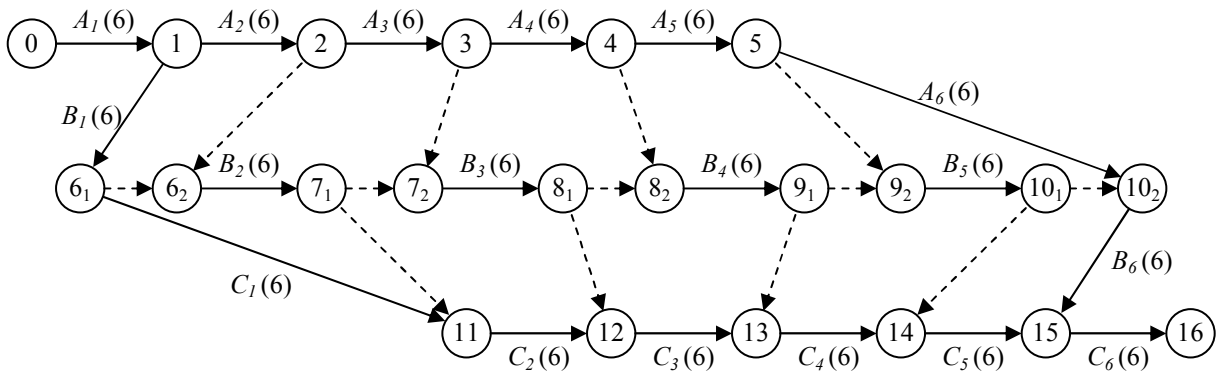


E.2 A feladat a CPM technika legfőbb hátrányára (hiányosságára) irányítja a figyelmet. Az ú. n. átlapolott időhelyzetek kezelése igen nehézkes, praktikusán nem megoldott.

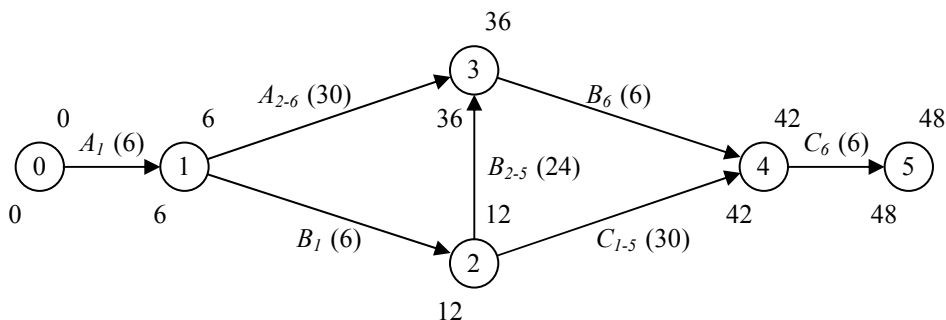
A számadatok tanulmányozása alapján hamar rájön az ember, hogy a technológiai folyamatokat párhuzamosítani, időben átlapolni szükséges. A kérdés: Milyen mértékben, és hogyan? A legkézenfekvőbbnek tűnő ötlet alapján, kiindulva a minimális követési távolságból, ugyanakkor törekedve a legrövidebb teljes átfutási időre, bontsuk az építési területet 6 db 100-100 m-es szakaszra, melyek között (és melyeken belül) a szükséges technológiai és sorrendiségi feltételek megadása – hálószerűen – (látszólag) egyszerűen megoldható!



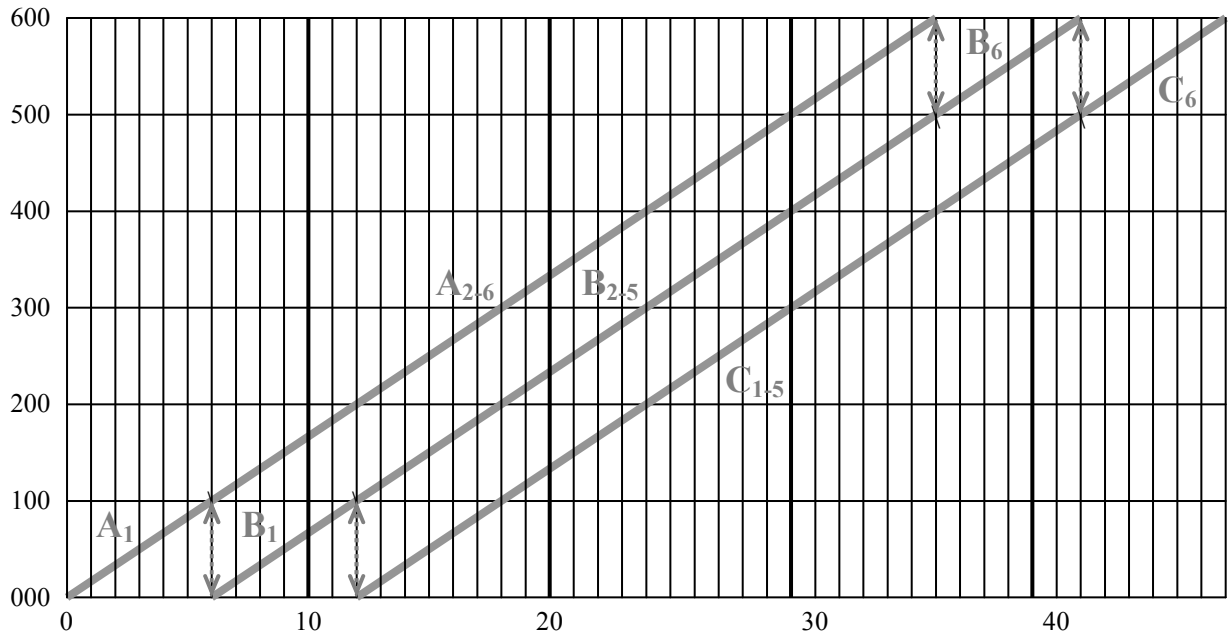
A fő probléma a fent vázolt megoldásnál a középső csomópont-sorral van, ami a csomópontok tranzitív (információt tovább adó) tulajdonságából adódik. Például a „7.” csomópont olvasata szerint a 3. szakaszon az „Ároknyitás” folyamata közvetlenül (értsd: ok-okozati viszonyban, mintegy előfeltételként) megelőzi a 2. szakasz „Helyreállítását” – ami itt inkább következmény, mint előre, tudatosan beépített „organizációs” feltétel. A probléma megoldását a középső csomópont-sor duplázása (a modell további növelése) jelentheti. ...



... Némi rutinnal felismerhető, hogy a triviális tevékenység-láncolatok összevonása útján – különösen, ha azok csak „kényszerből” létrehozott rész-tevékenységek – lényegesen egyszerűbb, kezelhetőbb modell alakítható ki.

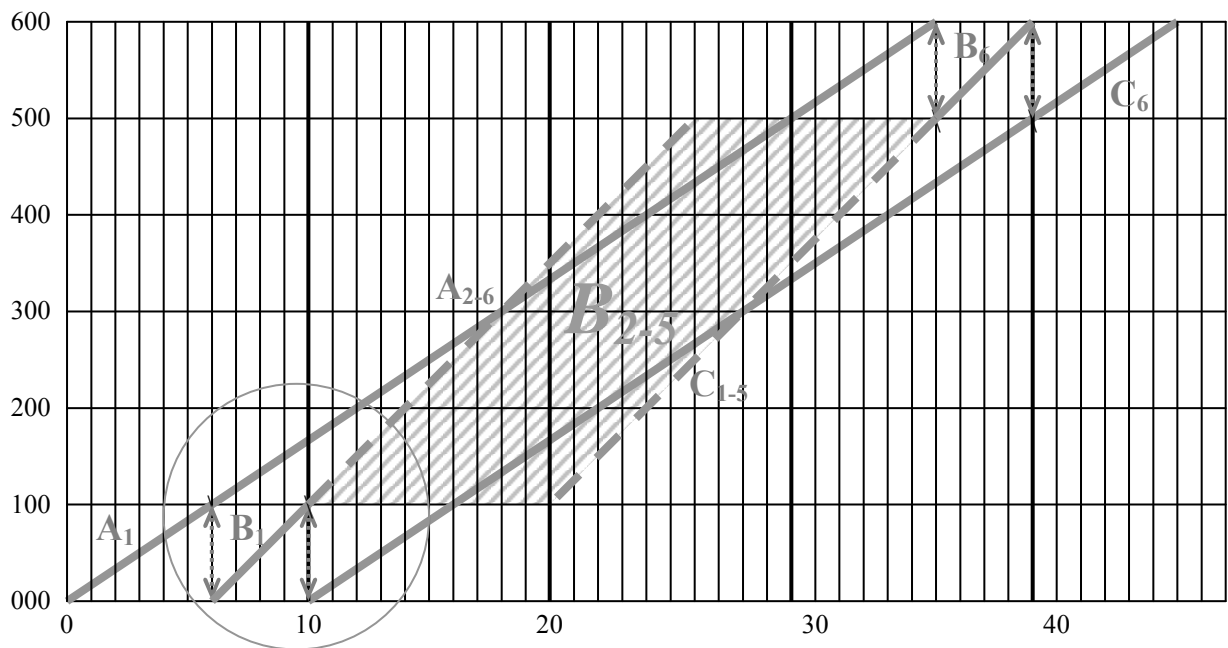
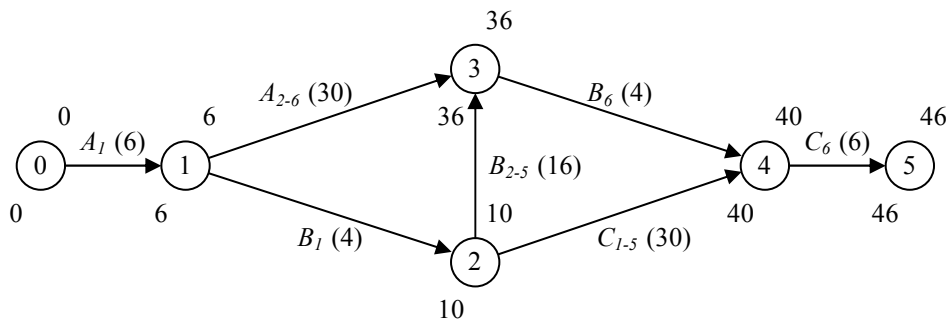


E viszonylag „elegáns” megoldással (a tevékenység-időtartamok illetően összecsengése mellett) valóban a feltételeket teljesítő, helytálló idő ütemterv alakítható ki.



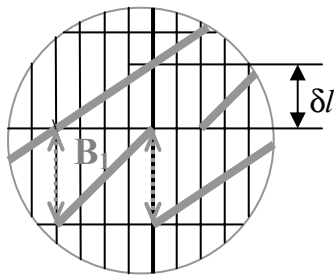
Az eleganciát azonban elhomályosíthatja, hogy e „logikai” modellünk a tevékenység időtartamokra fokozottan érzékeny, nem „állékony”, amire az E.3 feladat világít rá erőteljesebben.

E.3 Az E.2 feladatnál alkotott „elegáns” hálós modellünk más időadatokkal súlyos műszaki el-
lentmondásokra vezet, amire a hálós modell – önmagában – nem hívja fel a figyelmet!



Mint az a ciklogrammon látható, a középső szakaszokon a B₂₋₅ „tevékenység-rész” ütemezése a modellen belül nem kellően tájékoztatott. Munkafrontja nem csak hogy túl közel kerül a többi munkafronthoz, de modell szerinti ütemezése szélső időhelyzetekben kifejezett „technológiai fordulásra” vezetne. A korai időhelyzetek szerint a 300m–500m szakaszon hamarabb megtörténik a csatornafektetés, mint ahogy egyáltalán kinyitásra kerül az árok, (a késői időhelyzetek szerint pedig a 100m–300m szakaszon hamarabb helyreállítják a munkaterületet, mint ahogy lefektetik a csatornát,) ami nyilvánvaló képtelenség.

Ha visszatérünk a fentebb bemutatott „felduzzasztott” (6 db 100m-es szakaszra bontott) hálós modellhez, a technológiai fordulás kérdését – a paradox időhelyzet virtuális lassítással történő feloldásával⁸ egyidejűleg – kivédjük ugyan, de a szakaszhatárokon a munkafrontok még így is túl közel kerülnek egymáshoz. (Lásd pl.: bekarikázott rész az ütemterven.)

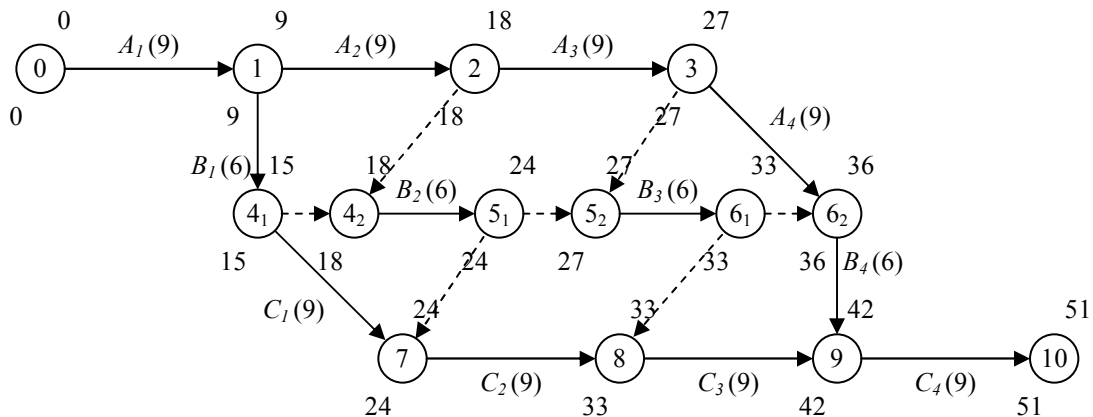


A tevékenység intenzitások (itt tevékenységidők) alapján elvileg meghatározhatók az előírt minimális térköz biztosításához szükséges (L) szakaszhosszak ...

$$\delta l = L \cdot (D_B / D_A) \rightarrow L = \delta l \cdot (D_A / D_B) = 100 \cdot (36 / 24) = 150 \text{ m}$$

... ami alapján megalkotható egy „szabatos” modell.

Esetünkben a megoldás a munkaterület 4 db 150-150 m hosszú szakaszra bontása lehet. Az időelemzésből kiderül, hogy így a kalkulált teljes átfutási idő 51 nap. Tehát: a generál ütemterv szabta időkorlátok miatt a munkálatok határidőre történő elkészítéséhez 6 napos munkahetek előirányzása (a helyi önkormányzattól illetően tartalmú építési engedély beszerzése) szükséges. (Az ütemterv fentiek mintájára történő megrajzolását az olvasóra bizzuk.)



Megjegyzés:

A fő probléma az átlapolt időhelyzetek modellezésével a CPM „nyelvben” az, hogy a kényyszerűen spekulatív elemekre (számszerű adatok előzetes ismeretére) épülő modellben a tevékenység-időtartam adatok viszonylag kismértékű változása esetén is már magához a hálós struktúrához kell hozzányúlnunk. A logikai struktúra állékonysága – ami pedig a hálós időmodelleknél alapkövetelmény – így alapvetően a számadatok állékonyságának függvénye.

⁸ Lásd: Időtervezés – „lassítási paradoxon”, vagy „időtartam paradoxon”

F – A PERT^{time} MODELL

A projektmenedzsment területén alkalmazott hálós időtervezési eljárások közül talán legismertebb az alkalmasságát a „nagy-politika színpadán” bizonyító, és kidolgozói által PERT néven „reklámozott” összetett menedzsment-kontrolling technika. Bár magának az angol szónak konkrét jelentése is van (miszerint: „pert” = okos, ügyes, fürge), a névválasztás mögött a *Program Evaluation and Review Technique* (= Program Értékelő és Áttekintő Technika) megnevezés rövidítése áll. Problémakezelési módja és az alkalmazásának történelmi körülményeit övező érdeklődés miatt híressé-hírhedtté vált technika oly mély nyomot hagyott az alkalmazott „menedzsment tudományban”, hogy sok helyen a szakirodalomban, illetve számos szoftveralkalmazásban a hálós időmodellek grafikus (értsd: „gráf”) reprezentációját egyszerűen csak „*pert-diagram*”-ként referálják.

A PERT modellt az 1950-es évek második felében³ az Amerikai Egyesült Államok Haditengerészeténél létrehozott *Különleges Projektek Irodája* – együttműködve a *Lockheed* gyár *Rakétarendszerek Osztályával* és a menedzsment tanácsadó cég, a *Booz-Allen & Hamilton* szakembereivel – dolgozta ki a Haditengerészet kötelékében rendszerbe állítandó, tengeralattjáróról indítható nukleáris hadászati rakétarendszer kifejlesztését célzó *POLARIS*⁴ projekt koordinálására. A számításokat az akkor a virginiai Dahlgrenben működő IBM Naval Ordinance Research Computerére (NORC) adaptálták.

Az igazi kihívást alapvetően az jelentette, hogy hasonlóan bonyolult, összetett fejlesztési projektekre példa, tapasztalat azelőtt még nem volt. Mind a költségek-, mind a végrehajtáshoz szükséges időtartamok előrejelzését, becslését erőteljes bizonytalanság jellemezte. Az igen nagy számú közreműködőből (több mint 9000 alvállalkozó és beszállító) és az egymásra épülő műszaki, technikai fejlesztésekből adódóan a késedelemben esés „kockázata” igen nagy volt. A PERT alapvetően az egyes tevékenységek időtartamára – mint bizonytalan változókra, illetve azok valószínűség-elméleti paramétereire (eloszlás, várható érték, szórás) – és összefüggéseire fókuszálva próbált az erőforrások optimális átcsoportosításához támpontot nyújtani a lehető legrövidebb teljes átfutási idő elérése végett.

A modellben minden egyes fő- és alvállalkozó legalább egy tevékenységgel volt reprezentálva. A tevékenységek időtartamának becslésébe épülő bizonytalanságot β -eloszlással közelítették, melynek várható értékét és szórását a vállalkozók által szolgáltatott hármas („optimista-”, „realista-”, „peszsimista”) időbecslés alapján határozták meg. (A hármassal időbecslést minden egyes szerződés esetében kiértékeltek, meghatározták a teljesítés valószínűsíthető időigényét és feltételrendszerét, amit azután egységes egészbe fogtak. Innen a név: „program értékelő és áttekintő technika”.)

Komplex szemléletének, a dolgokat összefüggéseikben kezelő megközelítésnek köszönhetően, a ráragadó erőteljes bizonytalanságok ellenére a módszer teljes sikerrel debütált. A POLARIS projektben megfogalmazott célokat⁵ az előzetesen („PERT-előtti időbecsléssel”) megállapított határidő előtt két évvel (közel 45%-kal rövidebb idő alatt) sikerült megvalósítani. A projekt irányításában résztvevőknek – a túlhajtott média-érdeklődéstől függetlenül – okkal hozhatott „sikert és szakmai elismerést” a projekt menedzselésénél alkalmazott újszerű *menedzsment-kontrolling* rendszer. ...

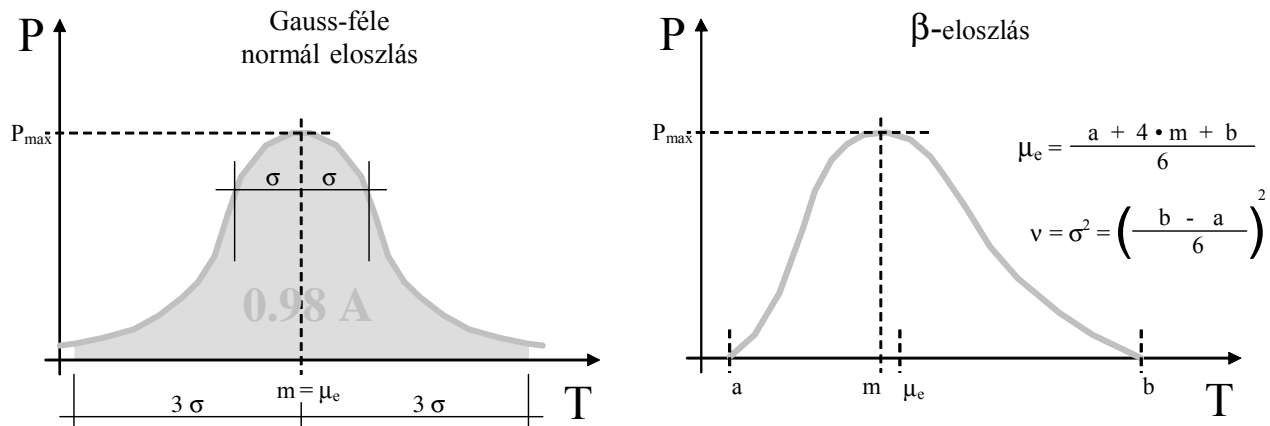
³ Az eljárást a szakmai közvélemény előtt a kutatócsoport vezetője, Willard Farard 1958-ban ismertette. (?)

⁴ A II. Világháborút követően az Egyesült Államok és a Szovjetunió között dúló „hidegháborús időszakban” uralkodó katonai doktrína a kölcsönös megsemmisítés (Mutually Absolute Destruction = MAD) elvére épült. E szerint: bármelyik fél mér első csapást a másikra, annak elegendő ereje marad halálos csapást (vissza)mérni a támadó fél területére (egész országára). Ez a kölcsönös megsemmisítő képesség volt e felfogás szerint a béke biztosítója. Az 1950-es végén az Egyesült Államok vezetői úgy értékelték („úgy vélték, hogy az oroszok azt hihetik”), hogy az Egyesült Államok szárazföldi telepítésű nukleáris fegyverei túl sebezhetőek egy esetleges őket érő első csapással szemben. A POLARIS projekt „kiemelt nemzeti jelentőségű” besorolást kapott. A cél a lehető leggyorsabb kivitelezés. A pénz „nem számít”.

⁵ A POLARIS projektről bővebben lásd a hasznos olvasmányok között mellékelte „A POLARIS projekt, egy forradalmi új fegyver-rendszer és koncepció”, valamint „A POLARIS rendszer kifejlesztése” c. cikket.

Miért pont β eloszlás?

Az általános tapasztalat szerint a természetben – és humán környezetben is – igen sok jelenség mérhető kimenetelének valószínűségi eloszlása („sűrűség”, ill. „gyakoriság-függvénye”) a Gauss által formalizált harang-görbe jellegűt mutatja („Gauss-féle normál eloszlás”). Összetett műszaki problémák becslésénél azonban – az egyes „véletlen” összetevők lényegesen determináltabb voltára tekintettel – célravezetőbb lehet a véletlen változók értékét (az összetevők szintjén) β -eloszlással közelíteni. A két eloszlás közötti lényegbeli különbségeket az alábbiak szerint lehet összegezni:



- A Gauss-féle normál eloszlás a várható értékre (μ_e) szimmetrikus, és várható értéke megegyezik a legnagyobb (P_{\max}) valószínűségű (leggyakoribb előfordulású) értékkel (m);
- A Gauss-féle normál eloszlás a (T) változó korlátlan értéktartományán értelmezett. Bármilyen extrém értékének van zérusnál nagyobb előfordulási valószínűsége (P). Az eloszlás-görbe aszimptotikusan közelít a T tengelyhez, azt soha el nem éri.

Ezzel ellentétben:

- A β -eloszlás nem feltétlenül szimmetrikus a várható értékre, várható értéke (μ_e) nem feltétlenül esik egybe a legnagyobb (P_{\max}) valószínűségű (leggyakoribb előfordulású) értékkel („ m ”);
- A β -eloszlás a (T) változó korlátos értéktartományán értelmezett. Adott, jól lehatárolható értéktartományon kívüli értékek előfordulási valószínűsége (P) zérus. Az eloszlás-görbe az értéktartomány határainál („ a ” és „ b ”) eléri a T tengelyt.

A PERT-nél alkalmazott, „feltételezett β -eloszlás” paramétereinek meghatározásához „szükséges” hármas időbecslésre (a - m - b) nézzünk egy egyszerű példát!

Lakásomban – bentlakás mellett – szeretném a hozzávetőlegesen 10 m²-es konyhámat felújítani (új padló- és falburkolat, mosogató, csaptelep, gáztűzhely, fűtés, festés), melyhez vállalkozói ajánlatokat kérek.

- Megérkezik az első vállalkozó: „Mikor tetszenek itthon lenni? Á, szombat reggel, nagyon jó! Akkor kora reggel jövünk. Estére készen is leszünk.” (?) ... Valószínűleg megköszönjük az ajánlatát és inkább más vállalkozóval tárgyalunk.
- Jön a második ajánlkozó: „Hát, uram! Ez igen összetett munka. Kicsi a hely, bontás, mérés, kötési idők, majd a gázos vagy jön, vagy nem. ... Hát, jó másfél-, két havi munkára számítani kell!” (?) ... De, hiszen mindez idő alatt ott akarunk élni! ... Valószínűleg még „elgondolkodunk” az ajánlatán és további ajánlkozókkal tárgyalunk.

- A harmadik vállalkozó felméri a terepet, számol, „szabad hozzáférést” kér és jó esetben egy, de inkább – „a biztonság kedvéért” – másfél, két hetet becsül. ... Nos, ez már jobban hangzik. ... Jó eséllyel mellette döntünk.

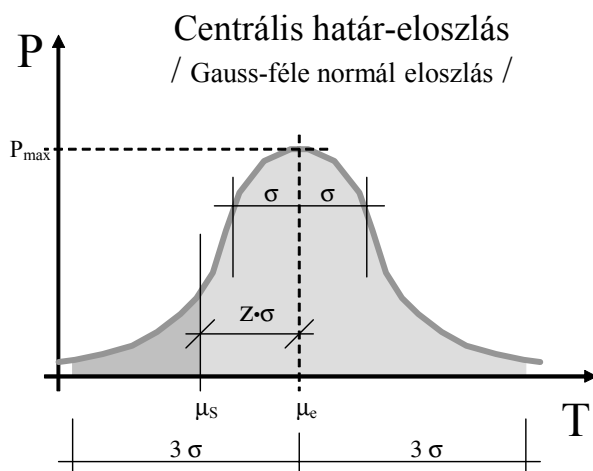
Úgy is szoktuk mondani, hogy a legkisebb – optimista (a) – időtartam-értéket a technikailag szükséges minimum alapján lehet *érezni*. A legnagyobb – pesszimista (b) – értéket gazdasági-, gazdaságossági megfontolások alapján („mennyi időt vagyok hajlandó rászáni – egyébként más megoldásban gondolkodom”) lehet *megfogni*. A legvalószínűbb – realista (m) – értéket pedig valami hasonló gyakorlat, összevethető tapasztalat alapján lehet *becsülni*.

Előbbi példákra visszatérve: Sejtjük, hogy legalább egy hét kell a szükséges munkálatok szakszerű elvégzéséhez (a=5 nap). Ha három hétnél tovább tart, akkor inkább máskorra halasztjuk, amikor majd ideiglenes kiköltözés mellett az egész lakást rendbe tetetjük (b=21 nap). Egyébként – valószínűleg jó nagy levegővétel után – két hetet (m=10 nap) előíranyozva belevágunk.

Bár bizonyos korlátozások mellett a β -eloszlás várható értékének (μ_e) és szórásának (σ) számítására használt fenti összefüggések igazolhatók, azok eredendően csak közelítő értékek meghatározásának tekintendők⁶. A gyakorlat oldaláról viszont e pontatlanságból adódó hiba eltörpül magának a hármas becslésnek a bizonytalansága-, illetve a szabatos értékek meghatározásához szükséges számítási többletigények mellett. (Gondoljunk a nagy-mennyiségű adatra, és a korabeli számítástechnikai kapacitásokra, amit a POLARIS projekt esetében kezelni tudhattak az első alkalmazók.)

A várható érték, mint súlyozott átlag képletében, illetve a szórás képletében szerepelő a 6-os szám is gyakorlati mérlegelés eredménye. A normál eloszlás görbéje alatti terület mintegy 98 %-a (a lehetséges kimenetek 98 %-a) a $-3\sigma - +3\sigma = 6\sigma$ értéktartományon belül helyezkedik el (lásd fenti ábrák). A 98 %-os pontosság, avagy 2 %-os hibahatár pedig „mérnöki szemmel” már elfogadható.

A *centrális határ-eloszlás tétele*⁷ értelmében – miszerint nagy-számú, bármilyen eloszlású, sztochasztikusan egymástól független valószínűségi változó összegének eloszlása a Gauss-féle normál eloszláshoz közelít – a projekt teljes átfutási idejének becslésénél a lehetséges kimenetek eloszlását normál eloszlásúnak feltételezzük. A Gauss-féle normál eloszlás legfőbb erénye pedig abban áll, hogy abból csak „egy” van.



Halmozott valószínűség (CP) a várható értéktől (μ_e) mér távolság ($z \cdot \sigma$) függvényében			
Z	CP	Z	CP
-2.0	0.02	+0.1	0.54
-1.5	0.07	+0.2	0.58
-1.3	0.10	+0.3	0.62
-1.0	0.16	+0.4	0.66
-0.9	0.18	+0.5	0.69
-0.8	0.21	+0.6	0.73
-0.7	0.24	+0.7	0.76
-0.6	0.27	+0.8	0.79
-0.5	0.31	+0.9	0.82
-0.4	0.34	+1.0	0.84
-0.3	0.38	+1.3	0.90
-0.2	0.42	+1.5	0.93
-0.1	0.46	+2.0	0.98
± 0.0	0.50		

⁶ Bővebben a β -eloszlásról lásd: Klafszky Emil, ...

⁷ Bővebben lásd: ...

„Egy”-sége abban rejlik, hogy a normál eloszlású véletlen változók eloszlás-görbéi legfeljebb csak várható értékükben (μ_e) és/vagy szórásuk (σ) nagyságában térhetnek el egymástól, a görbe „harang”-jellege változatlanul megmarad. Ezt a „változatlaniságot” kihasználva minden valamire való statisztikai kézikönyv a mellékletei között tartalmaz a normál eloszlásról olyan táblázatokat, aminek segítségével – a várható érték és a szórás ismeretében – a változó bármely véletlen értékéhez (μ_s) tartozó valószínűségi értékek, mint például a halmozott valószínűségi értékek (CP = Cumulative Probability) kiolvashatók. Mindössze a vizsgált értéknek, mint véletlen kimenetnek a várható értéktől szórás-egységben mért távolságát ($Z=(\mu_s-\mu_e)/\sigma$) kell előzőleg kiszámolni. (Lásd fent)

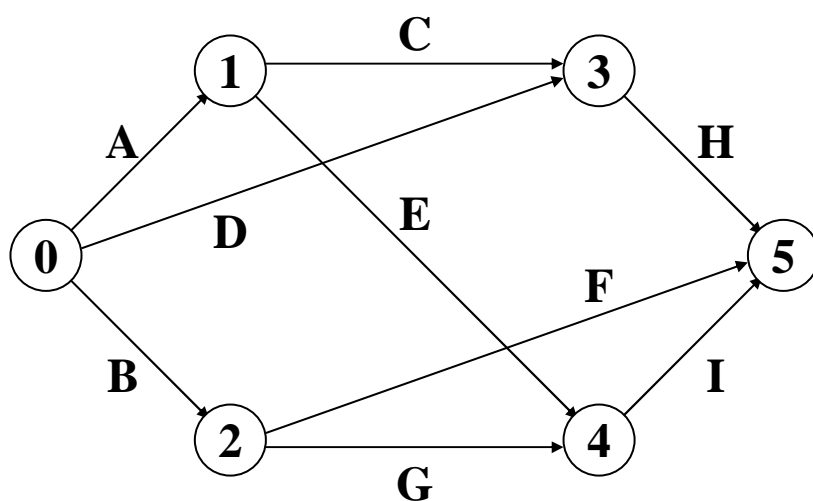
Emlékeztetőül:

- Várható érték (μ_e): az eloszlás-görbe alatti terület súlypontja;
- Szórás (σ): átlagos négyzetes eltérés;
- Halmozott valószínűségi érték (CP): annak valószínűsége, hogy a véletlen változó értéke az adott (μ_s) értéknél nem lesz nagyobb. (Görbe alatti terület a változó adott értékétől balra.)

A PERT modell „működésének” szemléltetésére – a történelmi valóságtól messze álló, de korabeli, békésebb és kitalált döntési környezetbe helyezve – álljon itt az alábbi példa:

Képzeljük el, hogy 1960 áprilisában járunk. Tombol a Hidegháború, hatalmas (pusztító-)energia felhalmozás jellemzi a nagy-politikát irányító államokat, sőt már az Űr meghódításáért folyik esze-lős presztizs verseny a nagyhatalmak között. A szovjetek már 1957-ben fellőtték a Szputnyik 2 űrhajót, amelyben nem sokkal az Űrbe lépést követően elpusztult (sokkot kapott és túlhevült) Lajka kutya, sőt most már ember feljuttatására készülnek. Folyik a leendő űrhajósok (valami Iljushin, vagy Gagarin) felkészítése és a hírszerzési adatok szerint a fellövést következő év így áprilisa tájára tervezik. Amerikai részről csimpánzokat lövöldöznek bőszen az Űrbe és a vadászpilóták is nagy-magasságú repülésekkel ostromolják az eget, izlelgetik a súlytalanság-közeli állapotokat. Ebben a feszült verseny-helyzetben az Egyesült Államok 34. elnöke, Dwight D. Eisenhower magához rendeli a frissen létrehozott Országos Repülésügyi és Űrkutatási Hivatal (NASA) program-igazgatóját, adjon tájékoztatást, mikor lőhetik fel az első amerikai űrhajóst, illetve mi az esélye annak, hogy Amerika hamarabb juttat Föld körüli pályára – és hoz vissza onnan élve (Az az igazi attrakció!) – embert, mint az oroszok. ...

Kutatási eredményekről előremutató időadatot mondani?! Megjósolni bizonyos eredményeket még csak-csak lehet, de ahhoz dátumot rendelni?! Az éppen folyó munkálatok állapotait és belső összefüggéseit megjelenítendő a szakemberek az alábbi hálós modellt vázolják fel, a rész-munkálatok befejezéséhez szükséges – havi léptékű – idő-igények becslésével. Kérdés: Mi az esélye annak, hogy az így „leltárba vett” munkálatokhoz szükséges idő nem lesz nagyobb 12 hónapnál?



	a	m	b	μ_e	v
A	5	6	7		
B	3	5	7		
C	0	3	12		
D	6	7	8		
E	3	3	3		
F	1	5	9		
G	1	3	5		
H	0	2	4		
I	2	4	6		

Feladatunk eredeti kérdésének megválaszolásához és az időelemzéshez szükséges háttér-számítások köztes- és eredményadatait a fenti ábrán a háló-diagramon, illetve a mellette lévő segéd-táblázatban összegeztük. (A táblázatosan összefoglalt időbecslések adatait és származtatott értékeiket a tevékenység-élek mentén, a gráfon is feltüntettük.)

A háló időelemzése a várható értékek – mint diszkrét értékek – figyelembe vételével történt, az előző fejezetekben bemutatott idő-elemzési algoritmusok alkalmazásával. Az eredményül kapott- és az egyes csomópontokhoz rendelhető „legkorábbi” és „legkésőbbi” közös határidő-értékek (időpotenciálok) a csomópontok felett-, illetve alatt láthatók. Az időelemzés alapján a 0-1-4-5 csomópontok között beazonosítható a leghosszabb időtartamú A-E-I tevékenység-lánc, mint „kritikus út”.

A mértékadó út mentén a „nagyszámú, egymástól független” (fikció!) valószínűségi változó összegének eloszlása – azaz a háló teljes átfutási idejének eloszlása – feltételezésünk szerint normál eloszlású, melynek várható értéke az összetevők várható értékének összegeként, szórása az összetevők szórás-négyzeteinek összegéből vont négyzetgyök alapján számítható.

A háló teljes átfutási idejének (μ_T) várható értéke: $\mu_T = \mu_A + \mu_E + \mu_I = 6 + 3 + 4 = 13$ hónap, és „bizonytalansági mutatója”, azaz szórása (σ_T):

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_E^2 + \sigma_I^2} = \sqrt{v_A + v_E + v_I} = \sqrt{1/9 + 0/9 + 4/9} = \sqrt{5/9} = 0.7457$$

Megjegyzés:

Példánknál a kis szórás-érték alapvetően annak köszönhető, hogy a mértékadó tevékenység-láncon lévő független változók „nagy száma” esetünkben erős túlzásnak mondható, melyre ráadásul rákerült egy bizonytalansággal (szórással) gyakorlatilag nem terhelt tevékenység (E).

A várható érték és szórás ismeretében, valamint a fentebb bemutatott táblázat segítségével annak esélye, hogy a háló teljes átfutási ideje nem lesz hosszabb 12 hónapnál (CP_{12}), meghatározható:

$$(Z = (\mu_s - \mu_T) / \sigma = (13 - 12) / 0.7457 = -1.3416) \rightarrow CP_{12} \approx 0.09$$

Kis példánk „háttér-magyarozatára” visszatérve: A következő kihallgatáson a NASA programigazgatója jelentheti az elnöknek: „Elnök úr! Annak esélye, hogy mi hamarabb juttatunk Föld körüli pályára asztronautát, mint ahogy azt a hírszerzők jelentése szerint az oroszok tervezik, kevesebb, mint 10 %.” (Mire az elnök – pillanatnyi csüggedés után: „Hm! Akkor most hagyjuk az oroszokat! Legfeljebb majd mi megyünk először a Holdra! ... És 1969. július 20-án Neil Armstrong – elsőként az emberiség történetében – kis lépéssel a Holdra léphet.”)

A PERT modell első alkalmazásának valós történelmi körülményeiről „hitelesebben” lásd a Hasznos olvasmányok között mellékelt „POLARIS” cikket.

A „lazaság” mérőszáma a hálón – Slack

A mértékadó gráf-részen kívüli csomópontokhoz rendelhető legkésőbbi és legkorábbi időpotenciálok különbsége – amit a módszer kifejlesztői „slack” („lazaság”) névvel illettek, és amit mi az előzőekben „csomóponti tartalékidő”-ként definiáltunk – valószínűségi mutatókkal szintén jellemezhető. A csomóponti tartalékidő várható értékét (μ_{eSlack}) a legkésőbbi időpotenciál (π') várható értékének ($\mu_{e\pi'}$) és a legkorábbi időpotenciál (π) várható értékének ($\mu_{e\pi}$) különbségeként számítjuk, „bizonytalanságát” pedig a két normál-eloszlású feltételezett valószínűségi változó (π' és π) eloszlásának „különbségeként” határozzuk meg.

$$\mu_{eSlack} = \mu_{e\pi'} - \mu_{e\pi}, \quad \text{illetve} \quad \sigma_{Slack} = \sqrt{\sigma_{\pi'}^2 + \sigma_{\pi}^2}$$

A „slack”-hez kapcsolódó vizsgálatok többnyire annak pusztán „valószínűségére” irányulnak: Mi az esélye annak, hogy lesz „0”-nál nagyobb, értelmezhető „csomóponti tartalékidő”? (Milyen eséllyel válik az adott csomópont a mértékadó „leghosszabb” út részévé?)

Megjegyzések:

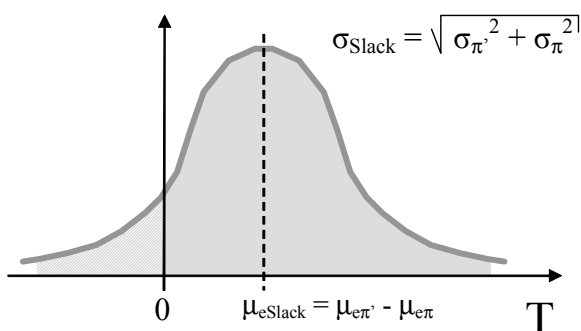
- A legkorábbi időpotenciál szórását a forrás és az adott csomópont közötti-, a legkésőbbi időpotenciál szórását pedig az adott csomópont és a nyelő közötti leghosszabb úton lévő tevékenységek szórás-négyzeteinek összegéből vont négyzetgyök számításával határozzuk meg.
- A legkorábbi és legkésőbbi időpotenciálok meghatározásánál, ha több azonos várható értékű „mértékadó tevékenység-láncolat” (leghosszabb út) is van, akkor a szórás szempontjából a nagyobb szórású út-variánst tekintjük ténylegesen mértékadónak.

Statisztika / sztochasztika, mint időjós

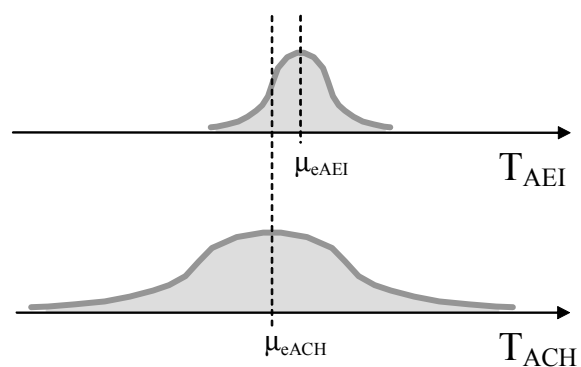
Sokszor éri vád a sztochasztikus módszereket, hogy konkrét feltett kérdésekre adott válaszuk akár a Dodonai Jósda információival is összemérhető. Hasonlóan a statisztikák alapján tervezett nemzetgazdasági irány-számokhoz, ha a belső összefüggések, konkrét ok-okozati viszonyok, összefüggérendszer vizsgálatától eltekintünk, a statisztika-szülte mutatók, eredmények valóban csak „számszönglörködésnek” bizonyulhatnak. Bár a PERT modellben a modellezett projekt belső összefüggéseinek feltárására is nagy gondot fordítanak, amit a hálós összefüggés-rendszer képvisel, sztochasztikus jellege miatt ez sem mentes a modell- és a modellezett jelenség közötti ellentmondásoktól.

Egyik ilyen ellentmondás a csomóponti tartalékidő értelmezésénél jelentkezik. Ha az egyes csomópontokhoz rendelhető legkorábbi és legkésőbbi idő-potenciáloknak – mint származtatott sztochasztikus értékeknek – a feltételezett normál eloszlás szerinti lehetséges értékeit tekintjük, a megoldáshalmaznak olyan esete is része lehet, amikor a legkésőbbi időpotenciál (π') kisebb értéket mutat, mint a legkorábbi időpotenciál (π). Ez nyilvánvaló ellentmondás. (Lásd: bal oldali ábra, lent.) ...

A „slack” várható értéke és eloszlása
/ Gauss-féle normál eloszlás /



Akkor most melyik a mértékadó ?



A másik, még nagyobb gondot jelentő ellentmondás abból adódik, hogy a háló teljes átfutási idejének várható értékét a tevékenységek várható értékeivel számított leghosszabb út hosszával azonosítjuk, miközben az egyes utakat alkotó élek hosszainak esetlegesen lényegesen eltérő mértékű szórásai fölött elsiklunk. A látszólag nem mértékadó utakra kevésbé fordítunk figyelmet, holott – akár mint példánkban is – egy lényegesen nagyobb szórású mutató, de kisebb várható értékű út hossza

„extrém” esetben lényegesen nagyobb értéket is felvehet, mint az egyébként mértékadónak tekintett, nagyobb várható értékkel, de kisebb szórással bíró út hosszának ugyancsak „extrém” értéke.

$$\begin{aligned} \text{Lásd: } \quad \sqrt{v_A + v_C + v_H} &= \sqrt{1/9 + 36/9 + 4/9} = \sqrt{41/9} = 2.1343; \\ \mu_{eA} + \mu_{eC} + \mu_{eH} &= 6 + 4 + 2 = 12; \quad b_A + b_C + b_H = 7 + 12 + 4 = 23; \\ \mu_{eA} + \mu_{eE} + \mu_{eI} &= 6 + 3 + 4 = 13; \quad b_A + b_E + b_I = 7 + 3 + 6 = 16. \end{aligned}$$

A PERT modell, mint matematikai feladat, illetve annak „lehatárolása”, valamint hibáinak becslése, avagy „kiküszöbölése” hatalmas matematikai apparátus megmozgatására képes, és vélhetően még sokáig kínál olyan továbbfejlesztési lehetőségeket, melyek a felmerülő újabb és újabb „árnyalatoakat” is képesek lesznek beépíteni egy-egy újra-fogalmazott műszaki probléma modellezéséhez.

Igaz, gyakorlati időtervezési feladatoknál az „eredeti” PERT-et – pont a bizonytalansági tényező okán – már nemigen használják, képességei erős bizonytalanságokat hordozó esetekben, avagy jogi vitákkal kapcsolatos szakértéseknél kerülhetnek előtérbe. Sztochasztikus jellegéből adódóan leginkább „érzékenység-vizsgálatok” végzéséhez kínálkozik eszközül, mikor is nagy-számú véletlengenerált adatokkal azt vizsgálják, hogy egy-egy tevékenység, avagy becsült idő-érték az esetek milyen arányában, milyen összefüggések mellett vált, avagy válhat mértékadóvá. (Vajon a perbe fogott alvállalkozó önhibájából esett-e késedelembe, vagy mások késedelmének következtében nem tudott időre teljesíteni? Milyen mértékben tehető egyáltalán felelőssé a teljes projekt késedelméért?)

Tekintve, hogy magával a CPM/PERT hálós időmodell szerkesztésével és az időelemzéssel – ezen belül a csomópontokhoz rendelhető határidőpontok meghatározásával – már az előző fejezetekben foglalkoztunk, annak lépéseit az olvasó által ismertnek feltételezzük. Az alábbi gyakorló feladatokat alapvetően a bizonytalansággal (valószínűséggel) összefüggő információknak szenteljük.

Gyakorló feladatok:

A fenti PERT időmodell tanulmányozása útján nyerhető további információk jegyében ...

- F.1 feladat: Határozza meg annak esélyét, hogy a 3. sz. csomópont („esemény”) ütemezésében lesz idő-tartalék (0-nál nagyobb értékű tartalékidő)!
- F.2 feladat: A fenti PERT feladat időelemzéséből kiderül, hogy a háló (projekt) teljes átfutási idejének várható értéke 13 hónap. Más szavakkal: A projekt teljes átfutási idejéről (a leghosszabb út hosszáról), mint normál eloszlású valószínűségi változóról – 50 %-os „bizonyossággal” – kijelenthető, hogy annak értéke nem lesz nagyobb 13 hónapnál. Határozza meg azt az időtartamot, melynél a háló (projekt) teljes átfutási ideje 90 %-os „bizonyossággal” nem lesz hosszabb!
- F.3 feladat: Határozza meg annak esélyét, hogy az „E” tevékenység nem lesz kritikus (nem lesz rajta a mértékadó leghosszabb úton)!
- F.4 feladat: Készítsen összefoglaló táblázatot arról, hogy a háló (projekt) teljes átfutási ideje 50, 60, 70, 80, 90, 98 %-os bizonyossággal milyen időtartamnál nem lesz hosszabb. Mindezen bizonyossági „mértékek” mellett miként alakul a mértékadó (időben leghosszabb) tevékenységlánc? (Más szavakkal: Az elvárt „bizonyosság” függvényében mely tevékenységláncra kell nagyobb figyelmet fordítanunk?)

Feladat megoldások

F.1 A kérdés megválaszolásához a csomóponti tartalékidő várható értékének és szórásának képzetét használjuk:

$$\mu_{\text{Slack}} = \mu_{\text{e}\pi'} - \mu_{\text{e}\pi} = 11 - 10 = 1; \quad \sigma_{\text{Slack}} = \sqrt{\sigma_{\pi'}^2 + \sigma_{\pi}^2} = \sqrt{(1/9 + 36/9) + (4/9)} = 2.1343;$$

Az F-3 oldal alján közölt, standard-normál eloszlásra vonatkozó CP=f(Z) táblázatból a kérdés „ellentettje” olvasható ki: Mi az esélye annak, hogy a 3. sz. csomópontnál a csomóponti tartalékidő 0-nál nem lesz nagyobb:

$$Z = (\mu_s - \mu_e) / \sigma = (0 - 1) / 2.1343 = -0.4685 \Rightarrow CP = 0.32;$$

Az eredeti kérdésre a válasz: Annak esélye, hogy a 3. sz. csomópontnál lesz (0-nál nagyobb) csomóponti tartalékidő: (1.00-0.32=0.68) \Rightarrow 68 %.

F.2 Az F-3 oldal alján közölt standard-normál eloszlásra vonatkozó CP=f(Z) táblázatból kiolvasható, hogy 90 %-os valószínűséghez a szórás Z=+1.30 -szoros értéke tartozik. Ezek szerint (felhasználva a már ismert számítási eredményeket) az az érték, melynél az A-E-I „mértékadó” („leghosszabb”) tevékenység-lánc hossza 90 %-os bizonyossággal nem lesz hosszabb:

$$\mu_{90\%} = \mu_{50\%} + Z \cdot \sigma = 12 + 1.30 \cdot 0.7457 = 13.9694 \approx 14 \text{ hónap.}$$

Csak hogy (itt szembesülünk a mértékadó tevékenység-lánc beazonosításának egyik „ellentmondásával”): A gráf-modellen a forrásból a nyelőbe több út is vezethet (esetünkben pl. 5: A-C-H, A-E-I, B-F, B-G-I, D-H), melyek valószínűségi mutatói nem csak a várható (50 %-os valószínűségű) értékeknél, de a szórásoknál is lényegesen eltérhetnek.

Az alábbi táblázatban összefoglaltuk az 5 db forrás-nyelő út (P[0-5] tevékenység-lánc) hosszának különböző valószínűségi értékekhez tartozó értékeit.

$\mu_s = f(\text{CP})$			CP: 0,50 0,60 0,70 0,80 0,90 0,98					
P[0,5]	μ_{eT}	σ	Z: 0,00	0,25	0,53	0,83	1,30	2,00
A-C-H	12	2,13	12,00	12,53	13,13	13,77	14,77	16,27
A-E-I	13	0,75	13,00	13,19	13,40	13,62	13,97	14,49
B-F	10	1,49	10,00	10,37	10,79	11,24	11,94	12,98
B-G-I	12	1,15	12,00	12,29	12,61	12,96	13,50	14,31
D-H	9	0,75	9,00	9,19	9,40	9,62	9,97	10,49

Min látható, 90 %-os valószínűségnél a lényegesen nagyobb szórású A-C-H tevékenység-lánc hossza: 14.77 \approx 15 hónap!

Megjegyzések:

- Fontos észrevenni, hogy nem az egyes tevékenységek 90 %-os valószínűséghez tartozó értékei alapján számoltunk, hiszen ekkor a független tevékenység-időtartam értékeket (a „mindenütt 90 %-os” megköötéssel) függésbe hoztuk volna, hanem a teljes forrás-nyelő utak hosszát (mint sztochasztikusan független változók összegét) vizsgáltuk.

- Kis példánknál a független változók „nagy száma” alighanem „erős túlzás”. E kis méretű feladat eleve nem teljesítheti a „nagy számok” (értsd: nagy számú véletlen adat) kitételét. (Gondoljunk csak a „centrális határ-eloszlás tétele” érvényesülésének lehetőségére, azaz a normál eloszlással való közelítés feltételére.)
- Gyakorlati alkalmazásoknál, nagy számú tevékenységet és sok közös útváriáns-részt tartalmazó PERT modelleknél kevésbé várható, hogy az egyes útváriánsok valószínűségi jellemzői (várható érték, illetve szórás) egymással ellentétes értelemben kiugró értékeket produkáljanak (nagy várható érték, kis szórás - és viszont). A feladat eredeti kérdésének megválaszolásához vélhetően elegendő a mértékadó (50 %-os valószínűségi értékhez tartozó) út (tevékenység-lánc) további vizsgálata (mint azt a feladatmegoldás ismerttetésének elején tettük). Másrészt a lehetséges útváriánsok számbavétele (egyedi vizsgálata) vélhetően a „kombinatorikai robbanás” (faktoriálisan növekvő méretű feladat) akadályába ütközne, praktikusán nem járható útnak bizonyulna. Ez utóbbi helyett a véletlenséget nagy számú – véletlen generált adatokkal feltöltött – ciklusban végezett „szimulációval” lehet helyettesíteni, aminek eredményei statisztikailag értékelhetők.

F.3 Az F.2 feladat megoldásánál bemutatott táblázatból kiderül, hogy valahol a 70 %-os és a 80 %-os „bizonyossági szintek” (valószínűségi értékek) között a mértékadó út az A-E-I tevékenység-lánccról átkerül az A-C-H tevékenység-lánccra. A választóvonalat jelentő valószínűségi értékhez tartozó Z érték egyszerű egy-ismeretlenes egyenletből meghatározható:

$$\mu_{eAEI} + Z \cdot \sigma_{AEI} = \mu_{eACH} + Z \cdot \sigma_{ACH};$$

$$Z = (\mu_{eAEI} - \mu_{eACH}) / (\sigma_{ACH} - \sigma_{AEI}) = (13-12) / (2.1343-0.7457) = 0.72; \Rightarrow CP \approx 0.77;$$

Az F-3 oldal alján közölt standard-normál eloszlásra vonatkozó $CP=f(Z)$ táblázatból pedig kiolvasható az adott Z értékhez tartozó valószínűségi érték ($CP \approx 0.77$).

Az eredeti kérdésre a válasz: Annak esélye, hogy az „E” tevékenység nem lesz kritikus (nem lesz rajta a mértékadó leghosszabb úton): $(1.00-0.77=0.23) \Rightarrow 23\%$.

F.4 Lásd F.2 feladat megoldásánál közölt táblázat.

Következtetés: A leginkább várható értékek alapján a mértékadó tevékenység-lánc az A-E-I tevékenységek láncolata lesz. Hozzávetőlegesen 77 %-os „bizonyossági igény” fölött azonban figyelmünket elsődlegesen a kiemelkedően nagy „bizonytalansággal” terhelt A-C-H tevékenység-lánccra kell fordítanunk.

Megjegyzések:

- Az e fejezetben bemutatott feladatok nélkülözik a PERT modell elméleti korrektségéhez szükséges jellemzőket (nagy számú, egymástól független tevékenységek). A felvetett kérdések és megoldások alapvetően a PERT modell segítségével nyerhető információkra mutatnak példát.
- Hasonlóan a „CPM^{cost}” modellhez (lásd: következő fejezet), „PERT” alapvetésekkel is készíthető („PERT^{cost}”) költség-idő modell. Ezért is lehet indokolt az e fejezetben tárgyalt modellt „PERT^{time}” modell-ként megkülönböztetni.

G – MAXIMÁLIS FOLYAM – MINIMÁLIS VÁGÁS

A maximális folyam – minimális vágás feladat-pár nem kapcsolódik közvetlenül az időtervezési alap-feladathoz. A hálós időmodell által szolgáltatott kereteken belül kialakítandó tényleges ütemterv „optimalizálásánál” azonban hasznos segítséget nyújthat (lásd következő fejezet), ezért érdemes egy kis „kitérőt tenni” az irányukba. ...

Maximális folyam: A gráfokon értelmezhető útról, utakról már esett szó. Ha egy súlyozott gráf él-paraméterei (súlyszámai) az egyes éleken, mint út-részekben adott időszakban szállítható áru (termék, folyadék, energia, stb.) maximális mennyiségét jelölik, azaz a súlyszámok úgymond (szállítási) *kapacitásokat* (c_{ij}) jelölnék, akkor egy-egy út mentén értelmezhető az adott útvonalon adott időszakban szállítható áruk maximális mennyisége. Ennek nagyságát – nyilván – a „leggyengébb láncszem”, azaz a legkisebb kapacitású út-szakasz (él) kapacitása határozza meg. A kiinduló pontot, ahonnan szállítunk – ebben az összefüggésben – *forrásnak* (o), a cél-pontot pedig, ahova szállítunk *nyelőnek* (t) nevezzük. Egy-egy ilyen forrás-nyelő útvonalat, illetve az adott útvonalon a forrásból a nyelőbe szállított (szállítható) mennyiséget *elemi* (forrás-nyelő) *áramlatnak* hívunk. A forrásból a nyelőbe irányuló egyidejű elemi áramlatok összességét (a forrásból a nyelőbe irányuló) *folyamként* (Φ_{ot}) emlegetjük. A forrásból a nyelőbe irányuló elemi áramlatok összességéeként (a forrásból a nyelőbe egyidejűleg) szállítható maximális mennyiséget (a forrásból a nyelőbe irányuló) *maximális folyamnak* (Φ_{ot}^{max}) nevezzük. Egy-egy élnél az elemi forrás-nyelő áramlatok által összességében igénybevett kapacitásokat *kötött* (*lekötött*), *vagy foglalt kapacitásnak*, illetve *folyam-értéknek* (ϕ_{ij}) nevezzük, míg az igénybe nem vett (ki nem használt, fennmaradó) kapacitást *szabad kapacitásként* (d_{ij}) emlegetjük.

Figyelembe véve az „anyag megmaradási feltételeket” – miszerint egy élen „átfolyó” áramlat ellentétes irányban azonos abszolút értékkel, de ellenkező előjellel értelmezendő, valamint a forrás és a nyelő kivételével valamennyi csomópontnál a „beáramló” és a „kiáramló” folyamértékek összege zérus – a maximális folyam feladatot az alábbiak szerint lehet formálisan leírni. (A gráf csomópontjainak halmazát „N”-nel, éleinek halmazát pedig „E”-vel jelölve...):

$$\begin{aligned} \phi_{ij} &\leq c_{ij} & \phi_{ij} &= -\phi_{ji} & | & \forall ij & ij \in E \\ \sum_j \phi_{ij} - \sum_j \phi_{ji} &= 0 & | & \forall i & i \in N & i \neq o & i \neq t \\ \Phi_{ot} &= \sum_j \phi_{oj} = \sum_i \phi_{it} \rightarrow \max & | & o, j \in E & i, t \in E \end{aligned}$$

Minimális vágás: A gráf csomópontjait soroljuk tetszőlegesen két halmazba, úgy, hogy az egyik halmaz (N_o) tartalmazza a forrást, de a nyelót nem! (A másik halmaz (N_t) – nyilván – tartalmazni fogja a nyelót, de a forrást nem.) A gráf azon éleit (éleinek halmazát), melyek kezdőpontja az N_o halmazba, a végpontja pedig az N_t halmazba esik, egy (v_{ot}) *vágásnak* nevezzük. (Ezen élék „elvágasával” – megszüntetésével, avagy megfordításával – valamennyi $o \rightarrow t$ út megszűnne. Itt fontos emlékeztetni arra, hogy az irányítatlan élek egyenértékűen helyettesíthetők egy-egy ellentétes irányú és azonos súlyszámú él-párral. Lásd: Gráf-technikai alapfogalmak) A vágásbeli élek kapacitásainak összegét a *vágás* (kapacitás) *értékének* nevezzük. Egy-egy gráfon egy-egy forrás-nyelő viszonylatban jellemzően számos vágás képezhető. A forrás-nyelő viszonylatban képezhető összes vágás közül azt, melynek (kapacitás) értéke a legkisebb, *minimális vágásnak* (v_{ot}^{min}) nevezzük.

Formálisan leírva a $G[N, E, C]$ gráfon megoldandó minimális vágás feladatot (ahol „N” a gráf csomópontjainak, „E” a gráf éleinek, „C” pedig az élekhez rendelt kapacitásértékeknek a halmaza):

$$N=N_o \cup N_t \quad N_o \cap N_t = nil \quad o \in N_o \quad t \in N_t$$

$$v_{ot} = \sum_{ij \in E} c_{ij} \rightarrow \min \quad | \quad ij \in E \quad i \in N_o \quad j \in N_t$$

A minimális vágás meghatározásával kapcsolatban a legnagyobb kihívás az, hogy egy-egy forrásnyelő viszonylatban akár igen nagy számú vágás képezhető. (Ennek szemléltetéseként a fejezet végén megmutatjuk az alábbiakban tárgyalásra kerülő kis példánk A → G viszonylatán képezhető valamennyi vágást.)

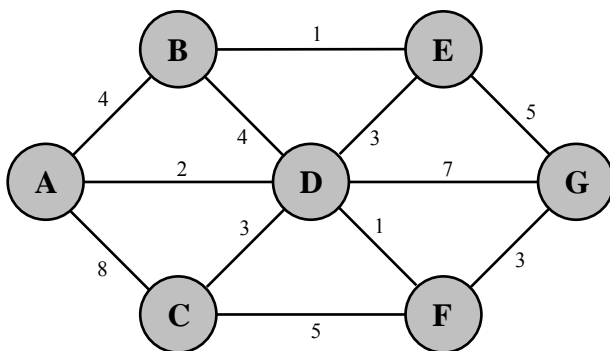
Fontos emlékezni: Az élek kapacitása, a szabad kapacitás, az elemi áramlat a folyam és a vágás egyaránt „irányított” fogalom. „Honnan – hova”.

Azt itt talán nem is szükséges bizonyítani, hogy a forrásból a nyelőbe juttatható maximális folyam értéke nem lehet nagyobb, mint a forrás és a nyelő viszonylatában képezhető bármelyik vágás értéke ($\Phi_{ot}^{max} \leq v_{ot}$). Ez azt is jelenti viszont, hogy ha egy (Φ_{ot}) folyamról belátható, hogy értéke egy (v_{ot}) vágás értékével azonos ($\Phi_{ot} = v_{ot}$), akkor bizonyos, hogy a folyam maximális folyam ($\Phi_{ot} = \Phi_{ot}^{max}$), a vágás pedig minimális vágás ($v_{ot} = v_{ot}^{min}$).

A probléma megoldására L. R. Ford, Jr. és D. R. Fulkerson publikált algoritmust 1956-ban, melyet azóta is *Ford-Fulkerson algoritmus*¹⁹ néven referál a vonatkozó szakirodalom.

Ötletük egyszerű: $\Phi_{ot}=0$ értékű „folyamból” kiindulva – mikor is valamennyi élen átfolyó folyam értéke zérus ($\phi_{ij}=0 \quad \forall ij \quad ij \in E$), azaz valamennyi él kapacitása teljes mértékben szabad kapacitás ($d_{ij}=c_{ij} \quad \forall ij \quad ij \in E$) – a szabad kapacitásokkal bíró élek ($d_{ij}>0$) alkotta (rész-)gráfon próbáljuk meg újra- és újra elemi áramlatokkal bővíteni a már meglévő folyamot. Vagyis: A szabad kapacitású élek láncolatán keressünk újabb- és újabb utakat a forrásból a nyelőbe. Egy-egy ilyen elemi áramlat (út) megtalálása esetén bővítsük folyam-rendszerünket az újonnan feltárt út élein még rendelkezésre álló legkisebb szabad kapacitás ($\delta = \min \{d_{ij} \mid ij \in P(ot)\}$) értékével ($\phi_{ij} = \phi_{ij} + \delta \quad \forall ij \quad ij \in P(ot)$). Ennek megfelelően csökkentsük az adott út élein továbbra is rendelkezésre álló szabad kapacitásokat δ értékkel ($d_{ij} = d_{ij} - \delta \quad \forall ij \quad ij \in P(ot)$), ugyanezen élek mentén az ellenkező irányban még rendelkezésre álló szabad kapacitás értékeket pedig növeljük ugyancsak δ értékkel ($d_{ji} = d_{ji} + \delta \quad \forall ji \mid ij \in P(ot)$). Mindezt addig folytatjuk, míg újabb- és újabb folyam-bővítési lehetőségeket (újabb és újabb forrásnyelő utakat) találunk, vagyis „kimerült szabad kapacitású” – „minimális” – vágásba nem ütközünk.

Az algoritmus működését az alábbi kis példán szemléltetjük. Bal oldalon a gráf rajza – az éleken a kapacitás-értékekkel –, jobb oldalon pedig a gráf kiinduló-, a kezdeti szabad kapacitásokat ($d_{ij}=c_{ij}$) mutató paraméteres struktúratáblája látható. Meghatározandó a gráfon az „A” pontból a „G” pontba irányítható maximális folyam értéke.



	A	B	C	D	E	F	G
A	-	4	8	2			
B	4			4	1		
C	8			3		5	
D	2	4	3		3	1	7
E		1		3			5
F			5	1			3
G				7	5	3	

¹⁹ Az hivatkozott algoritmus publikálásakor a szerzők rámutattak, hogy a maximális folyam – minimális vágás, mint primál-duál probléma-pár a lineáris programozás egy speciális eseteként kezelhető. (Lásd még: leghosszabb út - minimális potenciál feladat-pár.)

A forrásból indított útkeresési ciklusok során megjelölünk – úgymond „megcímkézünk” – minden olyan címkével még nem bíró j pontot, ami az éppen vizsgált i pontból szabad kapacitással bíró él mentén közvetlenül elérhető ($d_{ij} > 0 \quad ij \in E$). (Az egyes útkeresési ciklusok kezdetekor a csomópontok nem bírnak címkével ($p_j = nil \quad \forall j \in N$)). Ha egy i pontból kiindulva valamennyi lehetséges j pontot megcímkéztük, áttérünk egy már címkével bíró, de az onnan tovább vivő élek szempontjából még nem vizsgált j pontra ($j \rightarrow i$), ahonnan szintén megcímkézzük az onnan egyetlen szabad kapacitással bíró él mentén (közvetlenül) elérhető, címkével még nem bíró csomópontokat. És így tovább, amíg a címkézéssel el nem érünk a nyelőhöz. A címkézés során a címke (p_j) értéke maga az i pont ($p_j = i$).

A címkézések során szokás az újonnan kiosztásra kerülő címkék elé egy „-” jelet tenni, míg a továbbvivő élek szempontjából már feltárt csomópontok címkéi előtti „-” jelet „+” -ra átírni. Ha az újabb, címkével bíró, de a továbbvivő élek szempontjából még fel nem tárt csomópontra történő áttéréshez több csomópont közül is választhatunk, választásunk tetszőleges lehet, de itt – az algoritmus egyértelmősége kedvéért – javasoljuk a legkisebb sorszámú, avagy az ABC szerint előrébb levő azonosítóval bíró csomópont választását.

A címkék gyakorlatilag azt mutatják meg, hogy az adott pontot melyik másiktól értük el az útkeresés során. Ezek által lesz a megtalált út – visszafelé – beazonosítható (visszafejthető). Az alábbiakban a szabad kapacitások mátrixán megmutatjuk az első két útkeresési (és folyam-bővítési) ciklust.

Az első útkeresési ciklust (is) a forrásból („A”) indítjuk, ahonnan megcímkézhetjük a „B”, „C” és „D” pontokat. (Mi a címkéket a szabad kapacitások mátrixának megfelelő átlóbeli cellájában tüntetjük fel.) Ezután áttérünk a „B” pontra, ahonnan megcímkézhetjük az „E” pontot. A „C”-ből megcímkézhetjük az „F” pontot, a „D”-ből pedig már elérjük a nyelőt („G”), amivel az első útkeresési ciklus véget is ér.

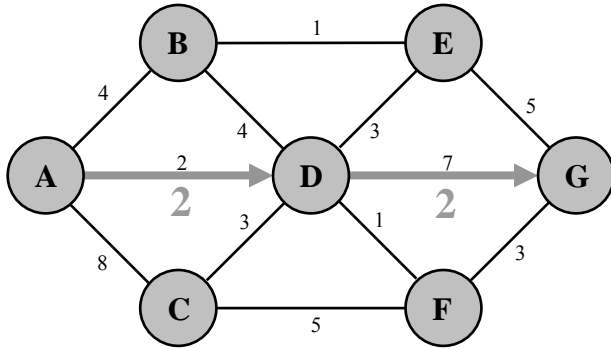
	A	B	C	D	E	F	G
A	+	4	8	2			
B	4	-A		4	1		
C	8		-A	3		5	
D	2	4	3	-A	3	1	7
E		1		3			5
F			5	1			3
G				7	5	3	

	A	B	C	D	E	F	G
A	+	4	8	2			
B	4	+A		4	1		
C	8		-A	3		5	
D	2	4	3	-A	3	1	7
E		1		3	-B		5
F			5	1			3
G				7	5	3	

	A	B	C	D	E	F	G
A	+	4	8	2			
B	4	+A		4	1		
C	8		+A	3		5	
D	2	4	3	-A	3	1	7
E		1		3	-B		5
F			5	1		-C	3
G				7	5	3	

	A	B	C	D	E	F	G
A	+	4	8	2			
B	4	+A		4	1		
C	8		+A	3		5	
D	2	4	3	+A	3	1	7
E		1		3	-B		5
F			5	1		-C	3
G				7	5	3	-D

Az átlóbeli címkék segítségével – visszafelé – beazonosíthatjuk azt az utat, ahogy a nyelőhöz eljutottunk: A „G” pontba (nyelőbe) – az annak sorában szereplő átlóbeli címke szerint – a „D” pontból jutottunk (a D→G élén át, melynek szabad kapacitása $d_{dg}=7$ egység). A „D” pontba pedig – az annak sorában szereplő címke szerint – az „A” pontból (közvetlenül a forrásból) jutottunk (az A→D élén át, melynek szabad kapacitása $d_{ad}=2$ egység). Az ezen az útvonalon a forrásból a nyelőbe eljuttatható elemi áramlat nagysága – a „leggyengébb láncszem” szerint – $\delta = \min\{d_{ad}, d_{dg}\} = \min\{2, 7\} = 2$.



	A	B	C	D	E	F	G
A	+	4	8	2			
B	4	+A		4	1		
C	8		+A	3		5	
D	2	4	3	+A	3	1	7
E		1		3	-B		5
F			5	1		-C	3
G				7	5	3	-D

Módosítsuk („bővítsük”) eddigi ($\Phi=0$) folyamunkat (elemi áramlat-rendszerünket) az újonnan feltárt lehetőséggel, azaz az A→D→G útvonalon $\delta\phi = \delta = 2$ egységnyi áramlattal, melynek a megmaradó szabad kapacitás-rendszerre gyakorolt hatását is kövessük! (Az egyes éleken átfolyó ϕ_{ij} folyamértékek folyamatos követéséről itt eltekinthetünk, hiszen azokat az eredeti c_{ij} és a „megmaradó” d_{ij} szabad kapacitások különbségeként a számítások végén is „kiolvashatjuk” a táblázatokból.)

Az A→D él megmaradó „szabad kapacitása”: $d'_{ad} = d_{ad} - \delta\phi = 2 - 2 = 0$;
 A D→G él megmaradó „szabad kapacitása”: $d'_{dg} = d_{dg} - \delta\phi = 7 - 2 = 5$;

Ezzel egyidejűleg az adott két-két csomópont között, ellentétes irányban:

A D→A él megmaradó „szabad kapacitása”: $d'_{da} = d_{da} - (-\delta\phi) = 2 - (-2) = 4$;
 A G→D él megmaradó „szabad kapacitása”: $d'_{gd} = d_{gd} - (-\delta\phi) = 7 - (-2) = 9$;

Az így módosított adatokkal – a szabad kapacitásokkal bíró élek hálózatán keresztül – keressünk újabb (további) folyambővítési lehetőségeket!

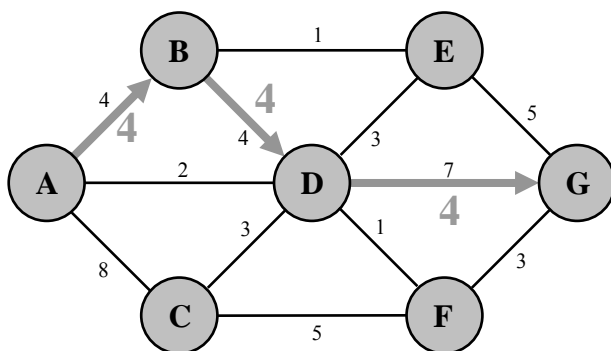
	A	B	C	D	E	F	G
A	+	4	8	0			
B	4	-A		4	1		
C	8		-A	3		5	
D	4	4	3		3	1	5
E		1		3			5
F			5	1			3
G				9	5	3	

	A	B	C	D	E	F	G
A	+	4	8	0			
B	4	+A		4	1		
C	8		-A	3		5	
D	4	4	3	-B	3	1	5
E		1		3	-B		5
F			5	1			3
G				9	5	3	

	A	B	C	D	E	F	G
A	+	4	8	0			
B	4	+A		4	1		
C	8		+A	3		5	
D	4	4	3	-B	3	1	5
E		1		3	-B		5
F			5	1		-C	3
G				9	5	3	

	A	B	C	D	E	F	G
A	+	4	8	0			
B	4	+A		4	1		
C	8		+A	3		5	
D	4	4	3	+B	3	1	5
E		1		3	-B		5
F			5	1		-C	3
G				9	5	3	-D

Az átlóbeli címkék segítségével – hasonlóan az előző körben feltárt „úthoz”, visszafelé – beazonosíthatjuk azt az utat, ahogy a nyelőhöz eljutottunk: A „G” pontba (nyelőbe) – az annak sorában szereplő átlóbeli címke szerint – a „D” pontból jutottunk (a D→G élen át, melynek szabad kapacitása $d_{dg}=5$ egység). A „D” pontba – az annak sorában szereplő címke szerint – a „B” pontból jutottunk (a B→D élen át, melynek szabad kapacitása $d_{bd}=4$ egység). A „B” pontba pedig az „A” pontból (közvetlenül a forrásból) jutottunk (az A→B élen át, melynek szabad kapacitása szintén $d_{ab}=4$ egység). Az ezen az útvonalon a forrásból a nyelőbe eljuttatható elemi áramlat nagysága – a „leggyengébb láncszem” szerint – $\delta = \min\{d_{ab}, d_{bd}, d_{dg}\} = \min\{4, 4, 5\} = 4$.



	A	B	C	D	E	F	G
A	+	4	8	0			
B	4	+A		4	1		
C	8		+A	3		5	
D	4	4	3	+B	3	1	5
E		1		3	-B		5
F			5	1		-C	3
G				9	5	3	-D

Módosítsuk („bővítsük”) eddigi ($\Phi=2$) folyamunkat (elemi áramlat-rendszerünket) az újonnan feltárt lehetőséggel, azaz az A→B→D→G útvonalon $\delta\phi = \delta = 4$ egységnyi áramlattal, melynek a megmaradó szabad kapacitás-rendszerre gyakorolt hatását is kövessük! (...)

Az A→B él megmaradó „szabad kapacitása”: $d'_{ab} = d_{ab} - \delta\phi = 4 - 4 = 0$;
 A B→D él megmaradó „szabad kapacitása”: $d'_{bd} = d_{bd} - \delta\phi = 4 - 4 = 0$;
 A D→G él megmaradó „szabad kapacitása”: $d'_{dg} = d_{dg} - \delta\phi = 5 - 4 = 1$;

Ezzel egyidejűleg az adott két-két csomópont között, ellentétes irányban:

A B→A él megmaradó „szabad kapacitása”: $d'_{ba} = d_{ba} - (-\delta\phi) = 4 - (-4) = 8$;
 A D→B él megmaradó „szabad kapacitása”: $d'_{db} = d_{db} - (-\delta\phi) = 4 - (-4) = 8$;
 A G→D él megmaradó „szabad kapacitása”: $d'_{gd} = d_{gd} - (-\delta\phi) = 9 - (-4) = 13$;

Az így módosított adatokkal – a szabad kapacitásokkal bíró élek hálózatán keresztül – keressünk újabb (további) folyambővítési lehetőségeket!

... És így tovább, egészen addig, míg újabb és újabb folyam-bővítési lehetőségeket találunk, azaz újból és újból a szabad kapacitásokkal bíró élek hálózatán utat találunk a forrásból a nyelőbe. ...

A vizsgálatokat tovább folytatva további folyam-bővítési lehetőségeket találunk az $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow G$ útvonalon $\delta=1$ egységnyi értékkel, valamint az $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G$ útvonalon $\delta=2$ egységnyi értékkel,

	A	B	C	D	E	F	G
A	+	0	⑧	0			
B	8	-D		0	1		
C	8		+A			5	
D	4	8	3	+C	3	1	①
E		1		3	-D		5
F			5	1		-C	3
G				13	5	3	-D

	A	B	C	D	E	F	G
A	+	0	⑦	0			
B	8	+D		0	1		
C	9		+A			5	
D	4	8	4	+C	③	1	0
E		1		3	+D		⑤
F			5	1		-C	3
G				14	5	3	-E

majd

az $A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow G$ útvonalon $\delta=3$ egységnyi értékkel, és az $A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G$ útvonalon $\delta=1$ egységnyi értékkel.

	A	B	C	D	E	F	G
A	+	0	⑤	0			
B	8			0	1		
C	11		+A	0			⑤
D	4	8	6	-F	1	1	0
E		1		5			3
F			5	1		+C	③
G				14	7	3	-F

	A	B	C	D	E	F	G
A	+	0	②	0			
B	8	+D		0	1		
C	14		+A	0			②
D	4	8	6	+F	①	1	0
E		1		5	+D		③
F			8	①		+C	0
G				14	7	6	-E

Az utóbbi ($A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G$ útvonalon történő $\delta=1$ egységnyi) folyam-bővítés – és a „szabad kapacitások” változásának nyomon követése – után újabb (további) útkeresésünk a szabad kapacitások hálózatán elakad. Nem tudunk eljutni a forrásból a nyelőhöz. Hálózatunk egy „minimális kapacitású vágás” mentén kettészakad. A vágás egyik oldalán a forrás és a címkével bíró csomópontok (és a közöttük lévő élek) halmaza (jelöljük e csomópontok halmazát N_o -val), másik oldalán a nyelő és a címkével nem bíró csomópontok (és a közöttük lévő élek) halmaza (e csomópontok halmazát pedig jelöljük N_t – vel.)

Azt a minimális kapacitású vágást, mely megállította az útkeresésünket azok az (egyébiránt kimerült kapacitású, azaz $d_{ij}=0$, avagy $d_{ij}=c_{ij}$) élek alkotják, melyek kezdőpontja az N_o halmazba, vég-

pontja pedig az N_t halmazba esik. A (minimális) vágás értéke, azaz a forrásból a nyelőbe továbbítható folyam értéke a vágásbeli élek kapacitásainak összege ($\Phi = \sum c_{ij} \mid ij \in E, i \in N_o, j \in N_t$).

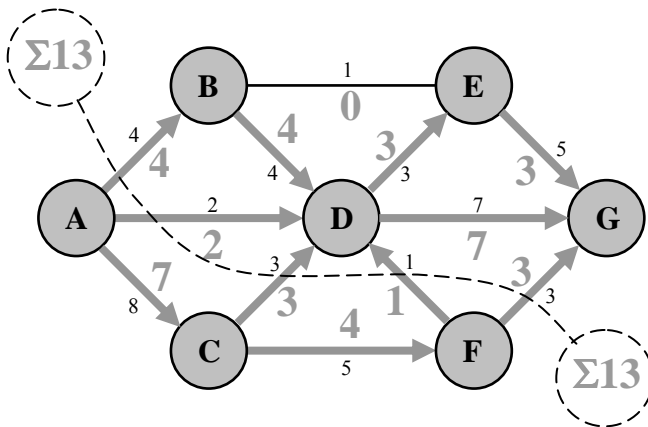
	A	B	C	D	E	F	G
A	+	0	1	0			
B	8			0	1		
C	15		+A	0		1	
D	4	8	6		0	2	0
E		1		6			2
F			9	0		+C	0
G				14	8	6	

	A	B	C	D	E	F	G
A	+	0	1	0			
B	8			0	1		
C	15		+A	0		1	
D	4	8	6		0	2	0
E		1		6			2
F			9	0		+C	0
G				14	8	6	

A minimális vágás „élei” az utolsó – maradék szabad kapacitásokat tartalmazó – táblában is láthatóvá tehetők:

Lássuk el „fedő vonalakkal” (szürke sávok) az N_o halmazbeli (A, C és F) csomópontok sorait („honnan”), valamint az N_t halmazbeli (B, D, E és G) csomópontok oszlopait („hova”)! A vágásbeli „élek” a kétszeresen fedett (egyébiránt $d_{ij}=0$ szabad kapacitást jelző) cellákkal azonosíthatók.

Példánkban a maximális folyam értéke: $\Phi = c_{ab} + c_{ad} + c_{cd} + c_{fd} + c_{fg} = 4 + 2 + 3 + 1 + 3 = 13$
 (Ami egyben a körönkénti folyam-bővítések összege is: $\Phi = \sum \delta$)



	A	B	C	D	E	F	G
A		4	7	2			
B	-4			4	0		
C	-7			3		4	
D	-2	-4	-3		3	-1	7
E		0		-3			3
F			-4	1			3
G				-7	-3	-3	

A „maximális folyamban” az egyes éleken átáramló folyam-mennyiségek egy lehetséges változatát a kiinduló $d_{ij}=c_{ij}$ kapacitásokat tartalmazó táblázat és az utolsó „maradék” d_{ij} szabad kapacitásokat tartalmazó táblázat értékeinek különbsége alapján kaphatjuk meg ($\phi_{ij} = c_{ij} - d_{ij} \mid ij \in E$).

Megjegyzések a megoldáshoz:

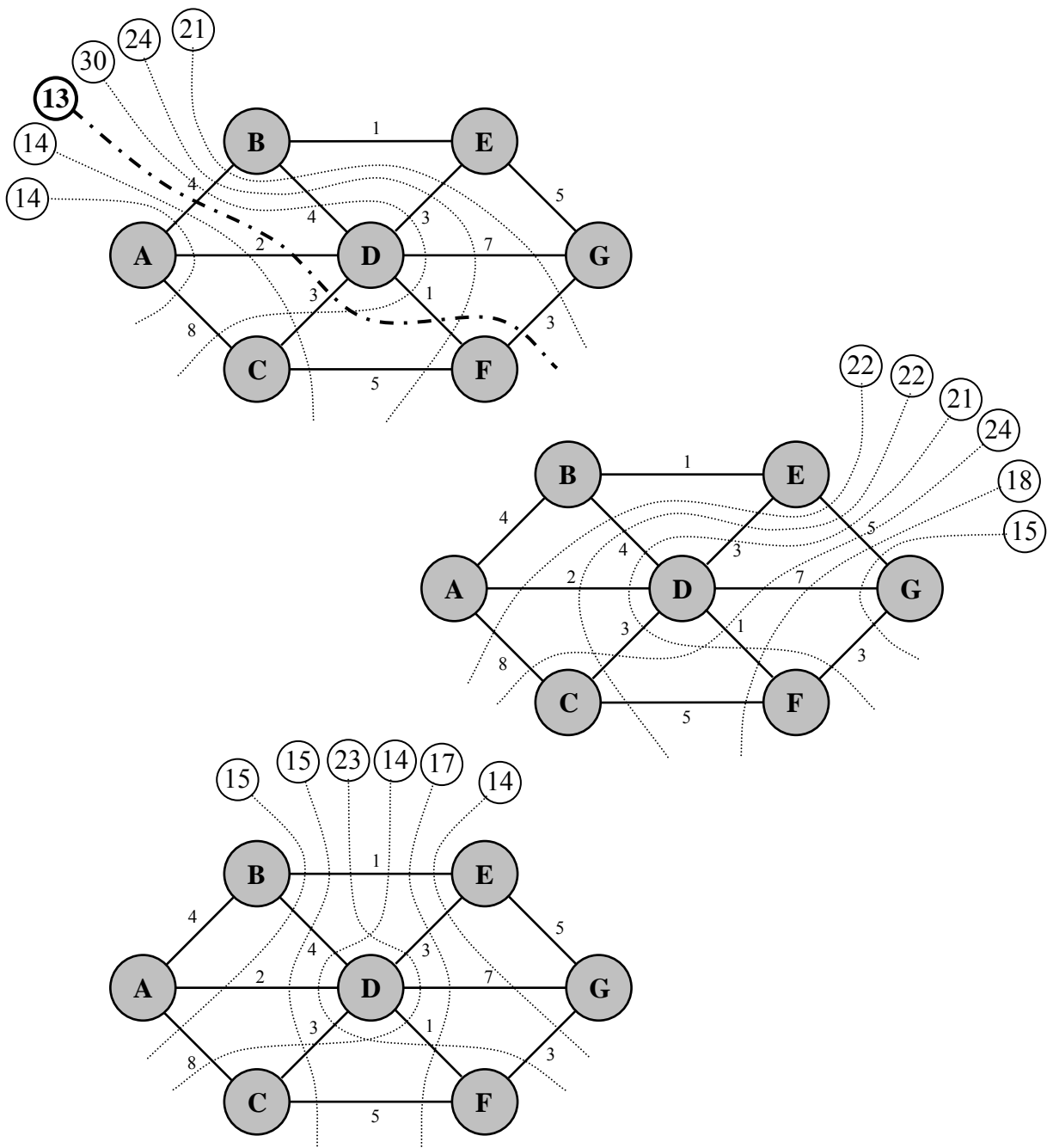
Szükséges megjegyezni, hogy a fentiek szerint meghatározott maximális folyam csak egy a lehetséges változatok közül, hiszen az N_o és az N_t halmazokon belül a csomópontok közötti éleken más folyam-értékek is helytálló megoldáshoz vezethetnek. Lásd: a $\phi_{bd}=4$ és $\phi_{de}=3$ fo-

lyam-értékekből $\phi=1$ egységnyi „átkormányozható” a folyamatot „nem továbbító” $\phi_{be}=0$ élre ($\phi'_{bd}=3, \phi'_{de}=2, \phi'_{be}=1$) és változatlanul az összes feltételt kielégítő megoldáshoz jutunk.

Elképzelhető, hogy egy hálózaton több minimális kapacitású vágás is létezik. A fent ismertetett algoritmus ezek közül – a forrásból induló útkeresésekből adódóan – a forráshoz „legközelebb” esőt találja meg, és e szempontból meghatározó lehet a csomópontok azonosítóinak „sorrendje” is.

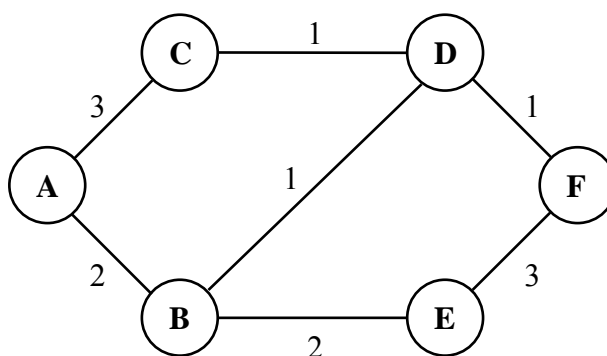
Egyirányú éleket tartalmazó gráfon az algoritmus változatlanul használható. Mindössze az él-kapacitásokat tartalmazó kiinduló táblázatban az (ij) él irányával ellentétes irányú kapacitást zérus értékre kell beállítani ($c_{ji}=0 \mid ij \in E \text{ } ji \notin E$).

A „teljesség” kedvéért alább megmutatjuk az „A” és „G” pontokat (esetünkben a forrást és a nyelőt) elválasztó valamennyi (itt összesen 18 db) vágást – egy-egy kiválasztott közös él „köré” rendezve.



Gyakorló feladatok:

- G.1 Határozza meg a mellékelt ábrán látható gráfon az „A” pontból az „F” pontba irányuló maximális folyam értékét! Vizsgálja meg „élenként”, hogy hogyan változna az említett maximális folyam értéke az adott él kapacitásának egységnyi értékkel történő növelése esetén!



Mely élek kapacitásának növelésével lehet növelni egységnyivel az A-ból az F pontba irányuló maximális folyam értékét?

Felvetés: Melyik él kapacitásának milyen mértékű növelésével lehetne leggazdaságosabban kétszeresére növelni az említett maximális folyam értékét, ha az éleken a kapacitások egységnyi növelése közel azonos költséggel jár?

- G.2 Egy építőipari vállalat gépműhelyében öt gép-álláson folyik az építőgépek időszakos karbantartása, mely gépenként nagyjából azonos időt vesz igénybe. A legutóbb beérkezett öt gép (G1,...,G5) közül azonban nem lehet bármelyik gépet bármelyik gépálláson (A1,...,A5) „szervizelni”. Azt, hogy melyik gép szervizéhez (az eltérő felszereltség okán) melyik gépállás jöhet szóba (+) a mellékelt táblázat foglalja össze.

	A1	A2	A3	A4	A5
G1	+		+		
G2	+		+		
G3		+		+	+
G4	+		+		
G5				+	+

Melyik gépet melyik gépállásba vezényelné ahhoz, hogy a lehető legtöbb gépet adják vissza a termelésnek az adott (karbantartási) ütem végén – feltéve, hogy az adott ütem kezdetekor minden gépállás szabad? Hány gép karbantartása csúszik át (kényszerűségből) a következő ütemre? (E klasszikus kijelölési feladatot „oldja meg” maximális folyam feladatként!)

Feladat megoldások

- G.1 A feladat a bemutatott algoritmussal – illetve az általa szolgáltatott megoldással – kapcsolatban két érdekességre irányítja rá a figyelmet:
1. A hálózaton (gráfon) adott viszonylatban elképzelhető, hogy több „szűk keresztmetszet” (minimális vágás) van. Ilyenkor az algoritmus a forráshoz „legközelebb” esőt találja meg. Esetünkben is két azonos értékű minimális vágás van, melyek az $A \rightarrow B$ és $C \rightarrow D$, illetve a $B \rightarrow E$ és $D \rightarrow F$ éleket tartalmazzák 3–3 értékű összegzett kapacitással.
 2. A feladatnál hangsúlyos szerephez jut a folyam-bővítések során az éleken a szabad kapacitások változásának két-irányú követése (azok csökkentése az elemi áramlat értékével a feltárt újabb út élei mentén, és növelése ellentétes irányban). A „szabad kapacitás” (is) irányított, relatív érték! Ha az ellentétes irányú szabad kapacitás változásokat nem követnénk, a csomópontok azonosítóinak „sorrendje” meghatározó lehetne a tényleges megoldás megtalálása szempontjából, az algoritmus hamis eredményre is vezethetne.

A két független (azonos éleket nem tartalmazó) minimális vágásból adódóan egy-egy él kapacitásának egységnyi növelése nem járna azonnal együtt a maximális folyam egységnyi

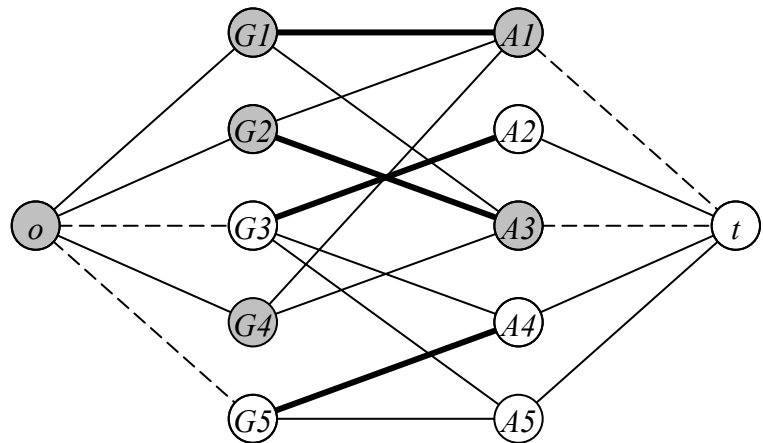
növekedésével. Ahhoz több él kapacitásának (együttes, egységnyi) növelése szükséges. Erre viszont több megoldás is kínálkozhat. Esetünkben négy: az $A \rightarrow B$ és $B \rightarrow E$, vagy az $A \rightarrow B$ és $D \rightarrow F$, vagy a $C \rightarrow D$ és $B \rightarrow E$, vagy a $C \rightarrow D$ és $D \rightarrow F$ élek kapacitásainak együttes egységnyi növelése.

A feladatban megfogalmazott „felvetés” túlmutat a maximális folyam – minimális vágás feladat alapkérdésén. Itteni megfogalmazása inkább csak jelzés értékű, és azt alapvetően a viszonylag kis méretű hálózat (gráf) egyszerű „átláthatósága” indokolhatja.

Azt talán nem kell bizonygatni senkinek, hogy a maximális folyam értékének duplázásához legalább a feltárt minimális vágás(ok) kapacitásának duplázása szükséges. A kérdés inkább az, hogy azt hogyan tegyük meg úgy, hogy közben ne hozzunk létre, illetve minél kevesebbet hagyjunk bent a kívántnál kisebb kapacitású lehetséges (minimális) vágásokból. Esetünkben a feltárt minimális vágásokon belüli élek kapacitásainak egységesen $c_{ij}=3$ értékre történő növelésével – összesen 6 egységnyi kapacitás-növeléssel – valóban megduplázzhatjuk az „A” pontból az „F” pontba irányuló (Φ_{af}) maximális folyam értékét.

G.2 A feladat megoldásához felvázolható „folyam-modellt” – és megoldást – az alábbi ábra mutatja. Valamennyi él kapacitása egységnyi, aminek élenkénti feltüntetésétől eltekintettünk. ...

A gráfon megvastagítottuk a gépek és gépállások összerendelését jelölő éleket, megszaggattuk a minimális vágás éleit, és elszürkítettük a címkével bíró csomópontok (N_o) halmazát. A megoldás ellenőrzése végett közöljük a d_{ij} szabad kapacitások utolsó táblázatát, valamint az éleken átfolyó ϕ_{ij} áramok táblázatát. A modell szerint egy gép (G4) a következő ütemre csúszik át.

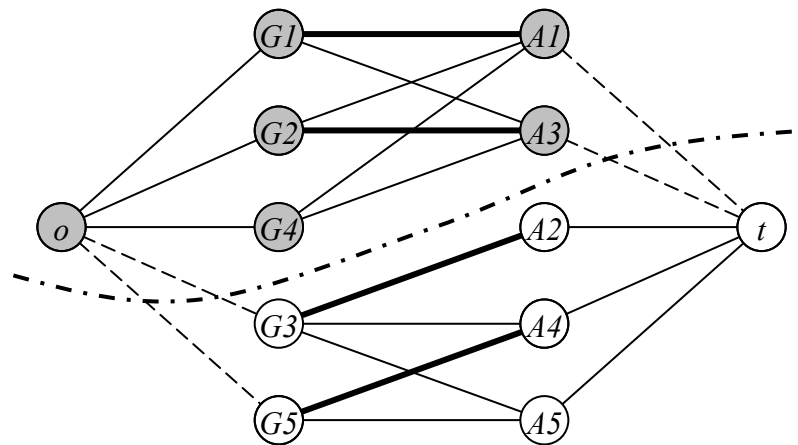


d_{ij}	<i>o</i>	G1	G2	G3	G4	G5	A1	A2	A3	A4	A5	<i>t</i>	
<i>o</i>	+	0	0	0	1	0							
G1	2	A1					0	1					
G2	2		A1				1	0					
G3	2						0		1	1			
G4	1				o		1	1					
G5	2								0	1			
A1		2	1		1		G4					0	
A2				2									0
A3		1	2		1				G4				0
A4				1		2							0
A5				1		1							1
<i>t</i>							2	2	2	2	1		

ϕ_{ij}	<i>o</i>	G1	G2	G3	G4	G5	A1	A2	A3	A4	A5	<i>t</i>
<i>o</i>		1	1	1	0	1						
G1	-1						1	0				
G2	-1						0	1				
G3	-1							1	0	0		
G4	0						0	0				
G5	-1									1	0	
A1		-1	0		0							1
A2				-1								1
A3		0	-1		0							1
A4				0		-1						1
A5				0		0						0
<i>t</i>							-1	-1	-1	-1	0	

Megjegyzések a megoldáshoz:

- Az, hogy esetünkben legalább egy gépnek át kell kerülnie a következő ütemre, eredendően annak köszönhető, hogy három olyan gép is van (G1, G2 és G4), melyek szervizét csak ugyanazon a két gépálláson (A1 és A3) lehet elvégezni.
- Mivel gráfunk nem kiterített gráf, első ránézésre nem nyilvánvaló, hogy az algoritmus segítségével beazonosított (szaggatott) élek valóban vágást képeznek o és t pont viszonylatában. A párosíthatóság szerint átrendezve a gráf csomópontjait a vágás szembeűnővé tehető. (Mivel minden él kapacitása egységnyi, és négy él „elválasztásával” valóban felszámoltunk minden $o \rightarrow t$ utat, a beazonosított $\Phi=4$ értékű folyam valóban egy maximális folyam, a vágás pedig egy minimális vágás.)



- Az átrendezett gráfon az is jól látható, hogy az elválasztott gráfrészekben a konkrét folyam értékek vonatkozásában számos megoldás kialakítható egy azon minimális vágás esetén is. Eredeti problémánknál maradvá: Annak megválasztása, hogy a G1, G2 és G4 gépek közül melyik kerüljön át a következő ütemre, avagy az A2, A4 és A5 gépállások közül melyik maradjon munka nélkül az adott ütemben, nincs hatása a „maximális folyam” értékére, illetve arra, hogy egy gépnek át kell kerülnie a következő ütemre.

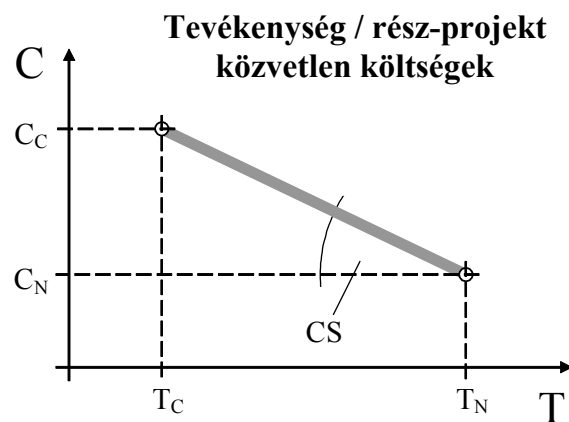
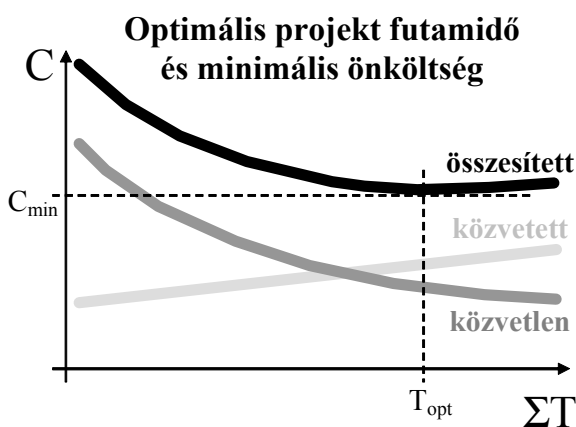
H – A CPM^{cost} MODELL

A költség-idő modell

A beruházások költség-idő összefüggés-vizsgálati tapasztalatainak eredményeként az építési projektek megvalósítási időszakában felmerülő ún. kivitelezési önköltség-összetevőket szokás két markánsan elkülönülő csoportra osztani:

- „Közvetlen” költségek, melyek alatt az építménybe beépülő „élőmunka” (emberi munkavégzés) és „holtmunka” (anyag, gép, energia, előregyártott szerkezetek) költségét értjük, és jellemzője, hogy ugyanazon építési feladatnak egy az adott gazdaság adott állapotára jellemző „járatos”, minimális költséggel megvalósítható kivitelezési időtől bármely irányban³ eltérő időtartamú megvalósítása esetén monoton növekvő jelleget mutatnak;
- „Közvetett” költségek⁴, melyek az építménybe „nem épülnek bele”, de a megvalósításhoz szükségesek (építésvezetőségi általános költségek, ideiglenes létesítmények- és ellátó hálózatok, közterület foglalás-, őrzés-védelem-, stb. költségei), melyek jellemzője, hogy a megvalósulási idővel közel arányos, monoton növekvő jelleget mutatnak.

A költség-összetevők időbeli alakulásának ismeretében (helyesebben: becslése alapján) pedig megtervezhető a megvalósítás optimális (minimális önköltségű) teljes átfutási ideje, illetve adott elvárt időtartamokhoz kialakítható a vállalási/vállalkozási ár-politika.



A CPM^{cost} modell kifejezetten a közvetlen költségekre, és azoknak is a járatos- és a technikailag egyáltalán lehetséges legrövidebb megvalósítási időtartam közötti időtartományon feltételezett „le szálló ágára” fókuszál.

Ami a költségeket illetően elmondható a teljes projektre, az többnyire elmondható annak részeire (tevékenységeire, al-projektjeire) is. Az egyes tevékenységek költség- és idővetülete azonban jel-

³ Azt, hogy az elhúzó beruházás többlet-költséget (infláció, állagvédelem, változtatások) jelent, általában nem kell magyarázni. A „járatoshoz” képest gyorsabb kivitelezés extra költségigényeinek szemléltetéséhez pedig például a nyújtott (túlórabéres éjszakai-, avagy hétvégi) műszakokra, fokozott előregyártáshoz társuló megnövekvő szállítási költségekre, újabb belépő alvállalkozókra, intenzívebb építéshelyi menedzsmentre, nagyobb teljesítményű gépi eszközökre, szükségessé váló (többlet) gyám- és egyéb segédszerkezetekre, stb. kell gondolni.

⁴ A szakirodalomban szokásos még a költségek egy csoportját, az ún. „egyszer felmerülő”, avagy „eseti” költségeket (terület-előkészítés, felvonulás, gép-telepítés, stb.) külön, „harmadik”, de szintén a megvalósulási idővel arányosan növekvő költség-csoportként megemlíteni. Mi itt ezen költségeket a közvetett költségek részeként értelmezzük.

lemzően legalább egy-, többségében több nagyságrenddel kisebb a teljes projekt költség- és idővetületénél, minek okán a tevékenységek költség-idő összefüggéseit monoton, lineárisan csökkenő „függvénnyel” közelítjük⁵. A feladat megoldásához minden egyes tevékenységnél alapadatként kell megadni annak „normál” (minimális költségű, „járatos”) időtartamát (T_N) a hozzá kapcsolódó „normál” költséggel (C_N) együtt, valamint lehetséges legrövidebb-, ú.n. „roham” (crash program = rohammunka program) időtartamát (T_C) és annak költségét (C_C). A két időtartam között feltételezett lineáris költség-idő összefüggés meredekségét „költség-intenzitásnak”, vagy „költség-lejtésnek” („CS” = cost slope = költség-lejtés) nevezzük⁶.

$$CS = (C_C - C_N) / (T_N - T_C).$$

Mielőtt még valaki azt hinné, hogy a probléma erősen teoretikus, avagy túlon túl erőltetett, érdemes megemlíteni két megtörtént esetet, melyek példaként szolgálhatnak arra, hogy a költség-idő összefüggés kérdésköre mennyire „hétköznapi” válhat, illetve milyen „váratlanul” is felmerülhet.

Első példánk az ezredforduló egyik nagy budapesti beruházásához kötődik. A több hektárnyi kiterjedésű, igen értékes és jó elhelyezkedésű, Budapest belvárosában, közvetlen vasúti, közúti, villamos és földalatti vasúti csatlakozással bíró forgalmi csomópontban elhelyezkedő telken felépült kereskedelmi, szórakoztatató és irodakomplexum építése során érezhető volt, hogy a befejezési határidő közeledtével, annak tartásához mozgósított erőforrások helyszíni menedzsmentje komoly nehézségeket, technikai és szervezési problémákat vet fel. A durván 50 milliárd forintos beruházáson még a szerkezetépítés során volt, hogy egyidejűleg 13 toronydarú állt munkára készen, a befejező munkálatok idején pedig közel tízezer(!) különböző szakmákhoz és alvállalkozókhoz tartozó munkás szorgoskodott. A munkaterületek menedzselése szempontjából a kialakult állapotokat szakmai berkekben egyszerűen csak „horrorként” emlegették. A generál vállalkozó hiába próbálkozott a megrendelőnél szerződésmódosítás kicsikarásával, felvetve a minőségbiztosítási problémákat és jelentős ár-engedményt is felajánlva, a megrendelő a szerződésben kitűzött december eleji határidőből jótányit sem engedett. Akár azt is mondhatnánk: „Naná! Védte a szerződés és a jelentős kötbér!” A probléma azonban árnyaltabb ennél. Egyetlen hosszú távon gondolkodó befektetőnek sem lehet érdeke a helyi potenciális partnerek, vállalkozók ellehetetlenítése, vagy kettejük viszonyának minden áron esetlegesen több évig is elhúzódó jogi vitába terelése. Még ha érvényesíteni is tudja kárigényét, mire pénzéhez (vagy annak csak egy kis részéhez is) jut (ha jut) évek telhetnek el. Ugyanez elmondható a vállalkozók oldaláról is. A szóban forgó beruházás alapvetően kereskedelmi ingatlan. A kitűzött átadási határidő pedig év végére, a karácsonyi ünnepek előtti hetekre esik. Hatalmas koncentrált vásárlóerő jelenik meg a piacon mind az egyének, mind a vállalkozások részéről. Valamennyi gazdálkodó szervezet az adóév vége felé a bevételi-kiadási egyensúly rendbetételén fáradozik. Egy-egy kereskedelmi beruházás esetén az ú.n. bevezetési időszak egy-két hónaptól akár fél évig terjedő időtartamot is igénybe vehet, mire a vásárló közönség megszokja annak létét, és az egység „teljes kapacitással” fut. Nos, Karácsony előtt egy ilyen forgalmas helyen?! ... A bevezetési időszak drasztikus lerövidítésének, illetve az ugrásra készen elköltésre váró vásárlóerő megragadásának lehetősége élesen szembeállítja a befogadó épület létrehozásának, és a befogadott funkció mihamarabbi profittermelő képességének kérdését – még relatíve drágább kivitelezés és nagyobb valószínűséggel felmerülő minőségi problémák esetén is. Esetünkben a határidőre történő „erőltetett” teljesítés a megrendelőnél elemi erejű érdekként jelentkezett. („*Megrendelői oldal*”)

A másik példára egy már több éves kivitelezői-vállalkozói gyakorlattal bíró szigorló egyetemi hallgató hívta fel a vizsgabizottság figyelmét diplomamunkájának védésekor, annak mintegy háttér-magyarázataként. Egy-egy önkormányzat által kiírt közbeszerzési eljárás keretében vállalatba adott

⁵ Ma már a rendelkezésünkre álló számítástechnika birtokában a feladat „tetszőleges”, de csökkenő jelleget mutató költség-idő összefüggés mellett is kezelhető. A csökkenő jelleg azért feltétel, mert ellenkező esetben a feladat megoldása triviálissá („Mindent a lehető leghamarabb kell megcsinálni”) válik.

⁶ Annak szemléltetésére, hogy egységnyi időtartam-csökkenéssel mekkora költség-növekedés járna.

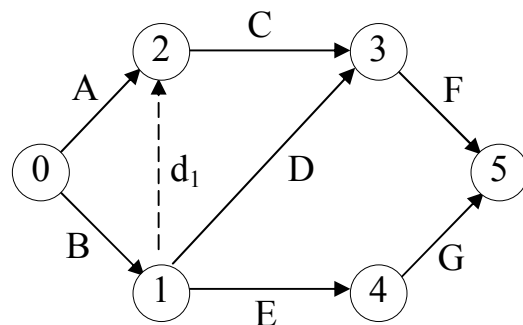
építési feladatnál nem ritkán előfordul, hogy a pályázati eljárás sikeres, a nyertes ajánlatadó is megnevezésre kerül, de a kiíró az építési dokumentációk, engedélyek és/vagy az építési terület átadásával ilyen-olyan oknál fogva késlekedik. Ugyanakkor mind a pályázatbeli határidő, mind a vállalási ár vonatkozásában azt a vállalkozó felé elismerni vonakodik. (Annak lehetőségét részben maga a közbeszerzési törvény is szűkíti, hiszen számottevő eltérések esetén újabb költség- és időigényes pályázatot kellene kiírnia a megváltozott körülményeknek megfelelően.) Ehelyett görcsösen ragaszkodik a nyertes pályázatban vállalt határidőhöz és költség-keretekhez. Nos, a vállalkozónak nem marad más hátra, mint hogy az ajánlatában foglaltak szerint, de az elvesztegetett idő figyelembe vételével a lehető legkisebb többlet-költséggel próbálja meg rövidíteni a projekt teljes átfutási idejét. ... („Vállalkozói oldal”)

A CPM^{cost} feladat

A költség-idő tervezési feladat megoldásának logikáját szemléltetendő álljon itt az alábbi példa! A modellezett projekt tevékenységeinek becsült normál- és rohamidő, valamint közvetlen költség adatait (hónapban, illetve ezer Forintban kifejezve) a bal oldali táblázatban foglaltuk össze, míg a tevékenységek logikai (technológiai) összefüggéseit a jobb oldali hálós diagram mutatja. Kérdések:

- Milyen minimális közvetlen költséggel valósítható meg a projekt 10 hónap alatt? ($C_{10}^{\min}=?$)
- Határozzuk meg a projekt megvalósíthatóságának időtartományát, valamint azon belül a legkisebb- és legnagyobb közvetlen költségek görbéit! ($C^{\min}(t), C^{\max}(t) \mid T^{\min} \leq t \leq T^{\max}$)

Tev	Normál		Roham		CS
	idő	ksg	idő	ksg	
A	2	120	1	200	80
B	3	80	1	200	60
C	4	100	2	350	125
D	3	150	3	150	-
E	1	250	1	250	-
F	5	130	2	460	110
G	6	80	5	110	30



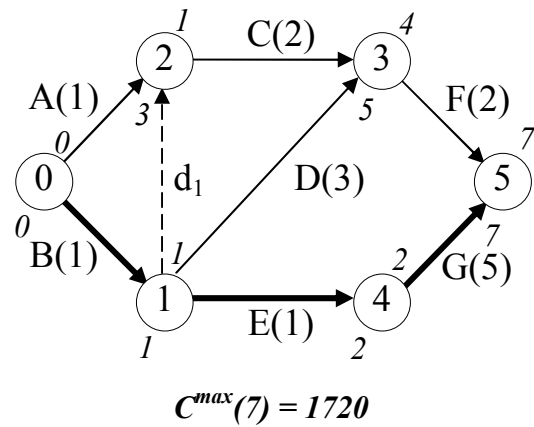
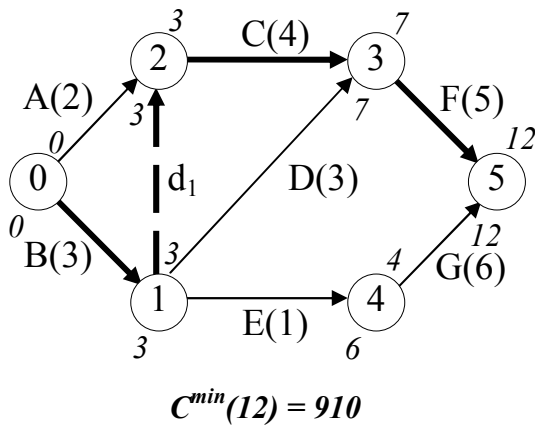
Mielőtt a megoldás ismertetésébe belekezdenénk, időzzünk el egy kicsit az adatoknál!

- A leghosszabb átfutási időhöz tartozó minimális közvetlen költség értéke a táblázatból kiolvasható, ami nem más, mint a normál költségek összege, azaz 910 eFt.
- Ugyancsak kiolvasható a táblázatból a legrövidebb átfutási időhöz tartozó legnagyobb közvetlen költség értéke, ami a roham költségek összegével azonos, azaz 1.720 eFt.
- D és E tevékenységeknél a normál és a roham idő között nincs különbség, csakúgy, mint a hozzájuk társuló közvetlen költségekben sem. A felületes olvasó hajlamos ilyenkor „rutinból” azt mondani, hogy ezek költség-intenzitása zérus, ami nem illő, „kisiskolás” tévedés! Ezen tevékenységek időtartama nem rövidíthető, és a költség-intenzitás nem értelmezhető. (Egyébként is $0/0=?!$) A zérus költség-intenzitás azt jelentené, hogy a tevékenység közvetlen költsége annak időtartamára nézve közömbös („állandó”).

Tekintve, hogy amennyiben annak van egyáltalán megoldása, az „a.)” kérdés a „b.)” kérdésnek része, a továbbiakban eredendően a „b.)” kérdés megválaszolására koncentrálnunk. Ott is a két görbe értékeinek meghatározására irányuló számításokat egymással párhuzamosan mutatjuk meg. A legkisebb közvetlen költségek görbét a leghosszabb időtartamú ütemtervből kiindulva (bal oldalon),

a legnagyobb közvetlen költségek görbéjét pedig a legrövidebb időtartamú ütemtervből kiindulva (jobb oldalon) határozzuk meg.

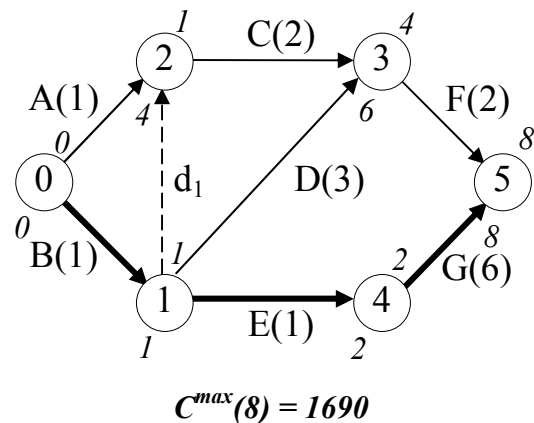
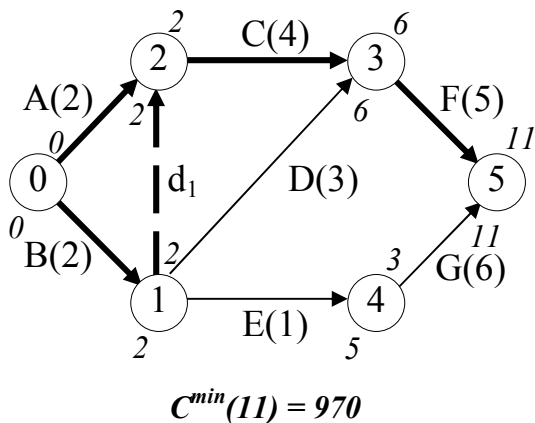
1. lépés: A leghosszabb átfutási idejű-, legkisebb közvetlen költségű, illetve a legrövidebb átfutási idejű-, legnagyobb közvetlen költségű „ütemtervek” meghatározása:



További lépések: A költségek legkisebb változására törekedve a minimális költségek keresésénél „rövidítjük”, a maximális költségek keresésénél „nyújtjuk” az átfutási időt. A módosítás célszerű helyének meghatározásához alapvetően az átfutási idő szempontjából meghatározó „kritikus” út tevékenységeinek (további) módosítási lehetőségeit, illetve azok költség-intenzitás értékeit, valamint a kritikus út változásainak potenciális lehetőségeit (szub-kritikus utakat) vesszük figyelembe.

Esetünkben a minimális közvetlen költségek meghatározását második lépésként az egységnyivel rövidebb, 11 hónapos átfutási idejű „ütemterv” minimális közvetlen költségének meghatározásával folytatjuk. A kritikus út részét képező B, d1, C és F tevékenységek közül a B tevékenységnek legkisebb a költség-intenzitása, ezért annak időtartamát rövidítjük egységnyivel. A közvetlen költségek várt növekménye a B tevékenység költség-intenzitás értékével azonos ($C^{min}(11)=C^{min}(12)+CS_B$).

A maximális közvetlen költségek meghatározását második lépésként az egységnyivel hosszabb, 8 hónapos átfutási idejű „ütemterv” maximális közvetlen költségének meghatározásával folytatjuk. A kritikus út részét képező B és G tevékenységek közül a G tevékenység költség-intenzitása a kisebb, ezért annak időtartamát növeljük egységnyivel. (Az E tevékenység része ugyan a kritikus útnak, de időtartama nem változtatható.) A közvetlen költségek várt csökkenése a G tevékenység költség-intenzitás értékével azonos ($C^{max}(8)=C^{max}(7)-CS_G$).

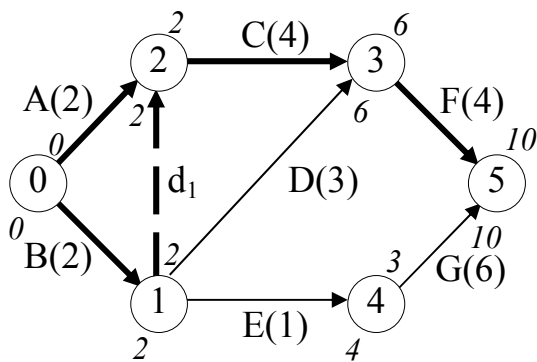


Folytatva a költség-görbék feltárását ... a legkisebb közvetlen költségek görbéjéhez a következő, 10 hónapos időtartamú „ütemtervhez” eléréséhez az A, B, C és F kritikus tevékenységek közül kell

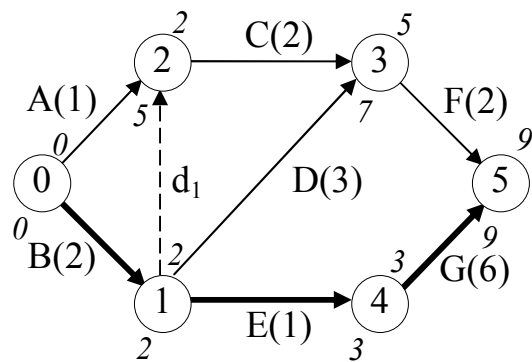
kiválasztani a rövidítendő. A helyzet annyiban új az előzőhöz képest, hogy bár ezek közül a legkisebb költség-intenzitású B tevékenység időtartamát lehetne még csökkenteni, az időközben kritikusá előlépett A tevékenység miatt újabb, a B tevékenységet nem tartalmazó kritikus „ág” jelent meg. Így önmagában B tevékenység idejét rövidíteni a teljes átfutási idő rövidítése céljából nem lenne elegendő, azt az A-val együtt kellene rövidíteni. Együttes költség-intenzitásuk viszont $60+80=140$ eFt/hónap. Ennél olcsóbban is megúszhatjuk a „rövidítést”, ha a 110 eFt/hónap költség-intenzitású F tevékenység időtartamát csökkentjük egységnyivel.

Ezzel gyakorlatilag el is érkeztünk feladatunk „a.)” kérdésének megválaszolásához. A modellezett projekt 10 hónap alatt történő megvalósításának minimális közvetlen költsége: $C_{10}^{\min} = 1080$ eFt.

A legnagyobb közvetlen költségek görbéjéhez a következő, 9 hónapos időtartamú „ütemterv” eléréséhez – maradva az eddigi kritikus úton – még tudjuk növelni a B tevékenység időtartamát, melynek költség-intenzitása a G tevékenységet követően a legkisebb. (A kritikus út egyéb tevékenységeit illetően: E tevékenység időtartama nem változtatható, G tevékenység pedig már leghosszabb időtartamával szerepel.) B időtartamát növeljük.



$$C^{\min}(10) = 1080$$

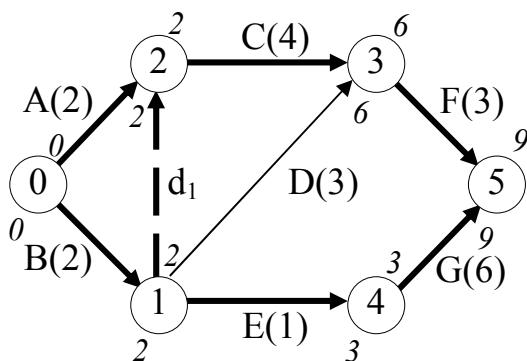


$$C^{\max}(9) = 1630$$

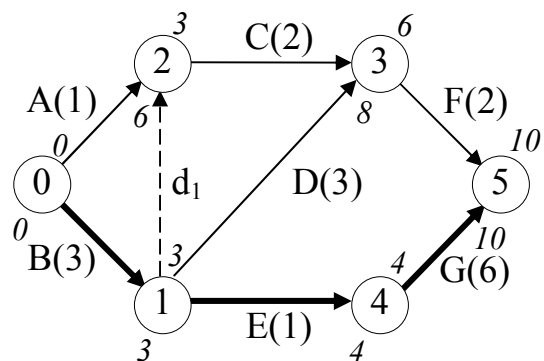
Tovább folytatva a költség görbék feltárását: A minimális költségeknél a 9 hónapos teljes átfutási időhöz – maradva az előző kritikus úton – még csökkenthetjük F tevékenység időtartamát. A közvetlen költségek újabb növekménye szintén 110 eFt lesz.

Ugyancsak maradva az előző kritikus úton a legnagyobb közvetlen költségek görbéjének feltárásához a B tevékenység időtartamának növelésére van még további lehetőség. A csökkenés a legnagyobb közvetlen költségek értékében ismét 60 eFt lesz.

Megjegyzés: A szub-kritikus utakat – némi rutinnal – figyelve a költség görbék feltárása során az egységnyinél nagyobb változtatás lehetősége – anélkül, hogy lekerülne a kritikus út az eddigi ágról – felismerhető. Itt például mindkét közvetlen költség görbe esetében az látható, hogy az utóbbi két lépést akár egyszerre is „megléphettük” volna, két-két időegységnyit módosítva, 5-ről 3-ra csökkentve az F, illetve 1-ről 3-ra növelve a B tevékenység időtartamát.



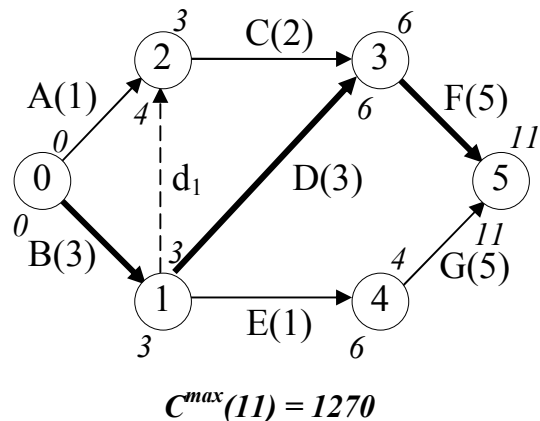
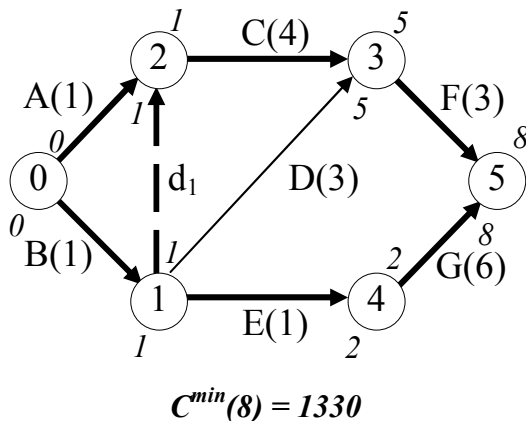
$$C^{\min}(9) = 1190$$



$$C^{\max}(10) = 1570$$

A folytatás ismét változást hoz a mértékadó rész-gráf, a „kritikus út” elemeiben. A legkisebb közvetlen költségek görbéjének feltárása közben újabb tevékenységek váltak kritikussá, és hasonlóan A és B tevékenység viszonyához, F tevékenység időtartamának további – egyébként lehetséges – rövidítése sem eredményezné önmagában a teljes átfutási idő csökkenését. Azt G tevékenységgel együtt kellene rövidíteni. (E tevékenység időtartama nem változtatható.) Együttes költségintenzitásuk viszont $110+30=140$ eFt/hónap, ugyanannyi, mint A és B együttesének esetében. Ha több azonos értékű lehetőségünk van, szabadon választhatunk. Pusztán az „ábécé” kedvéért, mi az A és B tevékenységek időtartamának egységnyi együttes csökkentését választjuk.

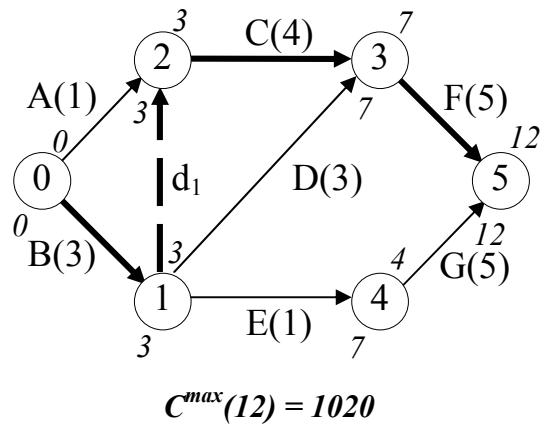
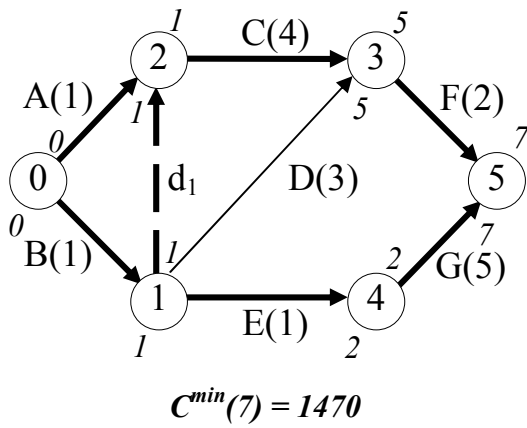
A legnagyobb közvetlen költségek feltárásánál a B-E-G tevékenységláncbeli növelési lehetőségek kimerültek, újabb kritikus út után kell néznünk. Esetünkben A tevékenység időtartamának „legnagyobb mértékű” növelése sem változtatna az átfutási időn. D tevékenység időtartama nem változtatható. C időtartamának legnagyobb mértékű, 2 hónapnyi növelése után még F időtartamát is növelni kellene 2 hónappal ahhoz, hogy a kritikus út rájuk kerüljön, ami együttesen 470 eFt költségcsökkenést eredményezne. Ha viszont csak F tevékenység időtartamát növeljük 3 hónappal, akkor D tevékenység kritikussá válása mellett a költség csak 330 eFt-tal csökken. Mivel a G tevékenység a teljes átfutási időben ekkor már nem játszik szerepet, időtartamát visszaállítjuk a legnagyobb közvetlen költségű értékre. Mindezek együttes hatása $(3 \cdot 110) - (1 \cdot 30) = 300$ eFt költségcsökkenés lesz.



Az utolsó láncszem a közvetlen költség görbék feltárásában a legrövidebb teljes átfutási idejű-, legkisebb közvetlen költségű „ütemterv-változat” és a leghosszabb teljes átfutási idejű-, legnagyobb közvetlen költségű „ütemterv-változat” meghatározása.

A legkisebb közvetlen költségek görbéjének meghatározásánál – tekintve, hogy A és B tevékenység tovább már nem rövidíthető, illetve E tevékenység időtartama nem változtatható – két változatot kell megvizsgálnunk. C és G tevékenység időtartamának együttes csökkentése $125+30=155$ eFt költségtöbbletet eredményezne (a D tevékenység egyidejű kritikussá válásával), míg F és G tevékenység időtartamának együttes egységnyi csökkentése csak $110+30=140$ eFt költségnövekedéssel járna. Ez utóbbit választjuk. Modellünk szerint a legrövidebb, 7 hónapos teljes átfutási idejű megvalósítás minimális közvetlen költsége 1470 eFt.

A legnagyobb közvetlen költségek görbéjének feltárásánál a teljes átfutási idő növeléséhez már csak a C tevékenység időtartamának 2 hónappal történő növelése jöhet számításba. Az ehhez társuló költségcsökkenés $2 \cdot 125 = 250$ eFt. (Ezzel egyidejűleg a kritikus út lekerül a nem változtatható időtartamú D tevékenységről.) Modellünk szerint a leghosszabb teljes átfutási idejű megvalósítás maximális közvetlen költsége 1020 eFt.

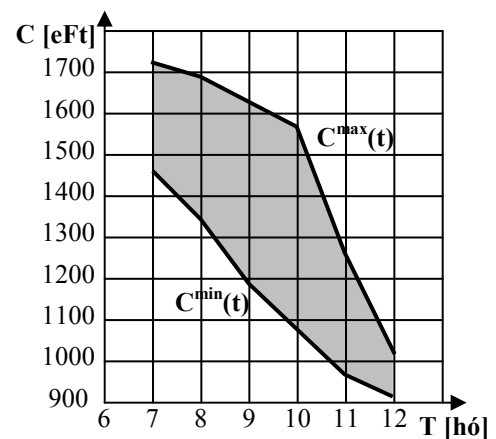


A rész-megoldások összevetése útján érdemes megfigyelni, hogy például

- A legrövidebb időtartamú megvalósítást tekintve a legnagyobb- és a legkisebb közvetlen költségű változatnál a költség-eltérést a C tevékenység roham-, avagy normál idejű kivitelezéséhez társuló közvetlen költségek különbsége adja: $C_7^{max} - C_7^{min} = 1720 - 1470 = 250 = 2 \cdot 125$ eFt.
- A leghosszabb időtartamú megvalósítást tekintve a legnagyobb- és a legkisebb közvetlen költségű változatnál a költség-eltérést az A és a G tevékenység roham-, avagy normál idejű kivitelezésének közvetlen költség különbsége adja: $C_{12}^{max} - C_{12}^{min} = 1020 - 910 = 110 = 80 + 30$ eFt.

Feladatunk „b.)” részének lezárásaként költség-idej diagramon ábrázoljuk az eredményeket:

Ha hinni lehet a modellünknek, a kivitelezési munkálatok tényleges időtartama és közvetlen költségei valahol a két görbe által határolt területen belül fog elhelyezkedni. Mindkét irányú (min-max) „bemérése” a projekt közvetlen megvalósítási költségeinek eredendően a vállalkozót segíti a potenciálisan felmerülő költségek becslésében, valamint ajánlati árának, kockázatvállalási politikájának kialakításában. A megrendelő oldaláról ez eredendően csak igen „nagyvonalú” becslésként kezelhető!



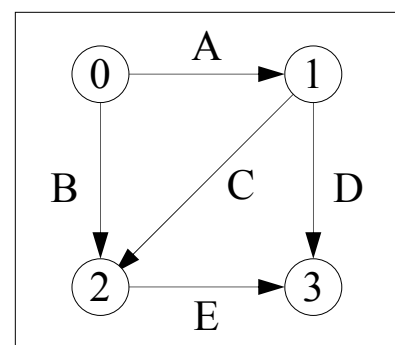
A fenti feladat megoldása során alkalmazott, és a szakirodalomban a probléma szemléltetésére előszeretettel bemutatott „Brute-Force” („brute force”=„nyers erő”, amit mi inkább „józan paraszti észnek” mondanánk) algoritmus – a kisebb költség-intenzitások preferálása, a kritikus út változásainak folyamatos nyomon követése – viszonylag jól érthető, áttekinthető, gyors „tárgyalást” tesz lehetővé. Az egyre kiterjedő, vagy éppen szűkülő-, áthelyeződő-, kritikus út azonban sejteni engedi, hogy egy keresett teljes átfutási időhöz tartozó legkisebb-, illetve legnagyobb közvetlen költségű „ütemterv-változat” meghatározása bonyolultabb feladatnál komoly nehézségekbe ütközhet. Sőt mi több, ezt az „algoritmust” könnyű lépre csalni, félre vezetni.

Állításunk igazának bizonyosságául szolgáljon az alábbi mini-feladat:

Adjon javaslatot az egyes tevékenységek időtartamának megválasztására ahhoz, hogy az itt mellékelt projekt a lehető legkisebb közvetlen költséggel megvalósítható legyen 4 időegység alatt!

Tev	Normál		Roham	
	idő	ksg	idő	ksg
A	2	1	1	3
B	3	1	1	5
C	2	1	1	2
D	3	1	1	5
E	2	1	1	3

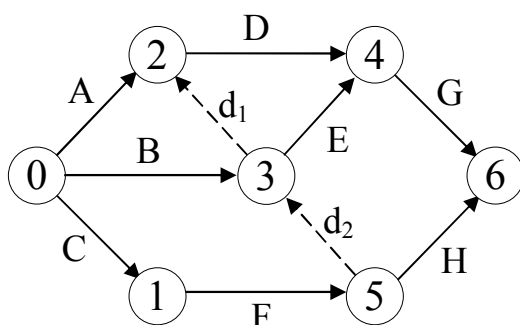
CS
2
2
1
2
2



Gyakorló feladatok:

H.1 Egy generál-kivitelezési megbízást elnyerni törekvő vállalkozó szerződés-előkészítő tárgyalásai során kirajzolódni látszanak a sarokszámok. A feladat elvégzéséért a megrendelő hajlandó a vállalkozó által kért árat megfizetni, de ragaszkodik a 15 hónapnál nem hosszabb kivitelezési időtartamhoz, amit igen szigorú (napi 0.5 %) késedelmi kötbérrel kíván bebiztosítani a maga számára. Mindent egybevetve az időre elkészülő vállalkozás – legfeljebb 750-760 millió Ft-os közvetlen költséggel számolva – elfogadható nyereséget biztosítana a vállalkozó számára.

A rész-feladatok („tevékenységek”) összefüggéseit, és az azok megvalósításához szóba jöhető megoldások előzetesen kalkulált idő- és (közvetlen) költség vonzatait – hónap-, illetve millió Forint egységben kifejezve – az alábbi hálós struktúra és táblázat foglalja össze.



Tev	Normál		Roham	
	idő	ksg	idő	ksg
A	8	60	7	90
B	9	150	5	310
C	2	30	1	50
D	2	70	2	70
E	3	80	1	140
F	5	120	4	160
G	5	90	3	190
H	6	80	4	120

Készítsen ütemezési javaslatot a vállalkozó számára, törekedve a szükséges pénzbeli ráfordítások (közvetlen költségek) minimalására!

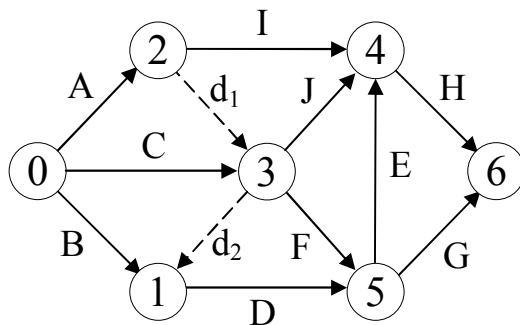
H.2 Az előző (H.1) feladat folytatásaként ... A kedvezően alakuló előkészítő tárgyalások során a vállalkozó egyik előzetesen felkért, az „F” jelű részfeladat elvégzésére kiszemelt alvállalkozója (beszállítója) jelzi, hogy a tervek alapos felülvizsgálása után szakemberei arra a következtetésre jutottak, hogy a feltételezett műszaki megoldással „képtelenség” az adott feladat-részt 8 hónapnál rövidebb idő alatt elkészíteni. A megrendelő ragaszkodik(!) az elképzelt műszaki megoldáshoz.

Milyen árendemény felajánlására kényszerülhet az alvállalkozó (beszállító), hogy az említett („F”) feladat-rész elvégzésére szóló megbízást elnyerje – feltéve, hogy az piac-stratégiai és egyéb okokból feltétlenül fontos a számára, – illetve milyen további intézkedéseket (döntéseket) igényelhet e belső rész-idő módosulás a (fő/generál) vállalkozótól, hogy a tárgyalások során elért pozícióit (határidő és vállalási ár vonatkozásában) tartani tudja?

H.3 Elemi csapás következtében használhatatlanná vált épület mihamarabbi rekonstrukciójához (pótlásához) a megrendelőnek erős gazdasági/társadalmi érdekei fűződnek. A helyreállításra/pótlásra felkért vállalkozó – figyelembe véve a szóba jöhető műszaki megoldásokat – összeállítja a munkálatok logikai hálós ütemtervét, és becsléseket készít a „lehető leggyorsabb” kivitelezés „lehető legolcsóbb” változatának meghatározásához (lásd alábbi hálódiaagram és táblázat adatai hónap-, illetve millió Forint egységben értelmezve). Tekintettel a kiemelt közösségi érdekekre a vállalkozó önköltségi áron, a becsült közvetlen költségek megtérítése ellenében hajlandó a munkálatokat elvégezni.

a) Határozza meg a legrövidebb átfutási időhöz tartozó minimális közvetlen költséget!

- b) Mint ahogy az lenni szokott, a megrendelő a kalkulált összeget így is túl soknak találja. Ugyanakkor nem szívesen mondana le az épületről és a benne foglalt funkciókról. Elősegítő a döntéshozók munkáját, másfél évtől (18 hónap) két évig (24 hónap) terjedő időszakra havi lépésekben határozza meg a teljes kivitelezési-idő változatokhoz tartozó minimális közvetlen költségeket!
- c) Milyen hosszú kivitelezési idő előirányzását célszerű választania a megrendelőnek, ha az épület, illetve a benne foglalt funkció ideiglenes kiváltása (áttelepítése, pótlása) – ide számítva a közvetetten érvényesülő többlet kiadásokat, elmaradó bevételeket is – havi 75 millió Forint rendkívüli „költség-többlet” jelent a megrendelő számára?

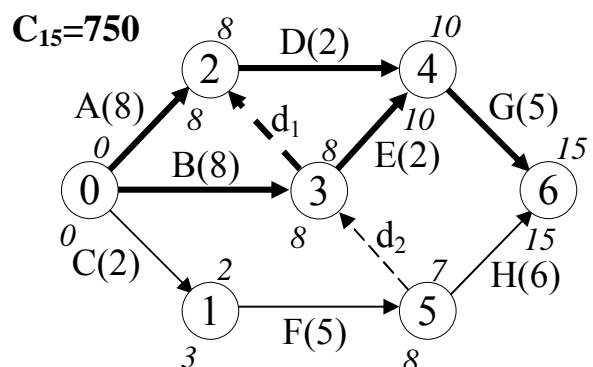
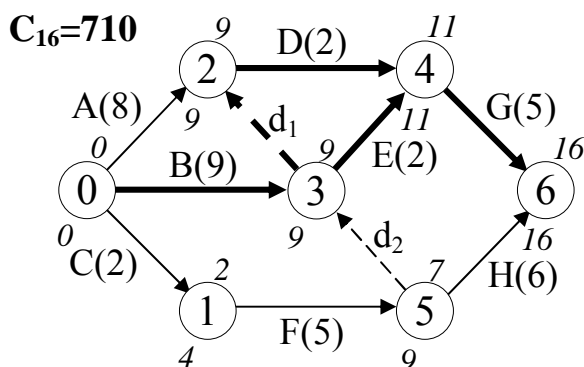
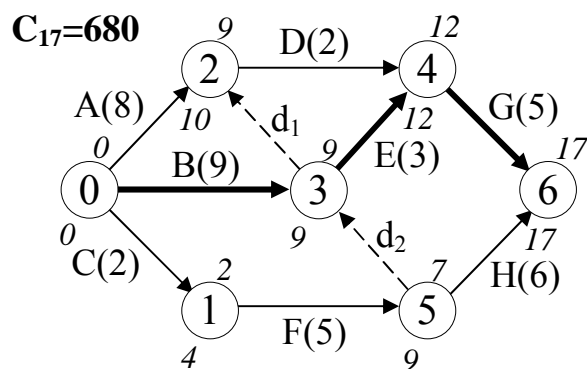


Tev	Normál		Roham	
	idő	ksg	idő	ksg
A	5	80	2	170
B	5	120	5	120
C	6	90	4	210
D	6	110	3	290
E	5	40	4	60
F	4	70	2	130
G	12	100	7	300
H	8	50	6	90
I	9	250	8	300
J	8	140	5	260

Feladat megoldások

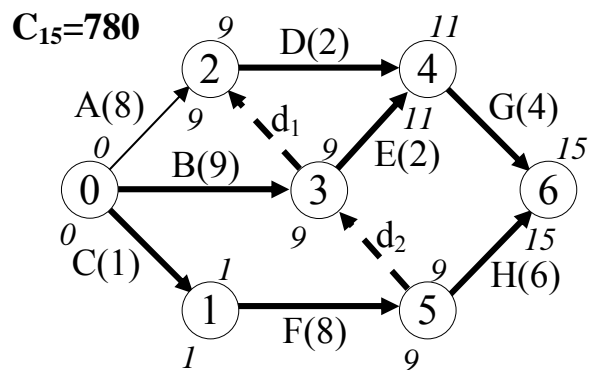
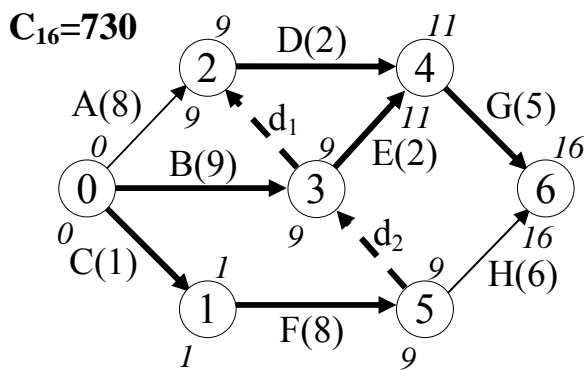
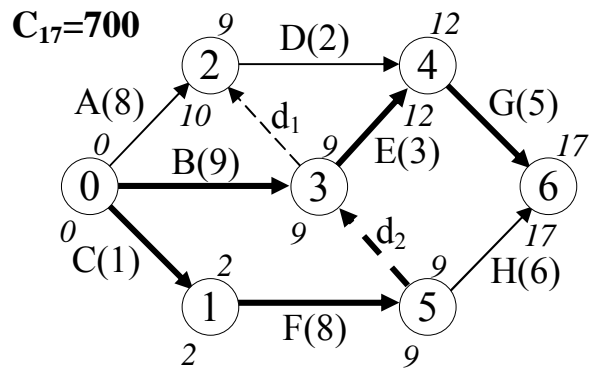
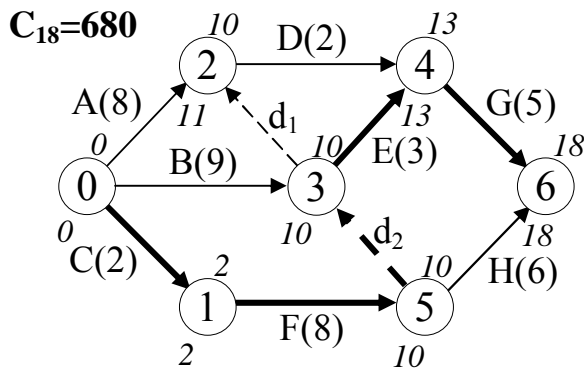
H.1 A minimális közvetlen költségek meghatározását a leghosszabb átfutási idejű (a tevékenységek normál időtartamait alapul vevő) változattól kiindulva két lépésben meghatározhatjuk.

Tev	Normál		Roham		CS
	idő	ksg	idő	ksg	
A	8	60	7	90	30
B	9	150	5	310	40
C	2	30	1	50	20
D	2	70	2	70	-
E	3	80	1	140	30
F	5	120	4	160	40
G	5	90	3	190	50
H	6	80	4	120	20



H.2 Feltételezve, hogy az alvállalkozó által elvégzendő („F”) tevékenységnek „csak” a normál ideje változik 8 hónapra, normál költsége marad 120 millió Forint, illetve a roham idő meg- egyezik a normál idővel, meghatározható a 15 hónap átfutási időhöz tartozó „új” minimális közvetlen költség, ami 780 millió Forintra adódik.

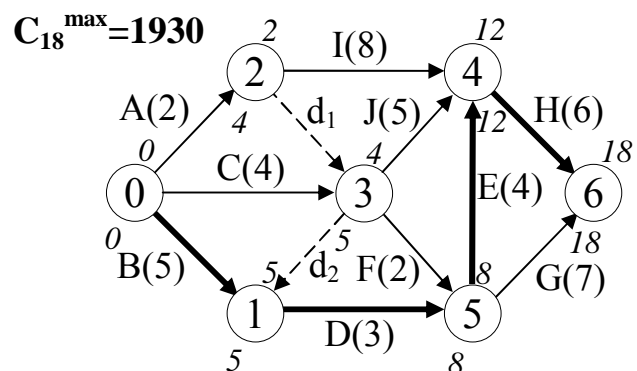
Az új változat az előzőhöz képest a „C” és „G” tevékenységek egy-egy hónapos gyorsítását kívánja meg, miközben lehetővé teszi a „B” tevékenység tempójának lazítását. Mindemellett a jelentkező 30 millió forintos költségtöbbletet a generál vállalkozó vélhetőleg az alvállalko- zó irányában (is) megpróbálja áthárítani, így az 25 %-os(!) árengedményre is kényszerülhet.

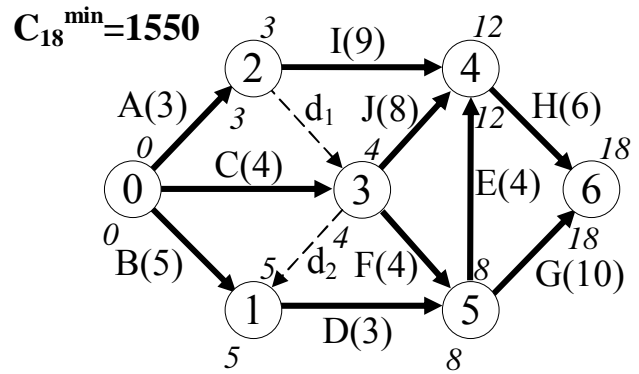
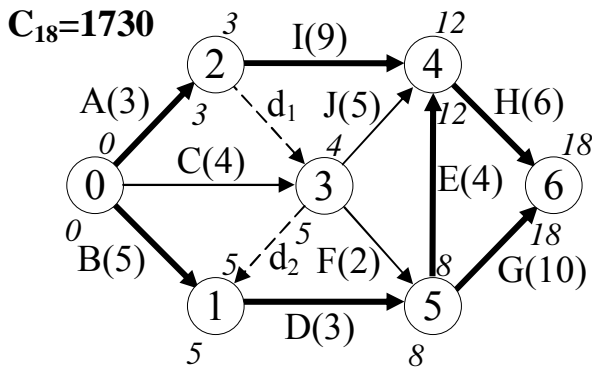


H.3 A feladat a) kérdésének megválaszolását a legrövidebb átfutási idejű, így maximális költségű (a tevékenységek roham időtartamait alapul vevő) változattól célszerű megközelíteni.

A legrövidebb átfutási időhöz tartozó legkisebb közvetlen költséget a nem kritikus tevé- kenységek tempójának lazításával (időtartamaik növelésével), elsődlegesen a legnagyobb költség-intenzitású tevékenységekre („vágásokra”) koncentrálnva tudjuk meghatározni. ...

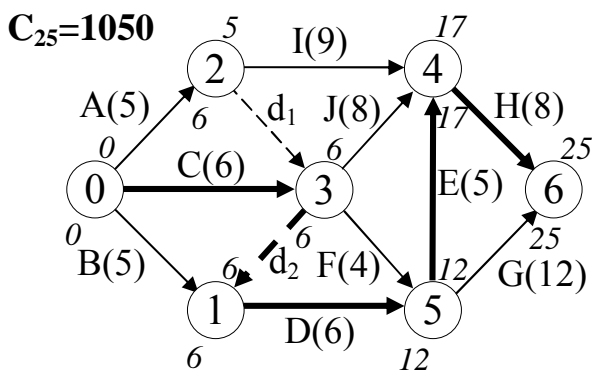
Tev	Normál		Roham		CS
	idő	ksg	idő	ksg	
A	5	80	2	170	30
B	5	120	5	120	-
C	6	90	4	210	60
D	6	110	3	290	60
E	5	40	4	60	20
F	4	70	2	130	30
G	12	100	7	300	40
H	8	50	6	90	20
I	9	250	8	300	50
J	8	140	5	260	40





A feladat b) részének megoldása gyakorlatilag valamennyi szóba jöhető átfutási idő változat minimális közvetlen költségének meghatározását igényli, amit akár az előzőleg meghatározott legrövidebb átfutási idejű, legolcsóbb, akár a leghosszabb átfutási idejű, legolcsóbb változat irányából is megtehetünk.

Az alábbiakban megmutatjuk a leghosszabb idejű, legolcsóbb változatot, a továbbiakra nézve azonban csak az eredményeket közöljük – táblázatos formájában. Ez utóbbiban feltüntetjük a c) feladat-részben említett havi 75 millió forintos közvetett extra költségek, illetve az „összegzett” költségek alakulását is.



T	$C_{közvetlen}$	$C_{közvetett}$	ΣC
18	1550	1350	2900
19	1400	1425	2825
20	1310	1500	2810
21	1250	1575	2825
22	1190	1650	2840
23	1130	1725	2855
24	1070	1800	2870
25	1050	1875	2925

A feladat c) kérdésének megválaszolásához a közvetlen- és a közvetett („extra”) költségek együttesét kell tekinteni, ami alapján a 20 hónapos kivitelezési idő preferálása tűnik célszerűnek.

I – AZ MPM/PDM MODELL

Ha valami széles körben, újabb és újabb változatok sokaságában terjed el a gyakorlatban, annak szokás szerint két oka lehet: 1.) Az a valami annyira jó, annyira szellemes, hogy egyre szélesebb körben ébrednek rá az alap-ötlet alkalmazhatóságára, és egyre több területen mozgatja meg az emberek fantáziáját a saját- és az éppen tárgyalt problémák hasonló vonásainak felismerése. 2.) Az a valami nagyon szellemes, sok esetben igen jó, de még mindig nem „tökéletes”, nem elég „univerzális” ahhoz, hogy a hasonló alkalmazások hasonló igényeit minden változtatás nélkül kielégíthesse.

A B. Roy által 1956-ban „Potenciálok Módszere” néven ismertetett modellben nem kérdés az előző fejezetekben említett átlapolt időhelyzetek kezelése. Igaz, az ő módszere szakítható el leginkább a gráfok világától, sőt, az idő-ütemtervháló, mint sajátos gráfok („hálózatok”) lehatárolásával eleve konfliktusba kerül. Az is igaz, hogy a javasolt módszer nem kifejezetten „hálós” környezetben, hanem az operációkutatás egy sajátos területén, az ütemezési („Scheduling”) feladatok¹⁶ között megfogalmazott egyik feladat (megelőzési/sorrendiségi megkötések kezelése) megoldására szolgál.

Alap-ötlete egyszerű: Ha eleve ismerjük az ütemezendő rész-feladatok (tevékenységek) előre meghatározott időtartamát, időbeli pozíciójuk meghatározására elegendő valamelyik határidejük, mondjuk lehetséges („potenciális”) kezdési időpontjuk meghatározására koncentrálnunk. (Innen az elnevezés.) A kezdési időpotenciálok egymás közötti („relatív”) viszonyaira pedig „tetszőleges”, akár alulról- és/vagy felülről korlátozó feltételeket fogalmazhatunk meg. A kezdési időpontokra vonatkozó feltételeket kielégítő megoldás(ok) – amennyiben van(nak) ilyen(ek) – ismeretében pedig a tevékenységidő egyszerű hozzáadásával valamennyi tevékenység időbeli pozíciója, azaz „ütemterve” előállítható. Ezzel a megközelítéssel a tevékenységek tetszőleges relatív időhelyzete (soros / párhuzamos / átlapolt) kezelhető, hiszen a tevékenységidők ismeretében bármilyen kívánt időhelyzet előállításához szükséges korlátozás a kezdések közötti korlátozásra egyszerűen átszámítható.

Ha a tevékenységek ilyenét időbeli összefüggéseit grafikusán ábrázolni szeretnénk, akkor a kialakítandó gráfon a tevékenységeket (helyesebben azok kezdetét) a csomópontok reprezentálnák, az élek pedig – súlyszámaikkal együtt – a tevékenységek kezdése közötti (páronkénti) relatív numerikus (konkrét számértékkel adott) alsó- és/vagy felső időkorlátokat képviselnék. Innen ered az ilyen típusú tervütem háló „tevékenység-csomó háló” (AON = Activity On Node = „tevékenység a csomóponton”) elnevezése is.

Bár a kezdőpontok mint kezdési időpotenciálok preferálásának ötlete látszólag minden relatív időhelyzet kezelésére módot ad, sőt, alsó- és felső korlátok (minimális és maximális relatív késleltetési idők – „lead- and lag-times”) bevezetésével látszólag gazdag eszköztárat kínál az ütemterv készítő, idő-modellezők számára, a logikai (hálós) időtervekkel szembeni egyik legfőbb, elsődleges elvárást, az „állékonyság” képességét, illetve követelményét nem teljesíti. Nevezetesen: például az egyszerű „soros” folyamatkapcsolás („a követő folyamat elkezdésének feltétele a megelőző tevékenység teljes elkészülte” – lásd: CPM/PERT csomópont) modellezésénél is, ha változik a megelőző tevékenység időtartama, akkor a változást a kapcsolatok rendszerén („logikai vázon”) is át kell vezetni. Ily módon a hálós logikai-, illetve paraméter-struktúra nem „függetleníthető” a tevékenységidőktől.

¹⁶ Az ütemezési feladatok jellemzően telepített ipari környezetben, különféle korlátozó feltételek és megszorítások figyelembevételével megfogalmazott gép- és munkadarab ütemezési problémák, melyek közül igen sok gyakorlatilag nélkülözi a közvetlen megoldás lehetőségét. Jelentős részükre napjainkban is „csak” részleges leszámplálási (a lehetséges megoldásokat tételesen, avagy rész-halmazokra bontva vizsgáló – ú.n. Branch & Bound, illetve Implicit Enumerációs) „algoritmusok” szolgálnak segítségül. Ide tartoznak például a különféle sorrendtervezési feladatok is, melyek legnagyobb ellenfele a matematikában „faktoriális robbanás”-nak nevezett jelenség. Bővebben, mint „Scheduling”, lásd. ...

A modell ezen hiányosságának pótlására – az él-paraméterek mellé rendelt, és a kapcsolat jellegére utaló kódolt szöveges információk bevezetésével – rövid időn belül kiegészítették a modellt az azóta is leggyakrabban alkalmazott négy alapvető kapcsolati típussal, mely a tevékenységek időbeli lefutásának változatlan intenzitását („lineáris progressziót”) feltételezve már valóban állékony, és a termelésirányítás számára is kielégítő modellezési nyelvet eredményezett. A modellt az 1950-es évek végén Franciaországban sikeresen alkalmazták egy atomerőmű-beruházás kapcsán. A sikeres alkalmazást követően a módszer – „hivatalos” elnevezésének a nyugat-európai államok egyik akkori tanácsadó- és az eljárást propagáló szervezete nevével történt kiegészítésével – „Metra Potenciálok Módszere” („Metra Potential Method” = MPM) néven vonult be az európai (francia, német, magyar, stb.) szakirodalomba.

A PERT és CPM technikák kezdeti mindent elsöprő sikere ellenére a termelés-közeli hálós időmodellezési technikák ki-, illetve továbbfejlesztésének igénye az Atlanti óceán túlsó partján is megfogalmazódott. A széles körben elterjedt megoldást az IBM megbízásából kidolgozásra került és piacra dobott számítógépes szoftver képviselte. Ennél a megoldásnál is a tevékenység a gráf „csomópontjába” kerül, és az élek paramétereikkel együtt itt is relatív időkorlátokat jelölnek, de az élekhez rendelt kapcsolati-típus azonosító szöveges kód helyett – kihasználva a grafikus eredményközlés kínálati lehetőségeket – inkább a „csomópontokon” elhelyezkedő tevékenység-pajzsok bal- (mint kezdés) és jobb (mint befejezés) oldalát használták fel a kapcsolatok típusának megjelenítésére. (Attól függően, hogy egy grafikus nyíl egy tevékenység kezdetéből, avagy végéből indul-e ki, és a másik tevékenység kezdetébe, avagy végébe köt-e be, lehet értelmezni a szintén négy alapvető kapcsolatot.) E grafikus „trükkre” utalva a módszer „Megelőzés-ábrázolási Módszer” („Precedence Diagramming Method” = PDM) néven terjedt el az amerikai szakirodalomban.

Bár az utóbbi módszert ismertető szakirodalom ritkán tesz említést a tevékenységek között beépíthető, akár többszörös, egyidejű korlátozásokról (többszörös kapcsolatok), avagy az alulról és/vagy felülről történő korlátozások (minimális és maximális kapcsolatok) lehetőségéről, ez a „fogyatékoság” inkább csak (szoftver-)fejlődéstörténeti-, illetve (cél-)közönségi (piaci) okokkal magyarázható, mintsem a modell adta lehetőségekkel. A tevékenységeket a csomópontoknál értelmező hálós logikai modelleket ma már gyakorlatilag alternatív módon illelhetjük „MPM”, avagy „PDM” névvel is, olvasatuk és szolgáltatásaik érdemben azonosak. Igaz a számítástechnika robbanásszerű elterjedésével – és az ebből adódó amerikai-angol piaci és szakirodalmi dominanciából adódóan – világszerte inkább a PDM elnevezés az elterjedtebb, míg az MPM¹⁷ titulus mellett az európai szakirodalom tart ki hősiesen. ...

A hálós időmodellek tárgyalásának bevezetőjében már említést nyert, hogy az idő-modellezés szempontjából a „tevékenység” és az „esemény” átjárható-, de csak „körültekintéssel” átjárható fogalom. A tevékenység csomópontú hálós modelleknél az idő múlását szemléltető (befolyásoló), időbeli kiterjedéssel (korlátozott időtartománnyal) bíró gráf-élek mellett a csomópontokban is időbeli kiterjedéssel bíró valamiket, nevezetesen tevékenységeket (korlátozott időtartományokat) értelmezünk. A grafikus, helyesebben „gráf-” analógia itt már sérül, illetve az eredeti lehatárolások, korlátozások, értelmezések és meghatározások felülvizsgálatra szorulnak. Ezek tárgyalása előtt azonban tekintsük át az MPM/PDM modellek által kínált lehetőségeket. ...

¹⁷ A Potenciálok Módszere, mint „Project Scheduling Problem” (PSP), azaz „projekt ütemezési feladat” az ütemezési („Scheduling”) feladatok között mint építőelem változatlanul tovább él, de annak megoldhatóságát feszegetve és attól függően, hogy milyen célfüggvényt, illetve további korlátozásokat rendelnek mellé, TCPSP (Time-Constrained Project Scheduling Problem = időkorlátos projekt ütemezési feladat), illetve RCPS (Resource-Constrained Project Scheduling Problem = erőforrás korlátos projekt ütemezési feladat) néven tárgyalja a vonatkozó operációkutatási szakirodalom. A széles körben ismert időmodellezési feladatok megfeleltetéséhez további kiegészítő betűkódokkal jelölik, ha a megoldhatóság szempontjából kritikus felső korlátok („maximális kapcsolatok”) egyidejű jelenléte is megengedett egy adott ütemezési feladatnál (pl.: RCPSP/max)

Tevékenység a csomópontban

Az MPM/PDM modellben a gráf csomópontjaiba helyezett tevékenységeket meg nem szakítható, rögzített idejű, állandó (munka-)intenzitású időbeli folyamatokként értelmezzük. Befejezésük és kezdésük közötti idő-különbség a tevékenység időbeli pozíciójától függetlenül állandó – ami a számításoknál kap fontos szerepet. (Ha ismerem egy tevékenység kezdését, ismerem befejezését is, és fordítva. A kettő közötti különbség az előre rögzített időtartam.)

A tevékenységek adatainak csomópontbeli összefoglalására az alábbi táblázatos („pajzsos”) kialakítást alapvetően kézi számításokhoz javasoljuk. A járatos szoftverek általában ettől eltérő elrendezés „szabad” kialakítását is támogatják. A kiindulási- és eredményadatok jelölésére a továbbiakban a CPM technikánál már ismertetett („nemzetközi”) rövidítéseket használjuk (értelmezésüket lásd ott):

[ID]		
ES	D	EF
LS	TF	LF

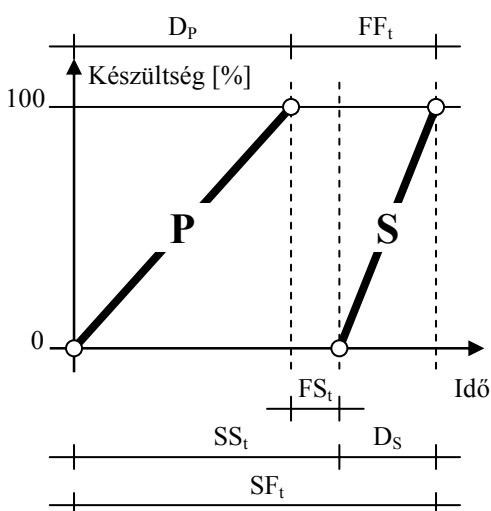
ID = identifier = azonosító (opcionális);
D = duration = időtartam;
ES = early start = lehetséges legkorábbi kezdés;
EF = early finish = lehetséges legkorábbi befejezés;
LS = late start = megengedhető legkésőbbi kezdés;
LF = late finish = megengedhető legkésőbbi befejezés;
TF = total float = teljes tartalékidő.

Megjegyzés:

Az itt javasolt adat-elrendezésben felismerhetően a hat számszerű adatból három redundáns, egymásból kölcsönösen meghatározható, hiszen $EF=ES+D$; $LF=LS+D$; $TF=LS-ES=LF-EF$. Ugyanakkor a kézi számítást nagyban segíti.

Korlátozások (kapcsolatok) az éleken, kapcsolati alap-típusok

A meg nem szakítható, rögzített időtartamú és állandó (munka-)intenzitású tevékenységek időbeli lefutásának jellemzéséhez elegendő két-két határ-időpontjuk (kezdésük és befejezésük) megadása, illetve figyelemmel kísérése. A tevékenységenkénti két-két kitüntetett időpont logikailag négyféle „párosítást” (korlátozási/kapcsolati alap-típust) tesz lehetővé.



FF = finish-finish = „befejezés-befejezés”;
FS = finish-start = „befejezés-kezdés”;
SS = start-start = „kezdés-kezdés”;
SF = start-finish = „kezdés-befejezés”.

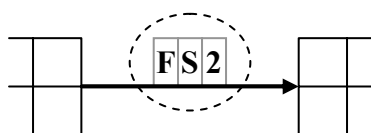
	FF_t	FS_t	SF_t	SS_t
FF_t		$t' = t - D_S$	$t' = t + D_P$	$t' = t + D_P - D_S$
FS_t	$t' = t + D_S$		$t' = t + D_P + D_S$	$t' = t + D_P$
SF_t	$t' = t - D_P$	$t' = t - D_P - D_S$		$t' = t - D_S$
SS_t	$t' = t + D_S - D_P$	$t' = t - D_P$	$t' = t + D_S$	

A négy kapcsolati alap-típus a rögzített tevékenység-időtartamok miatt számszakilag átjárható (lásd fenti táblázat). (Ennek kihasználását javasolta B. Roy az általa felvetett potenciál-módszer eredeti változatában.) A kapcsolat típusának megválasztását alapvetően a modellezni kívánt műszaki, logikai összefüggések és a logikai vázzal szembeni állékonysági követelmény határozza meg.

A négyféle „párosításból” adódó négy kapcsolati alap-típust mind az MPM, mind a PDM szakirodalma megemlíti, időparaméterének eredendően alsó korlátkénti – „minimálisan biztosítandó követési idő” – értelmezésével. Az ugyanezen határidőpont-párosításokra felírható felső korlátozások (maximális betartandó követési idő előírása) lehetőségének megemlítése viszont eredendően az MPM technikához kötődik¹⁸. Mi a továbbiakban az alsó és felső korlátozásokat – mint „-minimum” és „-maximum” típusú kapcsolatokat – együtt tárgyaljuk.

Kapcsolatok grafikus megjelenítése

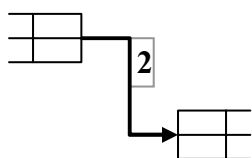
Az MPM hálós diagramoknál az éleken értelmezett kapcsolatok ábrázolásának konvenciói szerint alsó korlát, azaz „minimum” típusú kapcsolatok esetén a folyamatos vonallal ábrázolt nyíl a „megelőző” (viszonyítási alap) tevékenység pajzsának tetszőleges pontjából a „követő” (viszonyított) tevékenység pajzsának tetszőleges pontjába mutat. Az összevetett határidőpont-párt (a kapcsolat típusát) és a korlát-értéket a nyílra (mellé) írt, három részből álló alfa-numerikus kód azonosítja:



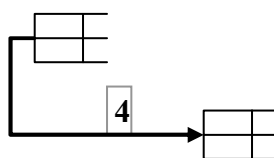
itt: „Finish-Start kettő”
(alulról korlátozó, „minimális”)
kapcsolat

- Első karakter: a „megelőző” tevékenység határidőpontja („S”, vagy „F”);
- Második karakter: a „követő” tevékenység határidőpontja („S”, vagy „F”);
- Szám-karakterek (akár előjellel is): a „követő” tevékenység nevesített határidőpontjához rendelt időpotenciál (π_j) és a „megelőző” tevékenység nevesített határidőpontjához rendelt időpotenciál (π_i) különbségére előírt alsó korlátérték (τ_{ij}). ($\pi_j - \pi_i \geq \tau_{ij}$)

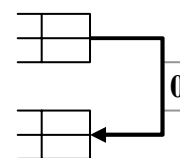
A PDM hálós diagramoknál az éleken értelmezett kapcsolatok ábrázolásának konvenciói szerint a kapcsolat mint alsó korlát értelmezendő. A folyamatos vonallal ábrázolt nyíl a „megelőző” (viszonyítási alap) tevékenység pajzsának megfelelő oldalából, kezdéséből (baloldal), illetve végéből (jobb oldal) a „követő” (viszonyított) tevékenység pajzsának megfelelő oldalára, kezdetére (bal oldalára), illetve végére (jobb oldalára) mutat. Az élen (a mellett) már csak az előírt (akár előjeles) korlát-érték kerül feltüntetésre. (A kapcsolatok táblázatos, illetve szöveges összefoglalásakor ugyanazok a hármas tagolású alfa-numerikus kódok használatosak, mint az MPM esetében.)



„Finish-Start kettő”
(alulról korlátozó, „minimális”)
kapcsolat



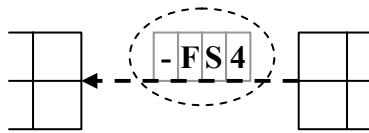
„Start-Start négy”
(alulról korlátozó, „minimális”)
kapcsolat



„Finish-Finish nulla”
(alulról korlátozó, „minimális”)
kapcsolat

¹⁸ A PDM (eddig ismert) szakirodalma a felső korlátozásokról nem igen tesz említést, aminek vélhetően „célszerűségi” oka van. A PDM megjelenése piaci környezetben szánt szoftver-termék kifejlesztéséhez kötődik. Az alsó és felső korlátozások együttes alkalmazása nem kellő körültekintés mellett könnyen ellentmondásos feltételrendszerhez vezethet, ami megoldhatatlanná teszi az ütemezési feladatot. A nem szakember, kellően nem felkészült, „átlag” felhasználó számára ez valós csapda-helyzetet jelenthet, aminek nem célszerű kitenni a potenciális vásárló közönséget. A szakmai célközönségnek szánt fejlettebb szoftverek – sok egyéb kiegészítő lehetőség és funkció mellett – már kezelik a maximális, avagy többszörös kapcsolatokat is, de azokban a hálós modellezési lehetőség már „csak” egy alternatív „segédeszköz”. ...

Az eredendően az MPM technikához kötődő, felülről korlátozó kapcsolatot az ott használatos ábrázolási konvenciói szerint a „követő” (viszonyított) tevékenység pajzsának tetszőleges pontjából a „megelőző” (viszonyítási alap) tevékenység pajzsának tetszőleges pontjára mutató („fordított irányú”), és – a kapcsolat felülről korlátozó jellegét kihangsúlyozandó – szaggatott vonallal ábrázolt nyíl jelzi. Hasonlóan az alulról korlátozó kapcsolatokhoz, az összevetett határidőpont-párt és a korlát-értéket a nyílra (mellé) írt, de itt egy szimbolikus negatív előjelet követő, három részből álló alfa-numerikus kód azonosítja:



itt: „Finish-Start négy”
(felülről korlátozó, „maximális”
kapcsolat)

- Első karakter: a „megelőző” tevékenység határidőpontja („S”, vagy „F”);
- Második karakter: a „követő” tevékenység határidőpontja („S”, vagy „F”);
- Szám-karakterek (akár előjellel is): a „követő” tevékenység nevesített határidőpontjához rendelt időpotenciál (π_j) és a „megelőző” tevékenység nevesített határidőpontjához rendelt időpotenciál (π_i) különbségére előírt felső korlátérték (τ_{ij}). ($\pi_j - \pi_i \leq \tau_{ij}$)

A „negatív előjel” és a fordított irányú nyíl a figyelem-felhíváson túl a mögöttes matematikai összefüggésre utal. Nevezetesen: Bármely felülről korlátozó feltétel egyenértékűen helyettesíthető egy „fordított irányú”, korlát-értékét tekintve ellentétes előjelű „alulról” korlátozó feltétellel:

$$\pi_j - \pi_i \leq \tau_{ij} \quad / \cdot (-1) \quad \rightarrow \quad \pi_i - \pi_j \geq -\tau_{ij}$$

A fordított nyílnak ezen túl a gráf-technikai analógiában (leghosszabb út feladat) szereplő nyílfolytonos él-láncolat(ok) miatt van még jelentősége (lásd a kritikussági/dominancia típusoknál.)

Összetett kapcsolatok

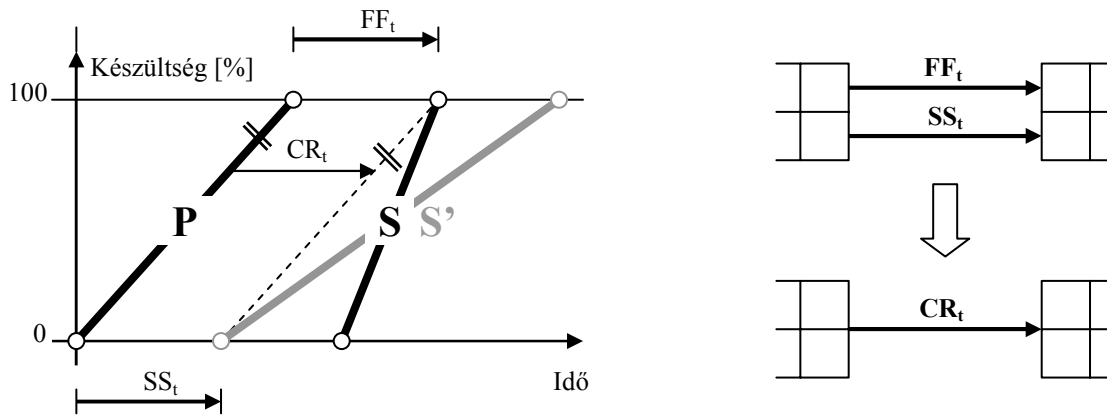
Az egyszerű kapcsolati alap-típusok kombinálásával a termelés-irányítási problémák széles köréhez már valóban állékony logikai időmodell építhető fel. Az alábbiakban az építőipari gyakorlatban relatíve gyakran előforduló és egyes alkalmazásoknál „önálló” hálótechnikai kapcsolat-típusként felkínált „összetett kapcsolatok”-ból mutatunk be néhányat:

Technológiai szünet előírása: a „CR” kapcsolat:

Viszonylag kevés, de az építőiparra igen jellemző olyan technológiai folyamat, illetve köztes állapot fordul elő, amikor egy-egy munkadarab-, illetve munkaterület minden részletén, avagy egészén két munkafázis között bizonyos várakozási/pihentetési időt, „technológiai szünetet” kell biztosítani.

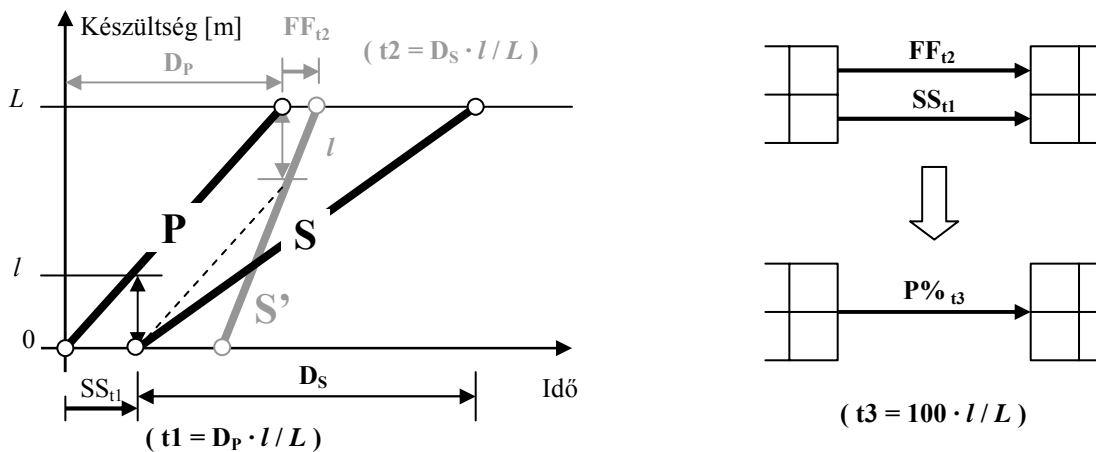
A **FFt** és **SSt** kapcsolatok azonos korlát-értékű, együttes alkalmazásával a „megelőző” és a „követő” tevékenység időtartamától függetlenül iktathatunk be a két tevékenység közé kötelezően figyelembe veendő technológiai időt. Leginkább a magyar szakirodalomban fordul elő az ilyen jellegű korlátozás azonosítására a „**CRt**” (critical=kritikus), mint „kritikus megközelítés” (avagy „eltávolodás”) jelölés – két egyszerű kapcsolat feltüntetése helyett ($CRt_1 = FFt_2 + SSt_3 \mid t_1 = t_2 = t_3$).

A CR kapcsolatot inkább csak alsó korlátként célszerű használni. Bár a kapcsolat akár felső korlátozásként is megjelenhet (például „a kötőanyag megszilárdulása előtt kell valamit elvégezni”), a „technológiai fordulás”, illetve „ellehetetlenülés” veszélye miatt annak alkalmazása csak igen jól szinkronizált tevékenységek esetében, nagy körültekintés mellett ajánlható.



Térköz („előny”) biztosítása: a P% kapcsolat

A megvalósításra váró projekt konkrétabb ismerete esetén, de még a tervezés, előkészítés fázisában merülhet fel az igény két tevékenység egymáshoz viszonyított előrehaladásának valamilyen cél-, avagy szükségszerűen megválasztott korlátozására. Ilyen lehet, például vonalas létesítmény esetén a „minimális térköz” (manipulációs, illetve manőverezési terület) biztosítása (alulról korlátozás), avagy a munkaterület (pl. felbontott útszakasz hosszának, vagy a helyszínen tárolható anyag mennyiségének) korlátozása (felülről korlátozás). A korlátozás idő vetületben, a **FF_t** és **SS_t** kapcsolatok egyidejű, de nem feltétlenül azonos korlát-értékű alkalmazásával biztosítható. A korlát-értékek a korlátozásnak megfelelő mennyiség (kiterjedés, hossz, darab, készültségi fok, stb.) és a teljes mennyiség arányával – vagy %-ban kifejezve – rögzíthetők. Az ilyen jellegű előírásra inkább csak a magyar szakirodalomban találunk utalást „általános kettős kapcsolat” néven, de konvencionális jelölés nélkül. Mi itt erre javasoljuk a **P%** (progresszió, készültség) jelölést.



(Az, hogy az ilyen típusú korlátozások a nemzetközi hálós szakirodalomban nem igen nyernek említést, leginkább annak köszönhető, hogy a hálós modell időelemzése előtt az ilyen kapcsolatok a konkrét tevékenységidők ismeretében először idő-vetületre átszámítandók. Így az állékony-ság követelményének kevésbé felelnek meg, vagy még szigorúbban fogalmazva, a tisztán „idő” modellektől idegenek. Itt is inkább csak mint „modellbeli lehetőségek” kerülnek megemlítésre.)

Hasonlóan a CR kapcsolathoz, de a jellemző igényeknek részben ellentmondóan, a P% kapcsolatot is inkább csak alsó korlátként javasolt használni. Bár a korlátozás igénye felülről is megjelenhet (például „maximálisan tárolható anyagmennyiség”), a „technológiai fordulás”, illetve „ellehetetlenülés” veszélye miatt annak alkalmazása csak nagy körültekintés mellett ajánlható.

Alulról és felülről egyaránt korlátozott követési idő

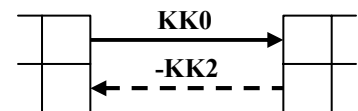
Bár a hétköznapi szemlélethez jobban illik az alsó korlátozás („mikor kerülhet sor leghamarabb a következő munkafázisra”) és egyébként is a „mindent a lehető leghamarabb” megközelítés, nem ritka az olyan eset az építésben, amikor a modellezés során két egymással logikai összefüggésbe (is) hozott tevékenység relatív időhelyzetét alulról és felülről egyaránt „tájékoztatni” szükséges.

Mint ahogy a tevékenységidő becsléseknél (PERT, CPM^{cost}) az már bemutatásra került, a folyamatok kapcsolásánál is viszonylag jól bemérhetők a tevékenységek relatív időhelyzeteinek célszerű, avagy szükségszerű korlátai. Míg a tevékenységidők esetében technikailag lehetséges minimumról és gazdaságilag – vagy egyéb szempontok alapján – elfogadható maximumról szoltunk, a kapcsolatok időparamétereinek meghatározásánál többnyire az általános értelemben vett „technológiai megfontolásokra” (anyagjellemzők, térbeliség, munkaszervezés) támaszkodhatunk.

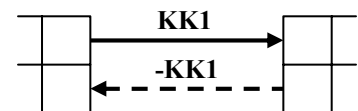
Például tükörbe kerülő előregyártott-, és/vagy vasbeton szerkezetek alatti szerelőbeton készítésével minden szelvényben célszerű megvárni a finom földmunka („tükörkészítés”) elkészültét (szükséges beton-anyag mennyiség csökkentése végett). Ugyanakkor, ha túl hosszú időre magára hagyjuk a tükröt, az tönkremehet, és mint „tükör” megszűnhet létezni (állagvédelmi problémák). Vagy: Árok kiemelésnél, a földkiemelést végző gép mögött egy célszerű biztonsági távolságot hagyva tudom csak megkezdeni az árokkal dúcolását, viszont ha túl sokat késlekedek vele, nem lesz mit dúcolnom. (Az árok a talaj fokozott kiszáradását követően a kezdeti „látszat-kohézió” megszűnte miatt-, avagy túl hosszán kinyitott volta miatt a környező földtömeg megtámasztó hatását elveszítve beomolhat.) Számtalan aszfalt-, beton-, műgyanta-, és egyéb alapanyagú szerkezet említésével lehetne folytatni a példák sorát. Megoldás: az alulról és a felülről korlátozó kapcsolatok együttes alkalmazása.

Az alulról és felülről egyaránt tájékoztatott folyamat-kapcsolási helyzeteket – attól függően, hogy az mennyire „szigorúan” határolja be a szóba jöhető megoldások körét, de attól függetlenül, hogy azt milyen kapcsolat-párral adjuk meg – három alapesetet szoktunk megkülönböztetni:

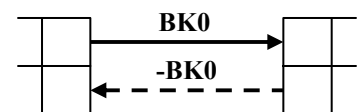
- „Korlátozott” követés: A megnevezés alapvetően több szóba jöhető megoldásra, de azok korlátozott „számosságára” utal, hiszen egyébiránt minden kapcsolat valamilyen korlátozást képvisel. Példaként a fent említettek bármelyike említhető. (Nem csak azonos típusú kapcsolatokkal lehet kialakítani!)



- „Kényszer”- követés: Egyetlen, rögzített értékű megoldás jöhet szóba. Jellemzően az idő-modell előrehaladottabb állapotában, többnyire erőforrás-menedzsment vonatkozású döntések képviselőjében fordulhat elő. A folyamatok egymásra következéséről határozott (sőt, esetleg szerződésben rögzített) elképzelésünk van (pl. „szinkronizált” folyamatok).

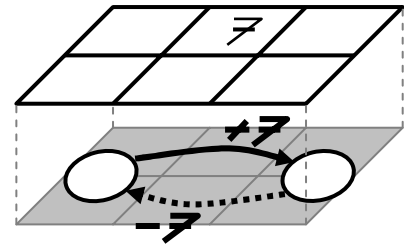


- „Azonnali” követés: Egyetlen megoldás jöhet szóba, ami ráadásul „zárt, soros folyamat-kapcsolást” eredményez. Eredendően erőforrás-menedzsment vonatkozású döntést (pl. „folyamatos munkavégzés”) képvisel. A minimális feltétel megakadályozza az időbeli átlapolást (tehát ugyanaz a munkabrigád elvégezheti mindkét kapcsolt folyamatot), és azt ráadásul késlekedés nélkül tegye! Tipikus viszonylag nagy értékű erőforrások, vezérgépek, illetve alvállalkozók munkájának időzítése esetén.



Megjegyzés:

Ha alaposabban szemügyre vesszük a meg nem szakítható, rögzített idejű tevékenység és a kényszer követés matematikai meghatározását, illetve az érintett időpotenciálok összefüggéseit, hamar szembeötlő a hasonlóság, miszerint mindkét esetben két-két összerendelt időpotenciál közötti különbség adott értéken történő rögzítéséről ($\tau_{ij} \leq \pi_j - \pi_i \leq \tau_{ij}$) van szó (ábránkon $\tau_{ij}=7$). Matematikailag a kettő között nincs különbség, pusztán a hozzárendelt „műszaki tartalomban”. ...

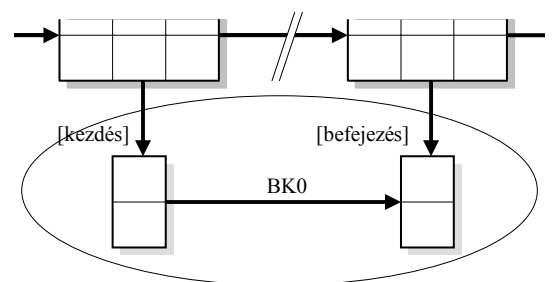


Ugyancsak itt utalunk vissza a fejezet elején említett „átjárhatóságra” a tevékenységek és események között. Az az „elegancia”, ami a rögzített idejű tevékenység egyetlen „csomópontban” történő ábrázolásával megjelenik, elfedi a tevékenységnek, mint „összerendelt csomópont-párnak” (kezdés-befejezés) az „él(pár)” jellegét. Ez – mint ahogy a későbbiekben megmutatjuk – számos félreértésnek és félre-értelmezésnek a lehetőségét rejti magában, miközben a gráf-technikai analógiával, illetve a hálózat definíciójával (egyetlen forrás, egyetlen nyelő, hurokmentes, nem negatív súlyszámok) is (látszólag) ellentmondásba kerül. Az „ellentmondás” a hálós idő-modellek, mint „hálózati problémák” lehatárolásának felülvizsgálatát is szükségessé teszi. ...

Befüggesztett tevékenységek

A tevékenységek és események átjárhatóságának célzott, tudatos kihasználásával lehet viszont kezelni az idő-modellben olyan technikai, technológiai helyzeteket, amikor egy-egy tevékenység szükségességéhez nem fér kétség, de időtartamát pusztán a tevékenységnek a vizsgálata alapján behatárolni nem tudjuk. Az egyértelműen beazonosítható, hogy mikortól kezdődően szükséges „elkezdeni”, az is, hogy mikor lehet „befejezni”, miközben a két „esemény” közötti időtartamot más, szintén a modell részét képező tevékenységek határozzák meg. Tipikus példát szolgáltatnak erre az úgynevezett „helyszínen tartási” feladatok (daruzás, állványozás, víztelenítés, őrzés-védelem, stb.).

Ilyenkor indokolt lehet az adott tevékenység kezdésének és befejezésének önálló eseményként történő kezelése, miközben a „tevékenységidőt” mintegy „befüggesztve” (angol terminológiában „hammock”=„függőágy”), vagyis mások által függővé téve kezeljük. (A tevékenység kezdetét és befejezését jelölő „csomópontokat” szokás az összetartozást jelölő BK0 kapcsolattal „összekötni”.)

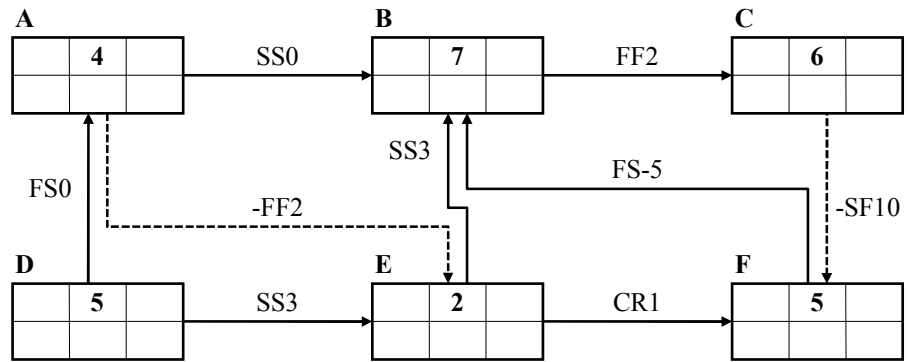


Előfordulási mátrix

Nagy számú, ismétlődő munkafolyamatok esetén a grafikus reprezentáció egyfajta tehermentesítésére szolgálhat a háló-diagrambeli tevékenységek (pajzsok) „címkézett” sorokba (tevékenység, pl: „Falazás”) és oszlopokba (munka-pozíció, pl: „B” lépcsőház”) – ú. n. „előfordulási mátrixba” – rendezése. Ezáltal a tevékenység-azonosítót nem szükséges a tevékenység-pajzsba beépíteni, azt a pajzs (sor/oszlop) „pozíciója” („Falazás a ’B’ lépcsőházban”) azonosítja. E mellett az ilyen elrendezés szemléletességével is elősegíti a munkabrigádok munkájának követését (sor irányú, erőforrás-menedzsment indíttatású kapcsolatok), illetve az egyes munkaterületek folyamatos fejlődését (oszlop-irányú, technológiai indíttatású kapcsolatok). (Lásd később a hídépítési minta-feladatnál.)

Számítások a hálón

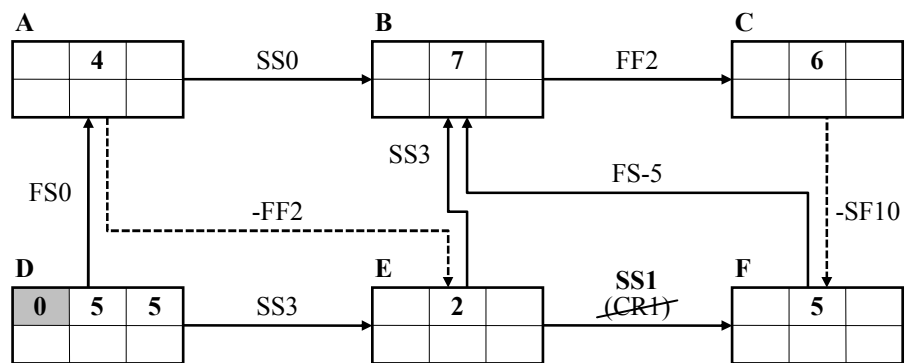
A háló időelemzésének „felgöngyöltés”, vagy „intuitív” menetét a mellékelt számpéldán mutatjuk meg. A számítások magyarázata során a tevékenységekre alsó indexként felüntetett nagybetűkkel hivatkozunk.



Adott példánk megoldását 16 lépésben mutatjuk meg. A kézi számításokat elősegítő átalakítások elvégzése után először „odafelé”/„nyíl irányban” haladva göngyöltjük fel a hálót, meghatározva a legkorábbi határidőket (minimális időpotenciálokat), majd „visszafelé”/„nyíl ellenében” haladva meghatározzuk a legkésőbbi határidőket (maximális időpotenciálokat). Végül beazonosítjuk a kritikus utat és visszaállítjuk az előkészítés során eszközölt esetleges módosításokat. Az időelemzés lezárásaként a kritikus tevékenységeket vesszük görcső alá.

1. lépés:

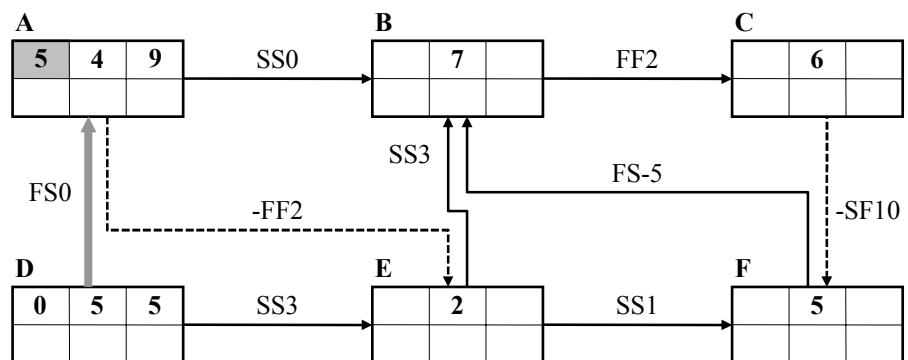
Az esetleges előkészítő „számítások” elvégzése. Esetünkben ez az E és F tevékenységek közötti CR kapcsolat domináns tag kapcsolatának beazonosítását, jelenti (SS). Ezt követi a „forrás”, azaz a kezdőpont beazonosítása és ahhoz a kezdő „0” időpotenciál rendelése.



Példánknál ez a D tevékenység kezdése ($ES_D=0$). Rögzített tevékenységidőknél, ha ismerem egy tevékenység kezdési időpontját, ismerem befejezési időpontját is ($EF_D=ES_D+D_D=0+5=5$).

2. lépés:

Olyan követő tevékenység felderítése, mely minden megelőző tevékenységénél már ismerjük a legkorábbi időpontokat. Ha több ilyen tevékenység is kínálkozik, közülük tetszőlegesen választhatunk a továbbmenettel sorrendjét illetően.



Esetünkben erre az A tevékenység kínálkozik, melynek kezdése kap „tájékoztatást”. Ismerve a tevékenység kezdését ($ES_A \geq EF_D+0=5$), ismerjük befejezését is ($EF_A=ES_A+D_A=5+4=9$).

Megjegyzés: Ha az esetleges maximális kapcsolatok miatt úgy tűnik, hogy a hálón nyíl-folytonos hurok van, először figyelmen kívül hagyjuk a maximális kapcsolato(ka)t, és csak a minimális kapcsolatok alapján teszünk „első becslést” a legkorábbi időpontokra. Majd, ha valamennyi a „hurok” által érintett tevékenységre nézve van „első becslésünk”, akkor térünk vissza a maximális kapcsolat vizsgálatára és az esetlegesen szükséges módosítások át-, illetve végig vezetésére.

3. lépés:

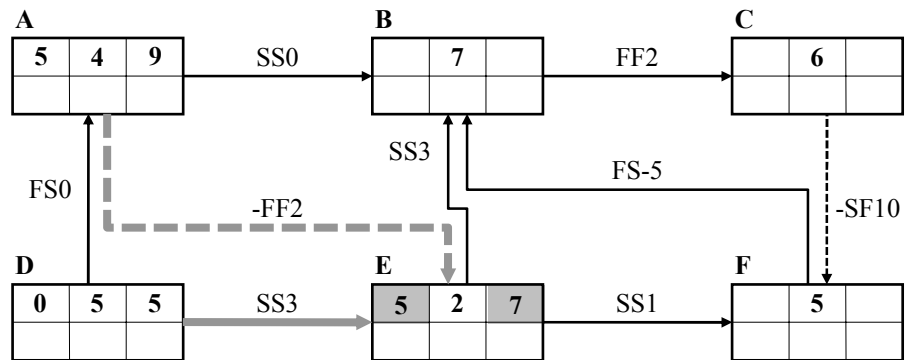
A felgöngyölítés továbbvitelére az E tevékenység kínálkozik, melynek kezdése (D-ből „SS3”) és befejezése is (A-ból „-FF2”) kap „tájékoztatást”:

$$ES_E \geq ES_D + 3 = 0 + 3 = 3,$$

$$(EF_E \geq ES_E + D_E = 3 + 2 = 5)$$

$$\text{és } EF_E \geq EF_A - 2 = 9 - 2 = 7,$$

($ES_E \geq EF_E - D_E = 7 - 2 = 5$). A mértékadó (nagyobb értéket eredményező) kapcsolat „E” tevékenység legkorábbi határidői számára az A tevékenységből érkező „-FF2” (maximális) kapcsolat. Ez alapján rögzítjük az E tevékenység lehetséges legkorábbi befejezését ($EF_E = \max\{5, 7\} = 7$) és legkorábbi kezdését ($ES_E = \max\{3, 5\} = 5 \dots = EF_E - D_E = 7 - 2$).

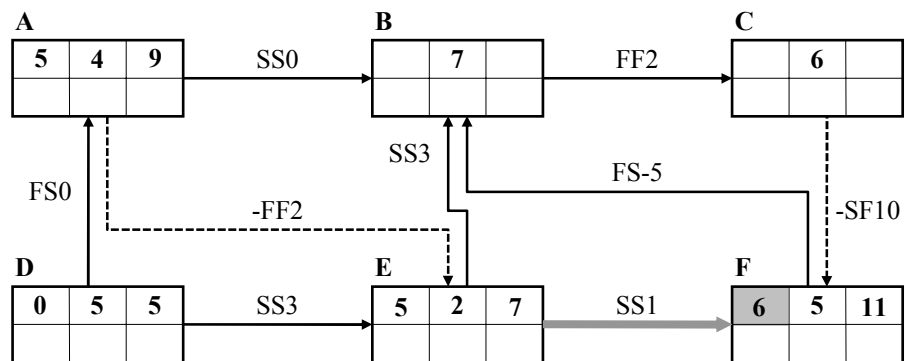


4. lépés:

Az előzőekben ismertett gondolatmenetet használva a következő felgöngyölíthető tevékenység az F tevékenység, melynek kezdése kap (E-ből „SS1”) tájékoztatást:

$$ES_F \geq ES_E + 1 = 5 + 1 = 6.$$

A tevékenységidőt ehhez hozzáadva: $EF_F = ES_F + D_F = 6 + 5 = 11$.



5. lépés:

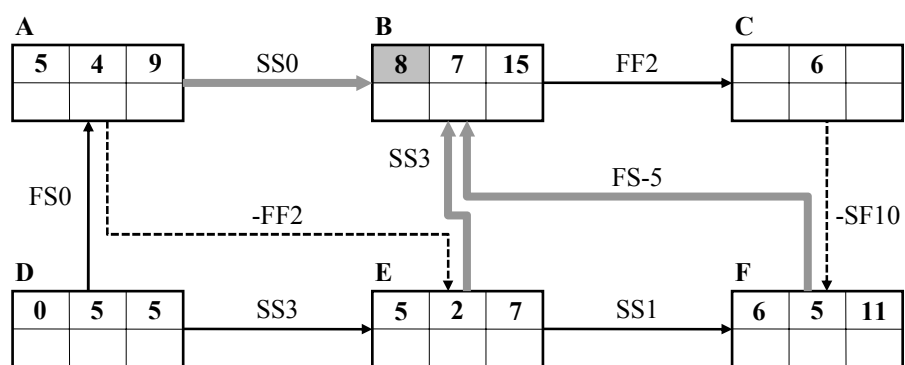
A B tevékenység legkorábbi kezdésének meghatározásához három irányból is kapunk tájékoztatást:

$$ES_B \geq ES_A + 0 = 5 + 0 = 5,$$

$$ES_B \geq ES_E + 3 = 5 + 3 = 8 \text{ és}$$

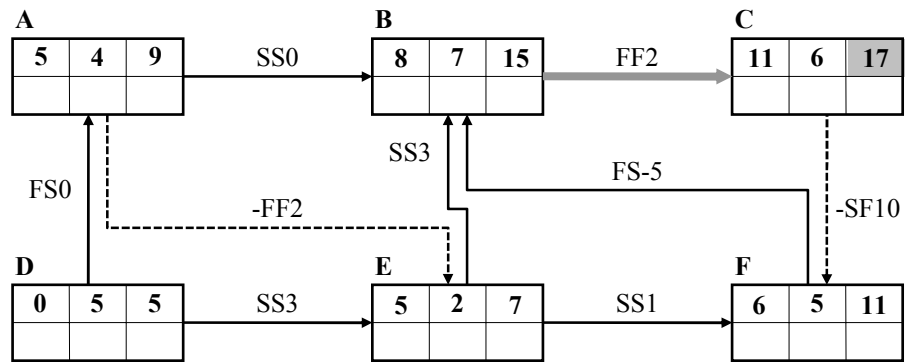
$$ES_B \geq EF_F + (-5) = 11 - 5 = 6$$

Ezek közül az E tevékenység felől érkező „SS3” kapcsolat a mértékadó ($ES_B = \max\{5, 8, 6\} = 8$, amiből: $EF_B = ES_B + D_B = 8 + 7 = 15$).



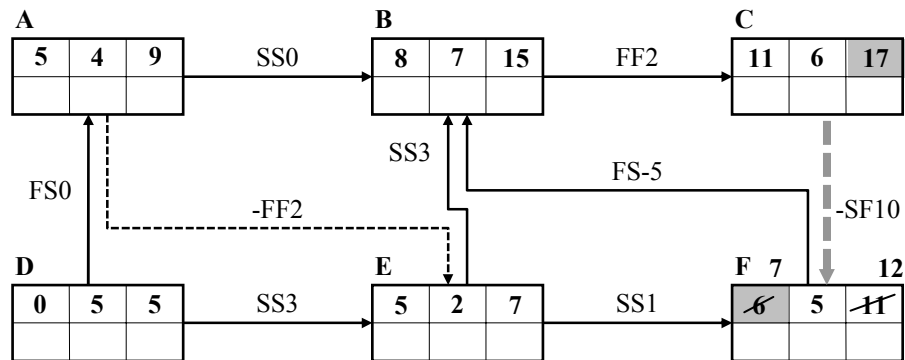
6. lépés:

Az utolsó, még fel nem göngyölt tevékenység a C tevékenység, melynek befejezése két irányból (B-ből „FF2” és F-ből „-SF12”) is tájékoztatott. Az F-ből érkező maximális kapcsolat viszont több kapcsolattal együtt látszólag hurkot képez, ezért első közelítésben figyelmen kívül hagyjuk ($EF_C \geq EF_B + 2 = 15 + 2 = 17$, $ES_C = EF_C - D_C = 17 - 6 = 11$).



7. lépés:

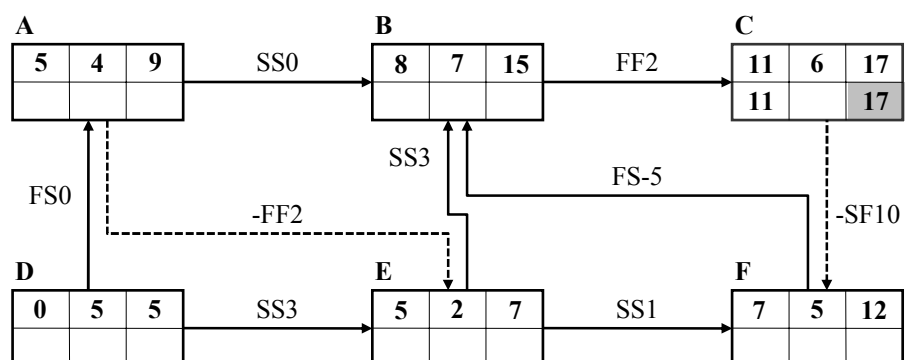
Most olyan számításközi állapothoz értünk, amikor egy eddig „figyelmen kívül hagyott” maximális kapcsolat (C és F közötti „-SF10”) által érintett valamilyeni tevékenység (itt legkorábbi) határidőpontjaira már van „első közelítésünk”, de még adósok vagyunk annak ellenőrzésével: $EF_C - ES_F = 17 - 6 = 11 > 10$, módosítani szükséges. Tekintve, hogy az eddig meghatározott „első becslések” az eddig figyelembe vett korlátozások alapján számított „legkisebb időpotenciál” értékek, az ellentmondás feloldása csak a megfelelő határidő értékek növelésével lehetséges ($ES_F = EF_C - 10 = 17 - 10 = 7$, illetve $EF_F = ES_F + D_F = 7 + 5 = 12$). Feladatunk még itt sem ért véget. Mivel a módosítással visszanyúltunk már számított értékekhez, a változás esetlegesen továbbgyűrűző hatásainak ellenőrzése szükséges. Esetünkben ez az „F” és „B” tevékenységek közötti („FS-5”) kapcsolat ellenőrzését jelent. Most viszonylag „szerencsénk van”, mert az eszközölt változtatásnak nincsen tovább gyűrűző hatása, hiszen $ES_B - EF_F = 8 - 12 = -4 > -5$. A „nyíl irányú”, „odafelé” számítás, azaz a lehetséges legkorábbi időpontok meghatározása esetünkben itt véget is ért. (Itt érdemes megjegyezni, hogy ha egy minimális kapcsolatokkal már bíró hálós időmodellbe további, de felülről korlátozó, „maximális” kapcsolatot építünk be, az soha nem jár az addig meghatározott legkisebb időpotenciálok csökkenésével, sőt inkább azok növekedése várható.)



8. lépés:

A legkésőbbi időpontok („maximális időpotenciálok”) meghatározásának, azaz a „nyíl ellenében”, „visszafelé” számításnak az indításhoz a nyelő, mint „cél”-pont (esetünkben a C tevékenység befejezése) legkésőbbi időpontjának rögzítése

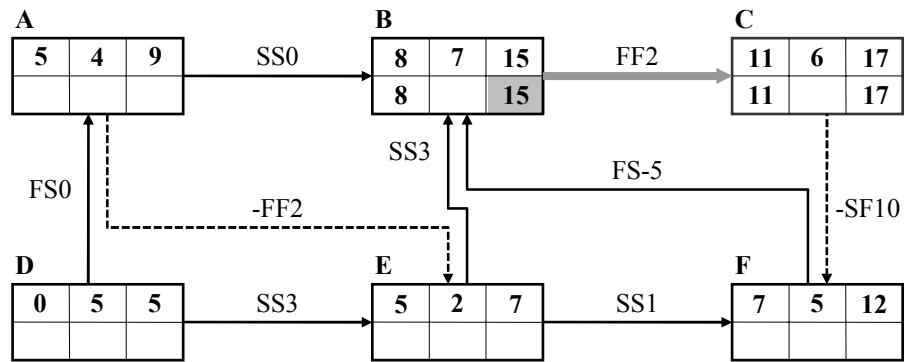
lehetséges legkisebb értékén ($LF_C = EF_C = 17$). Ismervén a tevékenység befejezését, a rögzített tevékenységidőből adódóan ismerjük a tevékenység kezdését is ($LS_C = LF_C - D_C = 17 - 6 = 11$).



9. lépés:

Nyíl ellenében haladva is hasonló logikát alkalmazva, mint az oda felé számításakor, olyan tevékenységeknél folytatjuk a legkésőbbi időpontok felgöngyölítését, mely valamennyi követő tevékenységének legkésőbbi határidőire van már „első

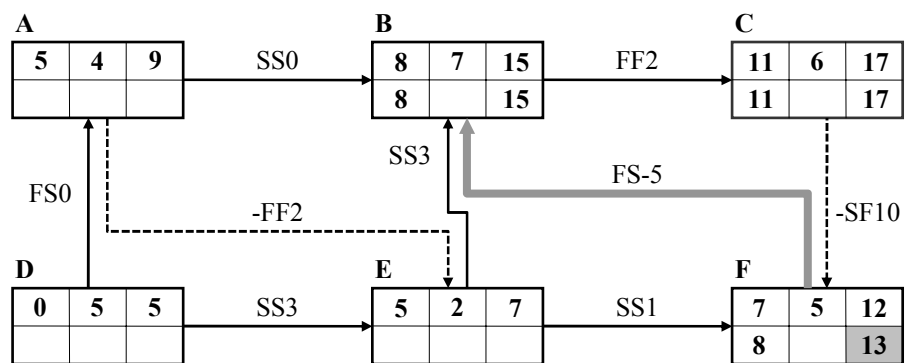
becslésünk”. Esetünkben erre a B tevékenység kínálkozik, melynek befejezése kap a C tevékenység felől („FF2”) tájékoztatást ($LF_B \leq LF_C - 2 = 17 - 2 = 15$, ennek ismeretében $LS_B = LF_B - D_B = 15 - 7 = 8$).



10. lépés:

A felgöngyölítés folytatására az F tevékenység kínálkozik, melynek kezdése (C-ből „-SF12”) és befejezése (B-ből „FS-5”) is kap tájékoztatást. Mivel a C tevékenységtől érkező maximális kapcsolat több kapcsolattal együtt hurkot alkot,

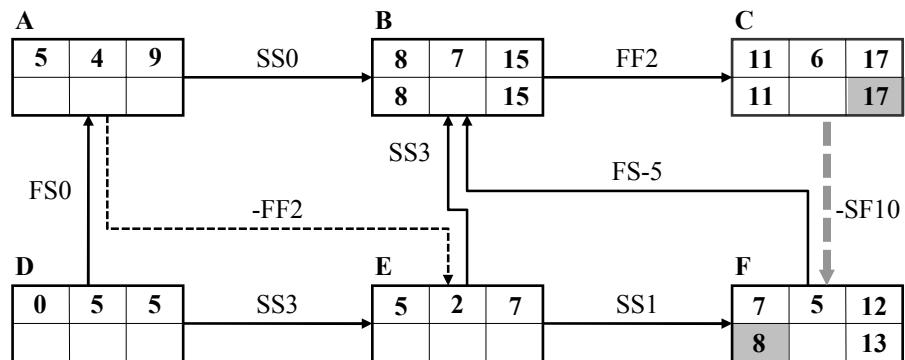
első közelítésben figyelmen kívül hagyjuk ($LF_F \leq LS_B - (-5) = 8 + 5 = 13$ és $LS_F = LF_F - D_F = 13 - 5 = 8$).



11. lépés:

Olyan számítás-közi fázishoz értünk, amikor egy eddig figyelmen kívül hagyott, hurkot alkotó maximális kapcsolat által érintett valamennyi tevékenység (itt legkésőbbi) határidő pontjaira van „első becslésünk”.

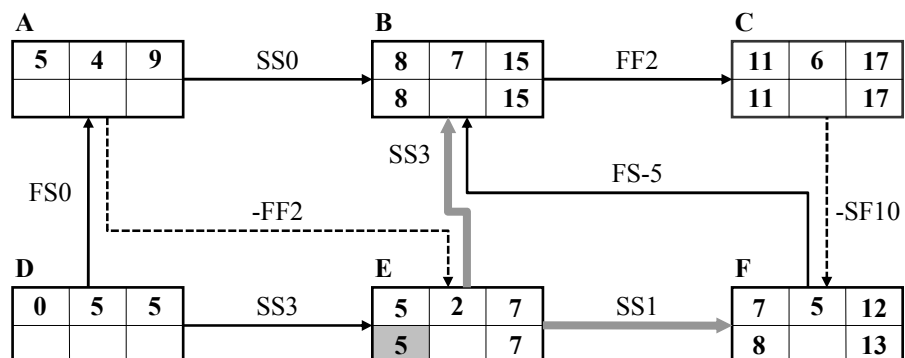
Itt az ideje a (C és F közötti „-SF10”) kapcsolat ellenőrzésének (és az esetlegesen szükségessé váló módosítások végigvezetésének): $LF_C - LS_F = 17 - 8 = 9 < 10$, rendben, nincs szükség módosításra.



12. lépés:

Következő felgöngyölíthetőnek az E tevékenység kínálkozik, melynek kezdése két irányból (B-ből „SS3”, F-ből „SS1”) is tájékoztatást kap:

$LS_F \leq LS_B - 3 = 8 - 3 = 5$, és



$LS_E \leq LS_F - 1 = 8 - 1 = 7$.

A kettő közül a mértékadó a B tevékenység felől érkező „SS3” kapcsolat ($LS_B = \min\{5, 7\} = 5$, valamint $LF_B = LS_B + D_B = 5 + 2 = 7$).

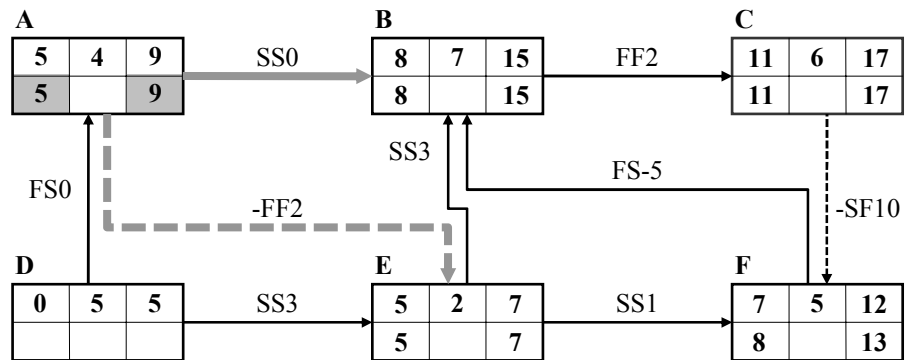
13. lépés:

Folytatásra az „A” tevékenység kínálkozik, melynek kezdése (B-ből „SS0”), és befejezése (E-ből „-FF2”) is kap tájékoztatást:

$LS_A \leq LS_B - 0 = 8 - 0 = 8$,
 $LF_A = LS_A + D_A = 8 + 4 = 12$ illetve:

$LF_A \leq LF_E + 2 = 7 + 2 = 9$,

azaz $LS_A = LF_A - D_A = 9 - 4 = 5$. Mindkét korlátozó feltétel kielégítéséhez az E tevékenység felől érkező „-FF2” kapcsolat lesz a mértékadó ($LS_A = \min\{8, 5\} = 5$, $LF_A = \min\{12, 9\} = 9$).

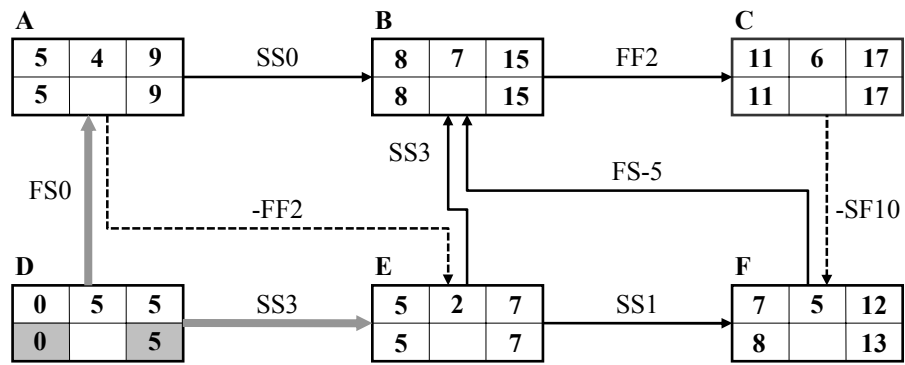


14. lépés:

Már „csak” a D tevékenység legkésőbbi határidőinek a meghatározása van hátra, melynek kezdésére (E-ből „SS3”) és befejezésére (A-ból „FS0”) is kapunk tájékoztatást:

$LS_D \leq LS_E - 3 = 5 - 3 = 2$,
 $LF_D = LS_D + D_D = 2 + 5 = 7$,

Illetve $LF_D \leq LS_A - 0 = 5 - 0 = 5$, azaz $LS_D = LF_D - D_D = 5 - 5 = 0$. Mértékadó az A tevékenységből érkező „FS0” kapcsolat ($LS_A = \min\{2, 0\} = 0$ és $LF_A = \min\{7, 5\} = 5$). Ezzel a legkésőbbi határidők (maximális potenciálok) is meghatározásra kerültek.



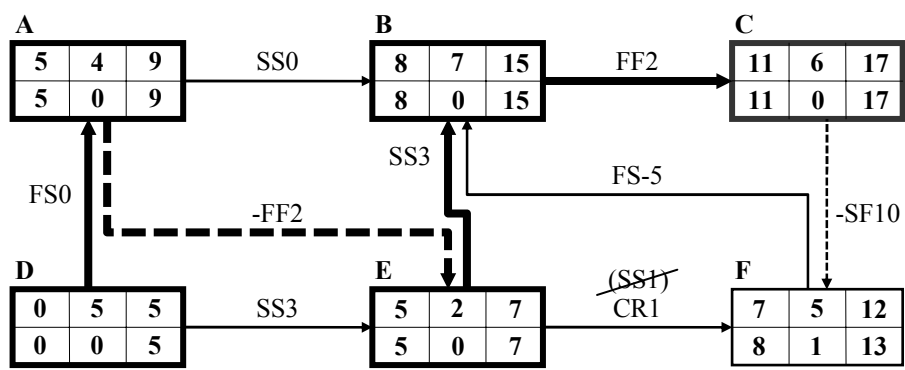
15. lépés:

A legkorábbi és a legkésőbbi határidők ismeretében meghatározhatók a tevékenységek (itt: „teljes-”) tartalékidői:

$(TF = LS - ES = LF - EF)$.

A TF=0 teljes tartalékidejű tevékenységek – mint „kritikus tevékenységek” – részei a

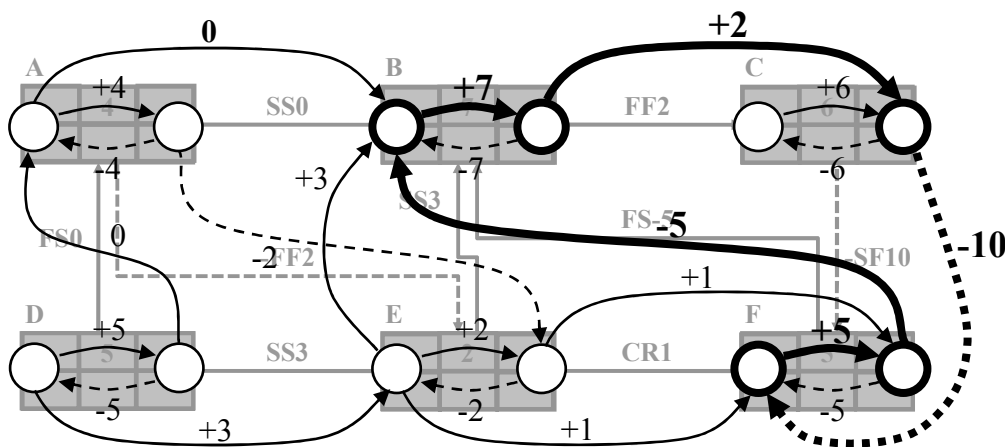
kritikus útnak, ahogy a kritikus út részét képezik a kritikus tevékenységek közötti, korlát-értékükre (egyenlőségre) teljesülő kapcsolatok (korlátozások) is ($ES_A - EF_D = 0$; $EF_E - EF_A = -2$; $ES_B - ES_E = 3$; $EF_C - EF_B = 2$). Végezetül az eredeti feladat visszaállítása végett visszaállítjuk a számítások előkészítése során az E és F tevékenységek közötti SS1-re „átjelölt” CR1 kapcsolatot.



Megjegyzések a feladat megoldásához:

- A leghosszabb út keresésének logikája szerint (is) a legkorábbi időpontok meghatározása során az alsó korlát-értékek közül mindig a legnagyobb (a számítás, avagy „mérés” kezdőpontjától legtávolabb eső) a mértékadó, hiszen annak teljesülésével a többi korlátozás is teljesül. Következmény: Nyíl irányú számításkor a már esetleg meghatározott („első becslt”) értéket – az újabb és újabb kapcsolatok hozzáadásával és figyelembe vételével – mindig csak növelhetjük (Lásd F és C tevékenységek közötti maximális kapcsolat).
- A számítások logikája a legkésőbbi időpontok meghatározása során ugyanez. Csak a számegyenesen visszafelé-, a gráfon pedig nyilakkal „szemben” haladva. Az újabb és újabb kapcsolatok hozzáadásával, illetve figyelembe vételével mindig csak csökkenthetjük az „első becslt” értékeket.
- A határidők (időpotenciálok) meghatározása során, ha – eredendően a maximális kapcsolatok miatt – hurok található a gráfon, az „első becslt” értékeket a maximális kapcsolatok figyelmen kívül hagyásával célszerű meghatározni, majd ha minden, az adott maximális kapcsolat által érintett tevékenységnél van már „első becslt” érték, akkor érdemes visszatérni a maximális kapcsolat ellenőrzésére, illetve számításba vételére. Viszont az esetlegesen szükségessé váló módosítás tovagyrúzó hatásait végig kell vezetni, illetve ellenőrizni szükséges.
- A közhiedelemmel ellentétben maximális kapcsolat hozzáadásával a háló átfutási ideje nem csökkenthető, sőt annak következtében – ha az valamilyen összefüggésben mértékadó kapcsolattá válik – a minimális időpotenciáloknál (legkorábbi időpontok, „odafelé” számítás) növekedés, a maximális időpotenciáloknál (legkésőbbi időpontok, „visszafelé” számítás) pedig csökkenés várható.
- Az, hogy egy-egy beépített, és egyéb kapcsolatokkal hurkot alkotó maximális kapcsolat következtében egyáltalán megoldható-e az időelemzési („ütemezési”) feladat (van-e annak megoldása), annak függvénye, hogy az érintett kapcsolatok által alkotott hurok hossza (a hurokban részt vevő élek súlyszámainak összege) milyen értéket mutat. Ha pozitív, nem megoldható a feladat. Példánkban ez a kérdés a „B”, „C” és „F” tevékenységeket „tájékoztató” kapcsolatok viszonyában merült fel, amit az alábbi ábrán a tevékenységek él(pár) jellegét elfedő tevékenység-pajzsok „leemelésével” szemléltetünk.

Példánkban a „B-C-F” hurok hossza: $+7+2+(-10)+5+(-5) = -1 < 0$, rendben.



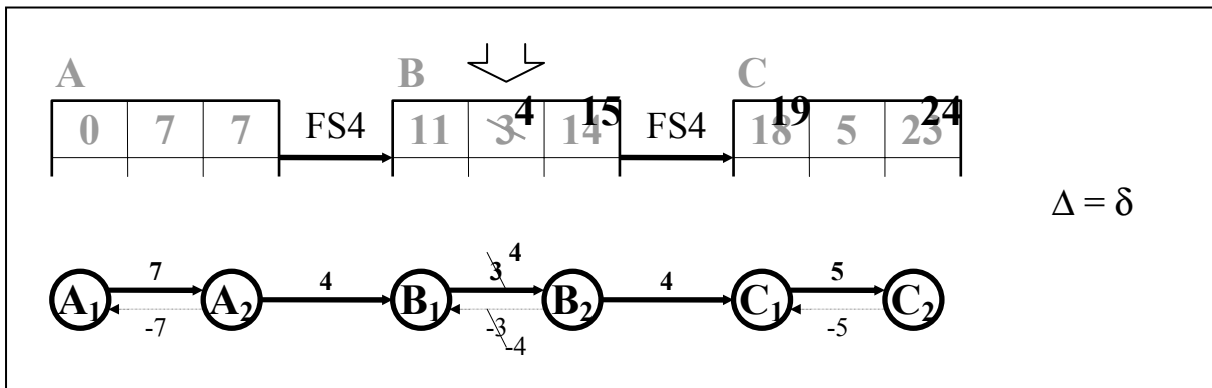
E fenti „röntgen-képre” a későbbiekben még többször visszautalunk, hiszen számos „hálózati” kérdést vet fel. Például: Hol van a „forrás”? Hol a „nyelő”? (És hány darab van?) Nyíl-folytonos hurkok vannak! Negatív súlyszámok vannak! ...

Példánk fenti „röntgen-képe” sejtetni engedi, hogy időelemzett hálós modellünk további vizsgálata még újabb információkkal szolgálhat nekünk. Kérdés: Mitől „kritikus” – és hol is található – a mértékadó, avagy „kritikus” („leghosszabb”) út? Az esetleges beavatkozásoknak milyen tovagyrúzó hatásai lehetnek? Minden kritikus tevékenység „egyformán” kritikus? A kérdések megválaszolása előtt vegyük szemügyre az alábbi példa-sort!

Kritikussági (dominancia) típusok

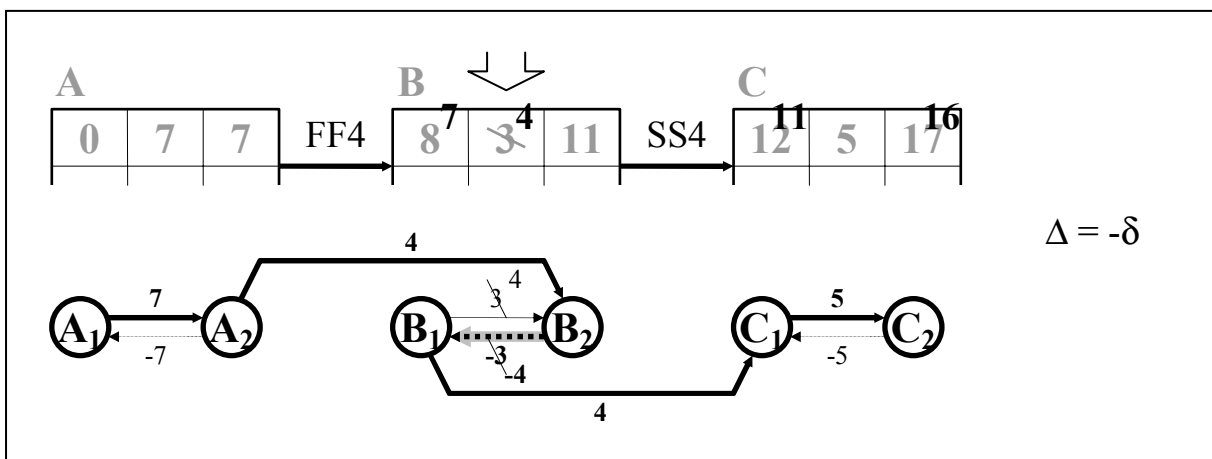
Az alábbiakban három tevékenységből álló „mini” hálós idő-modelleket mutatunk be. Minden esetben a „forrásból” a „nyelőbe” egyetlen „nyíl-folytonos él-láncolat”, azaz egyetlen út vezet. Az egyetlen út pedig egyben a leghosszabb (azaz „kritikus”) út is. Vagyis: minden esetben – minden számítás nélkül – előre megállapítható, hogy valamennyi tevékenység kritikus, így a középső, „B” tevékenység is. A bemutatott MPM/PDM háló-rajzokon a tevékenység-pajzsok alsó részét nem tüntettük fel, hiszen „új” információt a felső sorhoz képest már nem tartalmaznak. A „csonka” MPM/PDM rajzok alatt viszont feltüntetjük az idő-modell „hagyományos”, súlyozott „DiGráf” átiratát. Minden esetben azt vizsgáljuk, hogy a kritikus „B” tevékenység időtartamának egységnyi ($\delta=+1$) növelése milyen következménnyel jár a háló teljes átfutási idejére ($\Delta=?$). Az ábrákon halványítva tüntetjük fel az időelemzés módosítás előtti eredményeit, és teljes színnel a módosítás utániakat.

1.)



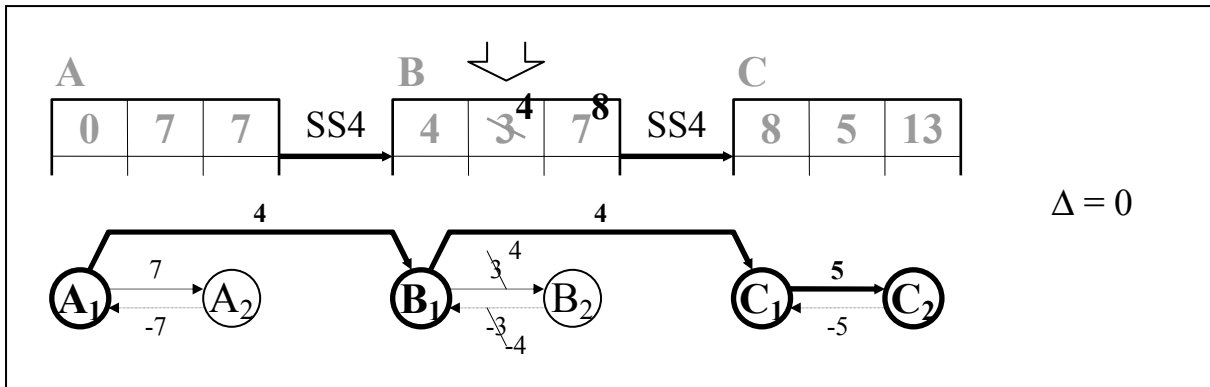
Az időelemzés alapján kialakult idő-potenciál (határ-időpont) rendszerben az adott („B”) kritikus tevékenység időtartamának alsó korlátja a mértékadó (pozitív él-paraméterű éle része a leghosszabb útnak). A módosítás azonos értékkel megjelent a háló teljes átfutási idejében ($\Delta=\delta$). Az azonos irányú változás („pozitív visszacsatolás”) miatt az ilyen idő-összefüggésű kritikus tevékenységet „**pozitív kritikus**” tevékenységnek nevezzük. Felismerni az adott tevékenységbe beérkező- és az onnan távozó kritikus kapcsolatok alapján lehet: a kritikus út a tevékenység kezdetébe (kezdesi határidő-pontjához) érkezik, és végéből (befejezési határidő-pontjából) indul tovább.

2.)



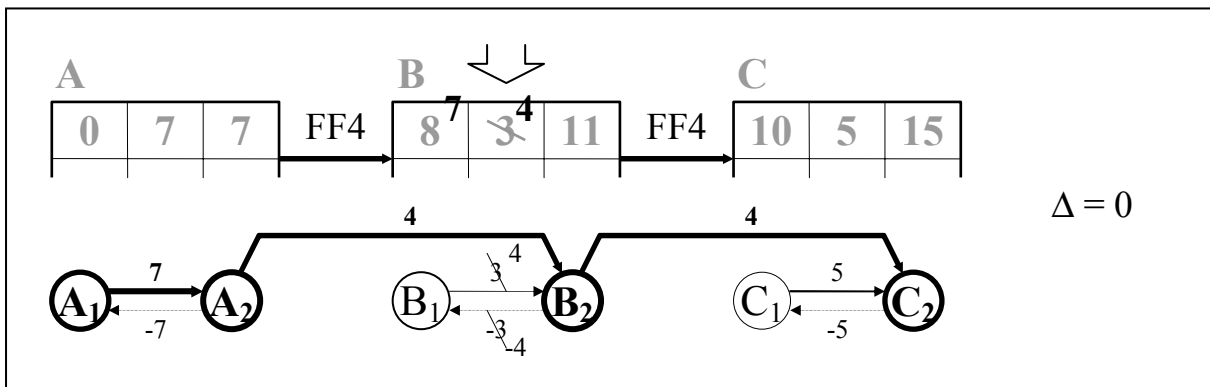
Az időelemzés alapján kialakult idő-potenciál (határ-időpont) rendszerben az adott („B”) kritikus tevékenység időtartamának felső korlátja a mértékadó (negatív él-paraméterű éle része a leghosszabb útnak). A módosítás ellentétes értelemben jelent meg a háló teljes átfutási idejében ($\Delta=-\delta$). Az ellentétes irányú változás („negatív visszacsatolás”) miatt az ilyen idő-összefüggésű kritikus tevékenységet „**negatív kritikus**” tevékenységnek nevezzük. Felismerni az adott tevékenységbe beérkező- és az onnan távozó kritikus kapcsolatok alapján lehet: a kritikus út a tevékenység végébe (befejezési határidő-pontjához) érkezik, és kezdetéből (kezdési határidő-pontjából) indul tovább.

3.)



Az időelemzés alapján kialakult idő-potenciál (határ-időpont) rendszerben az adott („B”) kritikus tevékenység időtartamának korlátjai nem mértékadók (sem negatív-, sem pozitív él-paraméterű éle nem része a leghosszabb útnak). A módosítás nem jelent meg a háló teljes átfutási idejében ($\Delta=0$). A változás elmaradása miatt az ilyen idő-összefüggésű kritikus tevékenységet „látszat kritikus” (ezen belül itt „**kezdés kritikus**”) tevékenységnek nevezzük. Felismerni az adott tevékenységbe beérkező- és az onnan távozó kritikus kapcsolatok alapján lehet: a kritikus út a tevékenység kezdetébe (kezdési határidő-pontjához) érkezik, és onnan is (kezdési határidő-pontjából) indul tovább.

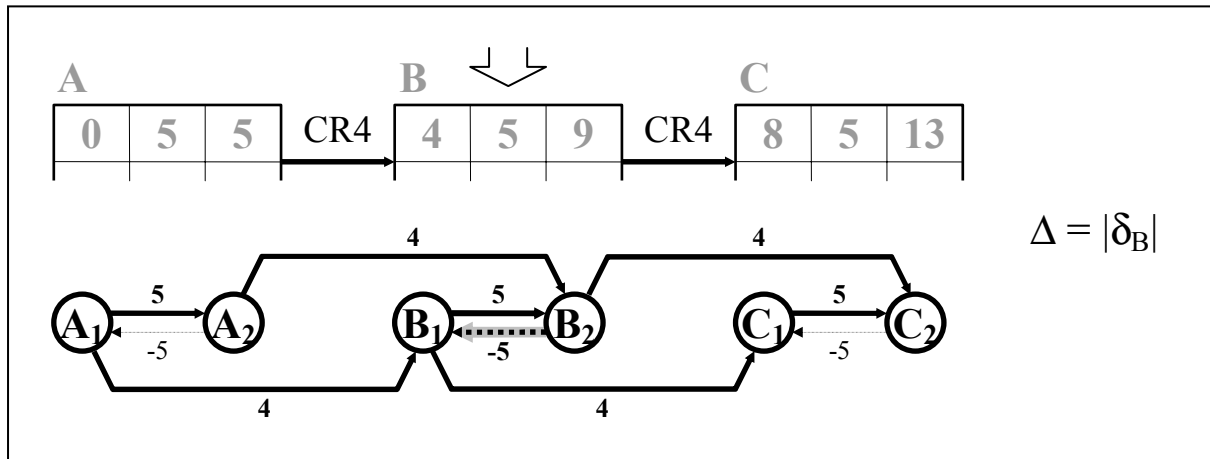
4.)



Az időelemzés alapján kialakult idő-potenciál (határ-időpont) rendszerben az adott („B”) kritikus tevékenység időtartamának korlátjai nem mértékadók (sem negatív-, sem pozitív él-paraméterű éle nem része a leghosszabb útnak). A módosítás nem jelent meg a háló teljes átfutási idejében ($\Delta=0$). A változás elmaradása miatt az ilyen idő-összefüggésű kritikus tevékenységet „látszat kritikus” (ezen belül itt „**befejezés kritikus**”) tevékenységnek nevezzük. Felismerni az adott tevékenységbe beérkező- és az onnan távozó kritikus kapcsolatok alapján lehet: a kritikus út a tevékenység végébe (befejezési határidő-pontjához) érkezik, és onnan is (befejezési határidő-pontjából) indul tovább.

Megjegyzés: „Befüggesztett tevékenység” esetében fordulhat elő az az eset, amikor a „befüggesztett tevékenység” kezdési- és befejezési „eseménye” egyaránt része a kritikus útnak, míg – korlátértékek híján – maga a tevékenység (mint időbeli kiterjedéssel bíró folyamat) nem.

5.)



Nem kizárólagosan, de jellemzően szinkronizált (rész-)szalagok (azonos időtartamú egymást követő tevékenységek) esetében fordulhat elő olyan eset, amikor az időelemzés alapján kialakult időpotenciál (határ-időpont) rendszerben az adott („B”) kritikus tevékenység időtartamának korlátjai abszolút értékben mértékadóak (negatív- és pozitív él-paraméterű éle egyaránt része valamelyik alternatív leghosszabb útnak). A tevékenységidő bármilyen értelmű változása abszolút értékben (növekedés formájában) jelenik meg a háló teljes átfutási idejében ($\Delta = |\delta|$). Az ilyen idő-összefüggésű kritikus tevékenységet „**abszolút kritikus**” tevékenységnek nevezzük. Eredendően több kritikus út (ág) és/vagy összetett („CR”) kapcsolatok alkalmazása esetén lehet előfordulására számítani.

Megjegyzések:

Valamennyi fenti esetben azt vizsgáltuk, hogy egy kritikus tevékenység („B”) időtartamának egységnyi ($\delta = +1$) növelése milyen következménnyel jár a háló teljes átfutási idejére ($\Delta = ?$). Fontos észrevenni, hogy a tevékenységidő változtatásával a rögzített időértéket definiáló alsó- és felső korlátozás pár (min-max él-pár) korlát-értékeit (súlyszámait) abszolút értékben változtatjuk.

- A vizsgált tevékenységnél az időtartam egységnyi csökkentésének ($\delta = -1$) hatása a háló teljes átfutási idejére (Δ) nézve attól függ, hogy vannak-e a hálón „alternatív” (a vizsgált tevékenységet nem tartalmazó, egyéb) kritikus utak (ágak).
- A 2.), 3.) és 4.) eset („negatív-”, „kezdés-” és „befejezés kritikus” idő-helyzet) további kérdéseket is felvet, amit – úgy mondjuk – a háló „nyitottsága” okoz. Tegyük fel, hogy a „B” tevékenység időtartamát nem egy, de tíz egységgel ($\delta = +10$) növeljük meg! Akkor mennyi is lenne a háló teljes átfutási ideje? Hol (mely két „csomópont” között) is található a leghosszabb (azaz „kritikus”) út? Lehet, hogy nem egy, de több „forrás” és/vagy „nyelő” is van? Ha megnézzük példánk „röntgen-képét” kiderül, hogy „klasszikus értelemben” forrás és nyelő nem is található a gráfon! Mindezen kérdések megválaszolása, a látszólagos ellentmondások feloldása már a kezdeti „gráf-analógiához” („leghosszabb úthoz”) kapcsolódó fogalmak és megszorítások felülvizsgálatának igényét is felveti, melyekre a következő, a hálós időmodellek általánosítását tárgyaló fejezetekben térünk ki tételesen.
- Úgy is szoktuk mondani, hogy az MPM/PDM modell igen hasznos, sokrétű modellezési eszköz, de ha a felhasználó nincsen tisztában belső összefüggéseivel, könnyen félreértelmezheti az eredményeket, hamis következtetéseket von le, és a hálós időmodellek egyik legfontosabb, elsődleges szolgáltatását – nevezetesen a modellezett projekt belső összefüggései és mechanizmusai alapján az esetleges változtatások tovagyrúzó hatásainak „valós” előrejelzését – nem tudja saját hasznára fordítani.

Leggyakrabban használt egyszerű kapcsolatok

Az alábbi táblázatban a leggyakrabban használt egyszerű (MPM hálós idő-modellbeli) kapcsolatokat foglaltuk csokorba.

FSp „befejezés-kezdés min p ”	A követő (viszonyított) tevékenység <u>legalább</u> " p " időegységgel a megelőző (viszonyítási alap) tevékenység befejezése után kezdődjék	Erősen erőforrás-korlátos esetek tipikus kapcsolata (általában „0” paraméterrel, soros folyamatkapcsolások létrehozására)
-FSp „befejezés-kezdés max p ”	A követő (viszonyított) tevékenység <u>legfeljebb</u> " p " időegységgel a megelőző (viszonyítási alap) tevékenység befejezése után kezdődjék	Általában a FSp kapcsolattal együtt, állagmegóvási, illetve erőforrás-kihasználási követelmények tipikus kapcsolata
SSp „kezdés-kezdés min p ”	A követő (viszonyított) tevékenység <u>legalább</u> " p " időegységgel a megelőző (viszonyítási alap) tevékenység kezdése után kezdődjék	Jól szinkronizált, illetve párhuzamos folyamatok tipikus kapcsolata, pl. nagyobb léptékű ütemtervek, projektek esetén
-SSp „kezdés-kezdés max p ”	A követő (viszonyított) tevékenység <u>legfeljebb</u> " p " időegységgel a megelőző (viszonyítási alap) tevékenység kezdése után kezdődjék	Nem tipikus kapcsolat; magában, illetve SSp kapcsolattal együtt allokációs segédeszközként nyújthat hasznos segítséget
FFp „befejezés-befejezés min p ”	A megelőző (viszonyítási alap) tevékenység befejezése és a követő (viszonyított) tevékenység befejezése között <u>legalább</u> " p " időegység legyen	Többnyire „adminisztrációs”, pl. átadási, ellenőrzési tevékenység „visszaszámlálás” jellegű időzítésére szolgáló kapcsolat
-FFp „befejezés-befejezés max p ”	A megelőző (viszonyítási alap) tevékenység befejezése és a követő (viszonyított) tevékenység befejezése között <u>legfeljebb</u> " p " időegység legyen	Nem tipikus kapcsolat; magában, illetve FFp kapcsolattal együtt allokációs segédeszközként nyújthat hasznos segítséget
SFp „kezdés-befejezés min p ”	A megelőző (viszonyítási alap) tevékenység kezdése és a követő (viszonyított) tevékenység befejezése között <u>legalább</u> " p " időegység teljen el	Teoretikus kapcsolat; tipikusan a -FSp kapcsolat kiváltására (időtervezési eszközként) szolgálhat, ... negatív paraméterrel
-SFp „kezdés-befejezés max p ”	A megelőző (viszonyítási alap) tevékenység kezdése és a követő (viszonyított) tevékenység befejezése között <u>legfeljebb</u> " p " időegység teljen el	Teoretikus kapcsolat, a teljesség kedvéért kerül megemlítésre. Bonyolult allokációs feltételek esetén nyújthat segítséget.

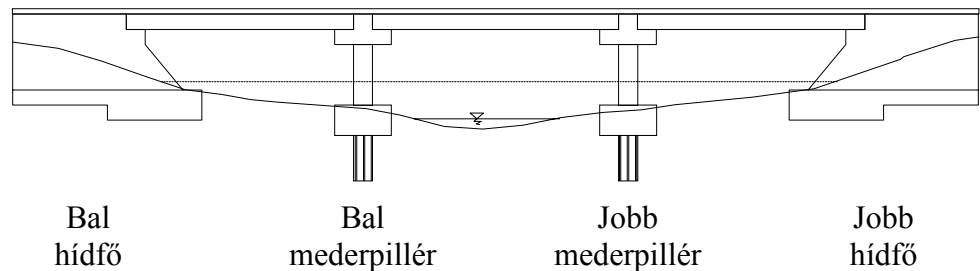
Leggyakrabban használt összetett kapcsolatok

Az alábbi táblázatban a leggyakrabban használt összetett (MPM hálós idő-modellbeli) kapcsolatokat foglaltuk csokorba.

<p>SSp FFp } CRp</p> <p>„(min) kritikus megközelítés”</p>	<p>A megelőző (viszonyítási alap) tevékenység számára a követő (viszonyított) tevékenységgel szemben minden készülségi foknál <u>legalább</u> „p” egységnyi időelőny biztosítandó</p>	<p>Technológiai (kötési, száradási, szilárdulási stb.) feltételek tipikus kapcsolata átlapolt, vagy nem ismert idejű tevékenységek között</p>
<p>-SSp -FFp } -CRp</p> <p>„(max) kritikus megközelítés”</p>	<p>A megelőző (viszonyítási alap) tevékenység és a követő (viszonyított) tevékenység között minden készülségi foknál <u>legfeljebb</u> „p” egységnyi követési idő biztosítandó</p>	<p>Kellő körültekintéssel állagmegóvási feltételek kapcsolata lehet. Alkalmazása azonban sok veszélyt rejt magában, ezért ha nem szükséges, ne használjuk !</p>
<p>FSp -FSp }</p> <p>„kényszer követés”</p>	<p>A követő (viszonyított) tevékenység a megelőző (viszonyítási alap) tevékenység befejezését követően <u>pontosan</u> „p” időegység elteltével kell hogy kezdődjék</p>	<p>Tipikusan az egymást követő tevékenységek relatív időhelyzetének <u>direkt</u> megadására (pl. allokációs célú rögzítésére) szolgáló kapcsolat</p>
<p>FS0 -FS0 }</p> <p>„azonnali követés”</p>	<p>A követő (viszonyított) tevékenység a megelőző (viszonyítási alap) tevékenység befejezését követően <u>azonnal</u>, késedelem nélkül el kell hogy kezdődjék</p>	<p>Főleg nagy értékű erőforrások allokációjára (adott erőforrás folyamatos munkavégzésének előírására) szolgáló kapcsolat</p>
<p>FF_{f(Ds)} SS_{f(Dp)} } P% p</p> <p>„(min) általános kettős kapcsolat”</p>	<p>A követő (viszonyított) és a megelőző (viszonyítási alap) tevékenység kezdése között <u>legalább</u> $f(Dp)$ egységnyi, befejezéseik között pedig <u>legalább</u> $f(Ds)$ egységnyi követési idő biztosítandó ! (<i>a tevékenységidők függvényében megadott időparaméterekkel</i>)</p>	<p>Pl. a minimális <u>térköz</u> biztosításának tipikus eszköze. A kapcsolat időparaméterei az érintett tevékenységek előrehaladási ütemének (időtartamának) <u>függvényében</u> kerülnek meghatározásra</p>
<p>-FF_{f(Ds)} -SS_{f(Dp)} } -P% p</p> <p>„(max) általános kettős kapcsolat”</p>	<p>A követő (viszonyított) és a megelőző (viszonyítási alap) tevékenység kezdése között <u>legfeljebb</u> $f(Dp)$ egységnyi, befejezéseik között pedig <u>legfeljebb</u> $f(Ds)$ egységnyi követési idő biztosítandó ! (<i>a tevékenységidők függvényében megadott időparaméterekkel</i>)</p>	<p>Kellő körültekintéssel állagmegóvási, illetve munkaterület korlátozási feltételek kapcsolata lehet. Alkalmazása azonban sok veszélyt rejt magában, ezért ha nem szükséges, ne használjuk !</p>

Gyakorló feladatok:

I.1 Készítsen az alábbi, kétszer egy forgalmi sávos közúti hídszerkezet építésének kivitelezésére egy 15-20 tevékenységes MPM/PDM hálós („ajánlati”) idő-tervet. Adjon időbecslést az egyes tevékenységekre, határozza meg a közöttük lévő logikai- és technológiai kapcsolatokat, valamint a munkabrigádok célszerű számának és mozgatásának figyelembe vételével adjon időbecslést a munkálatok elvégzésére. (A híd hossza a hídfőkkel együtt hozzávetőlegesen 60m.)



Ötleként a megoldáshoz – és az azonosított tevékenységek „előfordulási mátrixba” rendezésének lehetőségét is szemléltetve – az alábbiakban felvázolunk egy „elvi” megoldást. (Az időadatok munkanapban értendők.)

Terület előkészítés

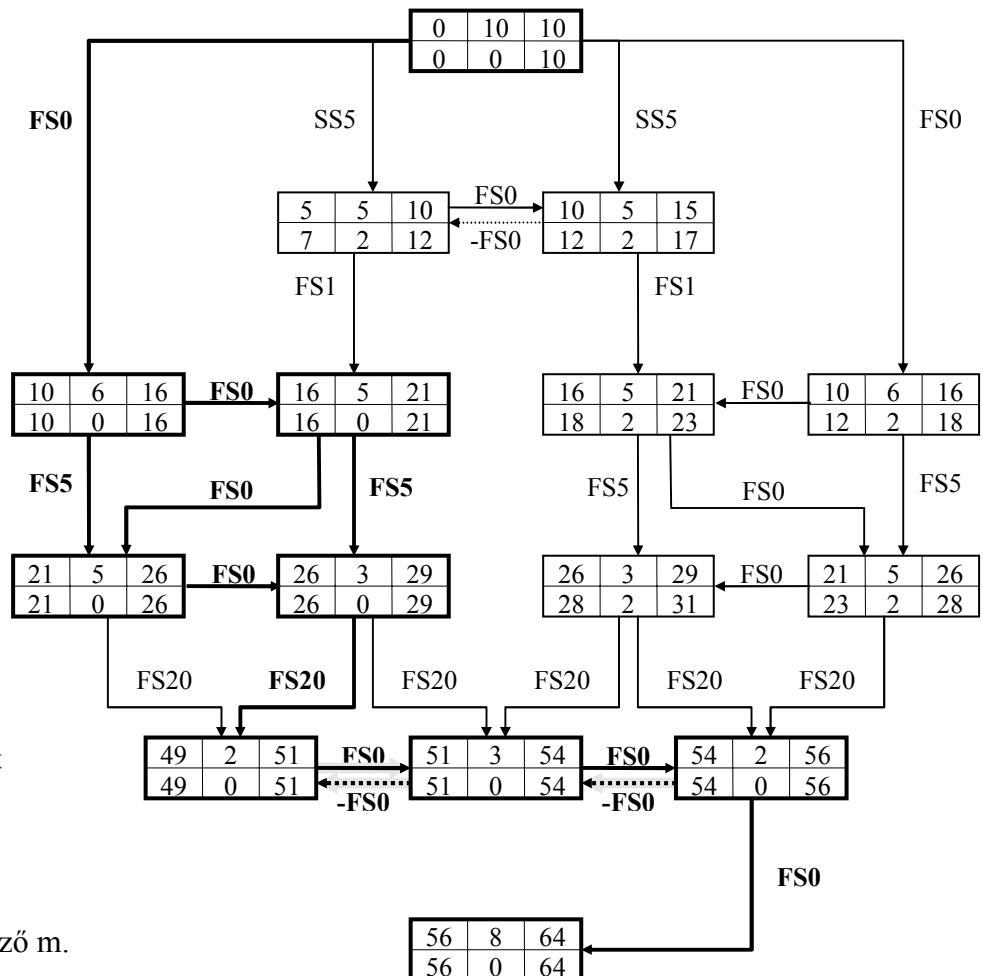
Mélyalapozás (cölöp)
(1 brigád, folyamatosan)

Síkalapozás
(2 brigád)

Felmenő szerkezet
(ua. 2 brigád)

E.gy. áthidaló szerkezet
(1 daru, folyamatosan)

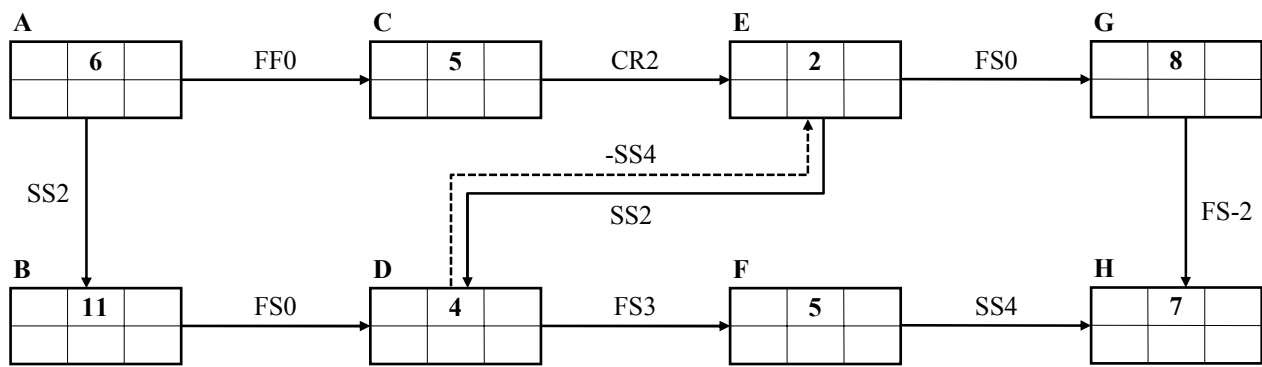
Pályaszerkezet + befejező m.



I.2 MPM/PDM hálós időmodelleknél milyen korlátozásokkal (kapcsolatokkal) modellezhetők az alábbi műszaki feltételek? Válaszát konkrét műszaki példákkal szemléltesse!

- Folyamatos foglalkoztatás;
- Minimális térköz biztosítása;
- Készültségbeli maximális eltérés;
- Minimális időbeli átlapolás;
- Technológiai szünet;
- Állagvédelmi előírások;
- Kezdési sorrend;
- Szűk munkaterület;
- Helyszínen tartás.

I.3 Végezze el az alábbi hálós projekt-modell teljes időelemzését!



I.4 Készítse el egy 800 m hosszú, 2 m átlagos fektetési mélységű csapadékvíz csatorna építésének hálós időmodelljét az alábbi műszaki-szervezési feltételek és becsült időtartamok alapján! Törekedjen a minimális átfutási időre, de vegye figyelembe az állag-megóvási szempontokat is!

- A csőanyagok és aknaelemek helyszínre szállítása leghamarabb a munkaterület átadásának megkezdése után 12 nappal kezdődhet.
- A munkaárok kiemelése és a dúcolás között legalább 50 m térköz, de legfeljebb 2 nap technológiai szünet biztosítandó, csakúgy, mint a dúcolat elbontása és a földvisszatöltés között;
- A csőfektetés csak akkor kezdhető meg, ha a dúcolási munka legalább 50 m-nyi előnyre tett szert, és a helyszínen legalább 200 m-nyi csatornához szükséges csőanyag és aknaelem áll rendelkezésre;
- A rendelkezésre álló dúcanyag a teljes dúcolási szükségletnek csak mintegy egynegyede;
- A dúcolat elbontása 100 m-es csőszakaszonkénti 1 napig tartó vízzárósági próba után kezdhető.

Időtartamok:

- Munkaterület átadás ($D_A=1$ nap);
- Munkaárok kiemelés ($D_B=32$ nap);
- Hézagos dúcolás ($D_C=32$ nap);
- Csőanyagok és aknaelemek helyszínre szállítása ($D_S=16$ nap);
- Csőfektetés (aknaépítéssel és vízzárósági próbával együtt) ($D_D=32$ nap);
- Dúcolat elbontása ($D_E=32$ nap);
- Földvisszatöltés (tömörítéssel együtt) ($D_F=32$ nap).

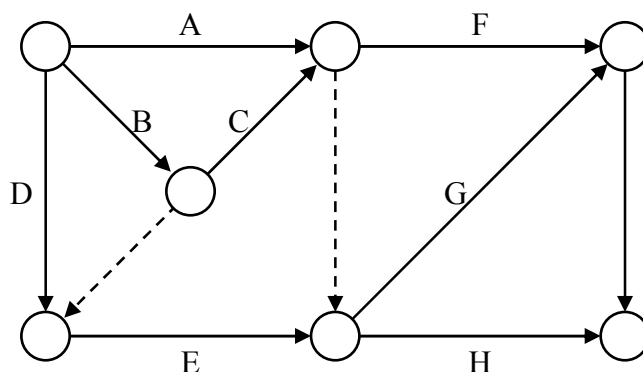
- I.5** Egy belföldi, részben polgári hasznosítású repülőtér – és kapcsolódó logisztikai centrum – bővítésének részeként szükségessé vált két kisebb, hasonló technológiai rendszerű épület („I”- fogadóépület és „II”- irányítástechnikai épület) megépítése is. Az építésszerelési munkákat épületenként három technológiai főfolyamatba („A”- mélyépítés, alapozás; „B”- szerkezetépítés; „C”- befejező munkák) szervezték, melyek végrehajtását egyetlen vállalkozó szervezet végzi. A főfolyamatok kivitelezésére egy-egy célbrigád (,,a”, „b”, „c”) hoztak létre. Az alábbi becsült időtartamok és organizációs feltételek figyelembevételével készítse el az építés-szerelési munkák hálós időmodelljét!

Épületenkénti becsült időtartamok		
Technológiai főfolyamat	Fogadóépület	Irányítástechnikai épület
„A”- mélyépítés, alapozás	4 hónap	2 hónap
„B”- szerkezetépítés	4 hónap	3 hónap
„C”- befejező munkák	1 hónap	3 hónap

Organizációs feltételek:

- Térszervezési megfontolásokból az időben átlapolható folyamatok között általában egy-egy hónap követési idő biztosítandó, de...
- A fogadóépületen a szerkezetépítés után a teljes munkaterületet 1 hónapnyi időtartamra külső biztonságtechnikai vállalkozónak át kell engedni, és csak ez után kerülhet sor a befejező munkákra;
- Az irányítástechnikai épületen az alapozási munkák után (a szerkezetépítési munkák előtt) a teljes munkaterületet 2 hónapnyi időtartamra át kell engedni egy külső (gépészeti- és biztonságtechnikai) vállalkozónak;
- A járulékos őrzés-védelmi és biztonságtechnikai feladatokra tekintettel a célbrigádoknak szigorúan folyamatos munkavégzés biztosítandó;
- A teljes kivitelezésre legfeljebb egy év (12 hónap) áll rendelkezésre!

- I.6** Alakítsa át az alábbi tevékenység-él típusú (CPM/PERT) hálós időmodellt tevékenység-csomó típusú (MPM/PDM) hálós időmodellé!



- I.7** Egy közmű-rekonstrukciós projekt részeként egy vállalkozó két mélyépítési műtárgy („A” és „B”) kivitelezési munkálatait – saját hibájából – a vállalt határidő előtt 6 héttel tudja csak megkezdeni, akkor is csak két jól összeszokott „mindenes” brigád tud mozgósítani a feladatok elvégzésére. Szabad vállalkozói kapacitás se közel, se távol. ... Az alábbi munkaszervezési feltételek és becsült időtartamok tükrében milyen mértékű minimális kötbérrel

tudja „megúszni” a vállalkozó a „túlvállalt” feladatot, ha a szerződés szerint minden hét kétszázötven százalékos a vállalási ár 2 %-ának megfelelő kötbér visszatartására jogosítja a megrendelőt? A „vész”-ütemterv kialakításának segítése végett készítse el a munkálatok hálós időmodelljét!

Szervezési feltételek:

- A munkabrigádok – összetételüknél fogva – bármely technológiai folyamat („a”- kitakarás; „b”- műtárgyépités; „c”- eltakarás, helyreállítás) kivitelezésére alkalmasak;
- A szűk munkahelyre való tekintettel az „A” műtárgyat egyidejűleg csak egy brigád tudja munka alá vonni;
- A „B” műtárgy időben átlapolható munkafolyamatai között legalább egy hét követési idő biztosítandó;
- A műtárgyakon egy munkafolyamathoz egyidejűleg csak egy brigád férhet hozzá, illetve – a technológiából adódóan – a munkafolyamatok mindegyike teljes brigádlétszámot igényel.

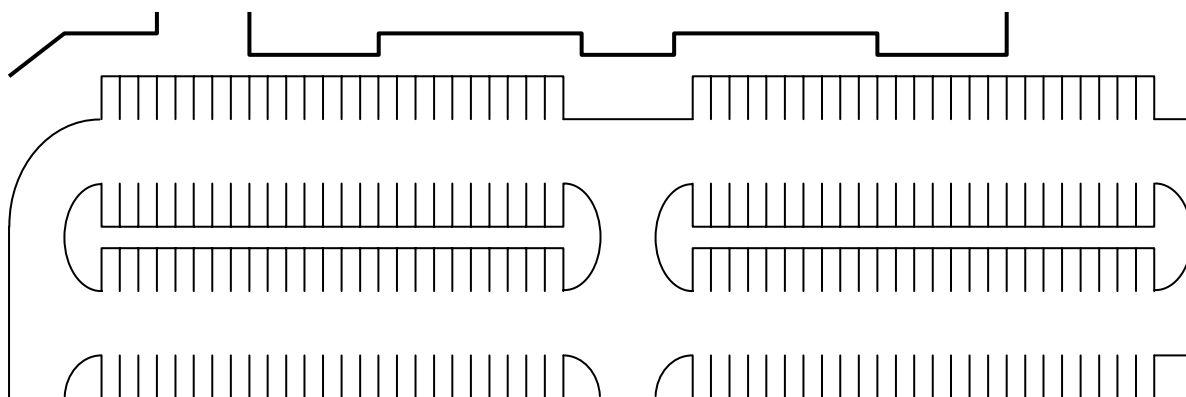
Műtárgyankénti becsült időtartamok		
Munkafolyamat	„A” műtárgy	„B” műtárgy
„a”- kitakarás	2 hét	3 hét
„b”- műtárgyépités	2 hét	4 hét
„c”- eltakarás, helyreállítás	1 hét	2 hét

I.8 Egy kisebb bevásárlóközponthoz kapcsolódó 4 x 50 beállóhelyes autóparkoló burkolatának felújítási munkálatait a szerződés szerint úgy kell elvégezni, hogy a kivitelezés teljes időtartama alatt legalább 100 autó parkolásának lehetőségét biztosítani kell. A munkálatokat a vállalkozó 3 technológiai folyamatba („a”- burkolatbontás; „b”- burkolatalap készítés; „c”- térburkolat fektetés) szervezte, az alábbi, teljes feladat-mennyiségre számított becsült időtartamokkal, és előzetes munkaszervezési elképzelésekkel:

Tevékenység időtartamok (200 egységre): $D_a=12$ nap; $D_b=16$ nap; $D_c=12$ nap.

Szervezési feltétel:

- A burkolatbontást és a burkolatalap készítést egyazon munkabrigád végzi, akik számára folyamatos munkavégzést kell biztosítani;
- A térburkolat fektetésénél többszöri felvonulás is megengedett;
- A burkolatalap legalább 5 napos (1 hetes) szilárdságú legyen a burkolat fektetésekor.



A bevásárló központ autóforgalmának lehető legrövidebb ideig tartó zavarását célozva készítse el a munkálatok hálós időmodelljét!

Feladat megoldások

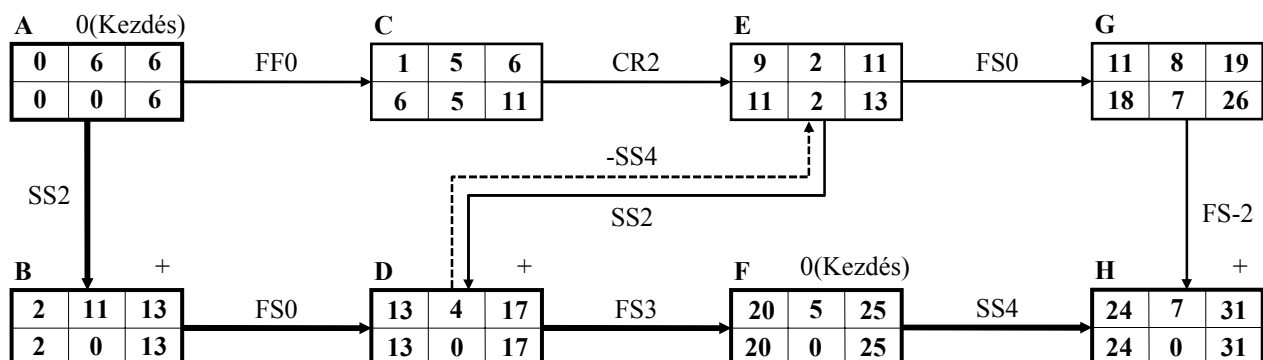
I.1 Készítsen az alábbi, kétszer egy forgalmi sávós közúti hídszerkezet építésének kivitelezésére egy 15-20 tevékenységes MPM/PDM hálós („ajánlati”) idő-tervet. Adjon időbecslést ...

Az általunk javasolt („elvi”) megoldást hiba lenne egyedüli megoldásként értelmezni. Az olvasó által felvázolható háló-változatok számtalan műszaki, szervezési megoldást, technológiát tükrözhetnek. Például az időtartamokban: milyen cölöp (fúrt, vagy vert) készül? Milyen technológiai időigényeket (folyamatokat, műveleteket) „értünk bele” a tevékenységidőbe? Az előkészítő mozzanatokot is? A technológiai szilárdulási-, kötési-, stb. időket is? Avagy: Hány önálló (mű-)vezetésű brigádot állítunk az egyes folyamatokra? Egyet? Kettőt? Négyet? Az egyes brigádokat a munkaterületek között hogyan irányítom? Balpart/jobbpárt, avagy hídfő/pillér elven? Milyen idő- és térbeli átlapolásokat alkalmazunk? És így tovább. A meghozott döntések a háló struktúra alkalmas megfogalmazásával (alakításával, esetleg több tervezési lépcsőben, módosítások sorozatával) foglalhatók egységes modellbe. De ... a fenti kérdések, ugye, „már” (vagy „még”?) nem hálótechnikai kérdések. ...

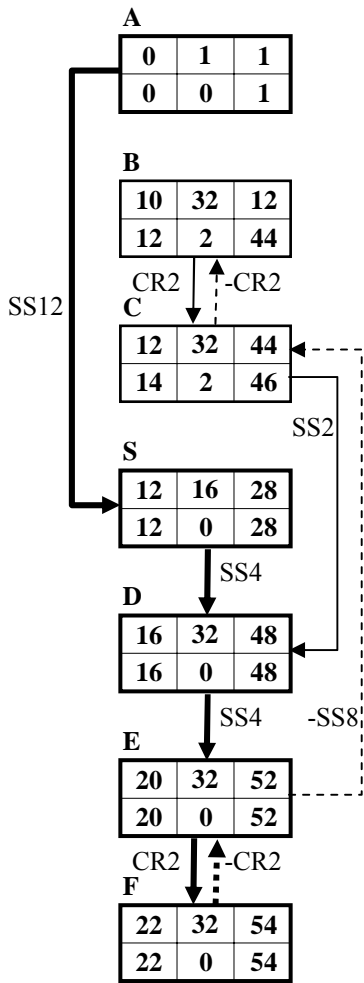
I.2 MPM/PDM hálós időmodelleknél milyen korlátozásokkal (kapcsolatokkal) modellezhetők az alábbi műszaki feltételek? Válaszát konkrét műszaki példával szemléltesse!

- Folyamatos foglalkoztatás: „azonnali követés”; pl. nagy értékű munkagép, alvállalkozó;
- Minimális térköz biztosítása: általános kettős kapcsolat (P%), pl. manipulációs térigény;
- Készültségbeli maximális eltérés: -P% kapcsolat, pl. korlátozott tárolási terület;
- Minimális időbeli átlapolás: pl. -FS kapcsolat negatív paraméterrel, pl. eltakarás előtti szemle, kiértékelés, jóváhagyás, átvétel;
- Technológiai szünet: CR kapcsolat, pl. szilárdulás, száradás, konszolidáció, ülepedés;
- Állagvédelmi előírások: felülről korlátozó kapcsolatok, pl. tükör és szerelőbeton között;
- Kezdési sorrend: pl. SS0, a kapcsolat iránya sorrendiséget hordoz paraméter nélkül is;
- Szűk munkaterület: -P% (felülről korlátozó általános kettős kapcsolat), mint fentebb;
- Helyszínen tartás: „befüggesztett tevékenység”, pl. víztelenítés, daruzás, állványozás.

I.3 Végezze el az alábbi hálós projekt-modell teljes időelemzését!



I.4 Készítse el egy 800 m hosszú, 2 m átlagos fektetési mélységű csapadékvíz csatorna építésének hálós időmodelljét az alábbi műszaki-szervezési feltételek és becsült időtartamok alapján! Törekedjen a minimális átfutási időre, de vegye figyelembe az állag-megóvási szempontokat is!



Technológiai, szervezési feltételek:

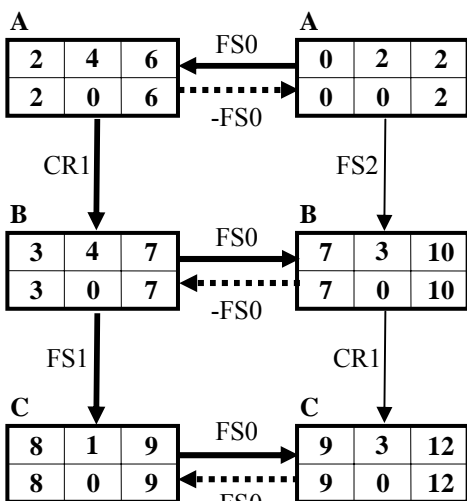
- A csőanyagok és aknaelemek helyszínre szállítása leghamarabb a munkaterület átadásának megkezdése után 12 nappal kezdődhet.
- A munkaárok kiemelése és a dúcolás között legalább 50 m távolság, de legfeljebb 2 nap technológiai szünet biztosítandó, csakúgy, mint a dúcolat elbontása és a földvisszatöltés között;
- A csőfektetés csak akkor kezdhető meg, ha a dúcolási munka legalább 50 m-nyi előnyre tett szert, és a helyszínen legalább 200 m-nyi csatornához szükséges csőanyag és aknaelem áll rendelkezésre;
- A rendelkezésre álló dúcanyag a teljes dúcolási szükségletnek csak mintegy egynegyede;
- A dúcolat elbontása 100 m-es csőszakaszonkénti 1 napig tartó vízzáró-sági próba után kezdhető.

Időtartamok:

- Munkaterület átadás ($D_A=1$ nap);
- Munkaárok kiemelés ($D_B=32$ nap);
- Hézagos dúcolás ($D_C=32$ nap);
- Csőanyagok és aknaelemek helyszínre szállítása ($D_S=16$ nap);
- Csőfektetés (aknaépítéssel és vízzáró-sági próbával együtt) ($D_D=32$ nap);
- Dúcolat elbontása ($D_E=32$ nap);
- Földvisszatöltés (tömörítéssel együtt) ($D_F=32$ nap).

I.5 Egy belföldi, részben polgári hasznosítású repülőtér – és kapcsolódó logisztikai centrum – bővítésének részeként szükségessé vált két kisebb, hasonló technológiai rendszerű épület („I”- fogadóépület és „II”- irányítástechnikai épület) megépítése is. ...

Fogadóépület **Irányítástechnikai épület**



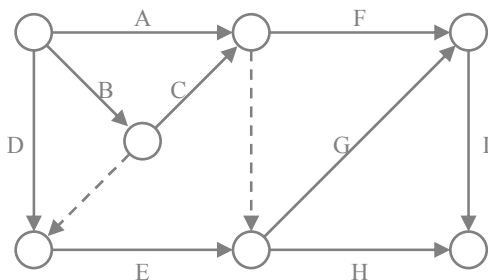
Organizációs feltételek:

- Tervezési megfontolásból az időben átlapolható folyamatok között általában egy-egy hónap követési idő biztosítandó, de...
- A fogadóépületen a szerkezetépítés után a teljes munkaterületet 1 hónapnyi időtartamra külső biztonságtechnikai vállalkozónak át kell engedni, és csak ez után kerülhet sor a befejező munkákra;
- Az irányítástechnikai épületen az alapozási munkák után (a szerkezetépítési munkák előtt) a teljes munkaterületet 2 hónapnyi időtartamra át kell engedni egy külső (gépészeti- és biztonságtechnikai) vállalkozónak;
- A járulékos őrzés-védelmi és biztonságtechnikai feladatokra tekintettel a célbrigádoknak szigorúan folyamatos munkavégzés biztosítandó;
- A teljes kivitelezésre legfeljebb egy év (12 hónap) áll rendelkezésre!

Megjegyzések a megoldáshoz:

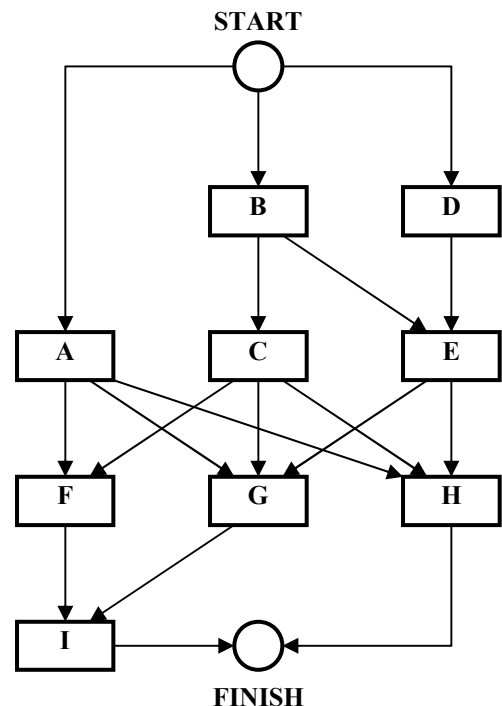
- Esetünkben a feltételeket kielégítő modell előállításának sarok-köve annak a felismerése, hogy a mélyépítési és alapozási munkákat az irányítástechnikai épületen, a szerkezetépítési munkákat viszont a fogadó épületen kell kezdeni. A befejező munkálatok viszont bármelyik épületen kezdhetők, s az ez irányú döntés meghozatalánál egyéb szempontokra támaszkodhatunk. (Mindezek azonban csak közvetetten „hálótechnikai” megfontolások.)
- Itt fontos emlékeztetni arra, hogy „követési idő” alatt eredendően „átlapolt” időhelyzetet és „technológiai szünet” („CR”) jellegű korlátozást értünk!

I.6 Alakítsa át az alábbi tevékenység-él típusú (CPM/PERT) hálós időmodellt tevékenység-csomó típusú (MPM/PDM) hálós időmodellé!

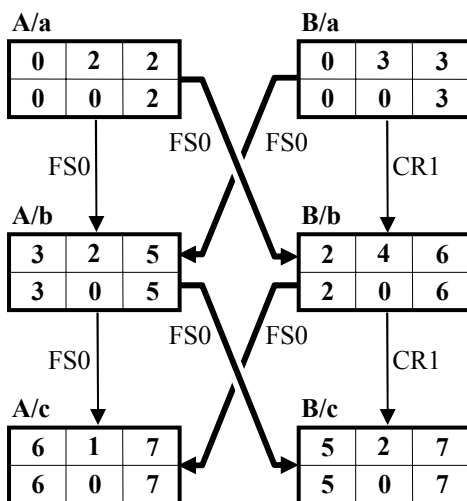


Megjegyzések a megoldáshoz:

- A zsúfolt ábra elkerülése végett az éleken nem tüntettük fel a „FS0” kapcsolati azonosítókat és paramétereiket.
- Az A,C,E és F,G,H tevékenységek (csomópontok) közötti kapcsolatok ábrázolásánál szembekerülünk a gráf „kiteríthetőségének” problémájával ...



I.7 Egy közmű-rekonstrukciós projekt részeként egy vállalkozó két mélyépítési műtárgy („A” és „B”) kivitelezési munkálatait – saját hibájából – a vállalt határidő előtt 6 héttel tudja csak megkezdeni ...



- A munkabrigádok – összetételükénél fogva – bármely technológiai folyamat („a”- kitakarás; „b”- műtárgyépítés; „c”- eltakarás, helyreállítás) kivitelezésére alkalmasak;
- A szűk munkahelyre való tekintettel az „A” műtárgyat egyidejűleg csak egy brigád tudja munka alá vonni;
- A „B” műtárgy időben átlapolható munkafolyamatai között legalább egy hét követési idő biztosítandó;
- A műtárgyakon egy munkafolyamathoz egyidejűleg csak egy brigád férhet hozzá, illetve – a technológiából adódóan – a munkafolyamatok mindegyike teljes brigádlétszámot igényel.

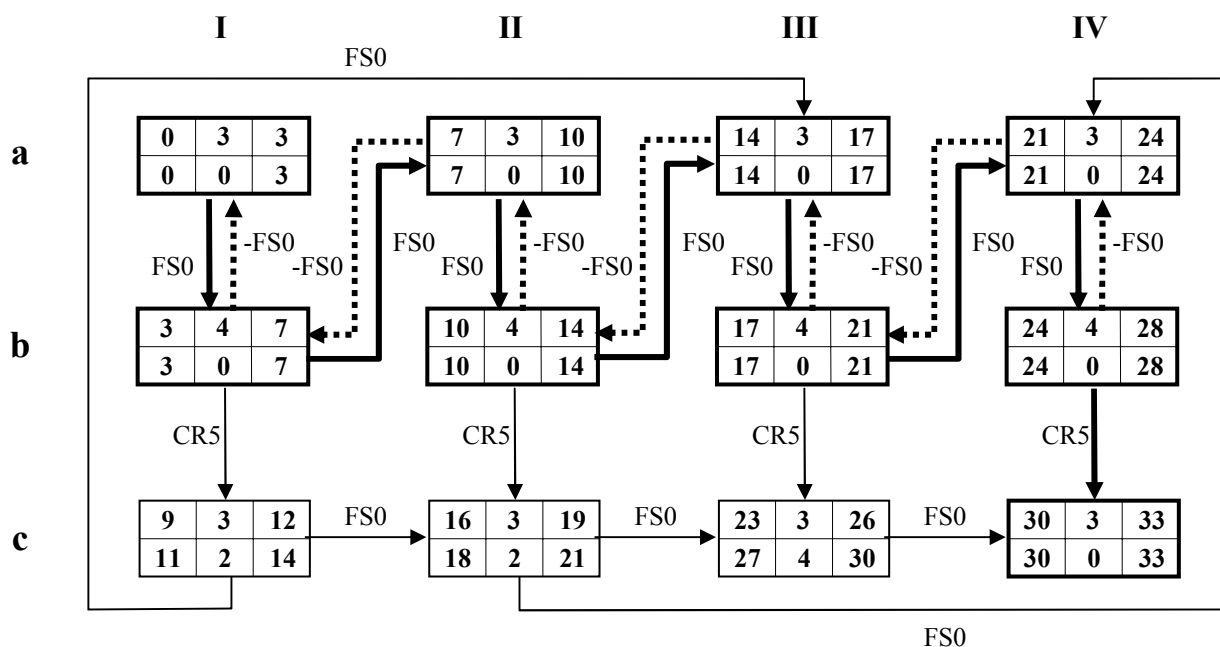
Megjegyzések a megoldáshoz:

- A megoldás sarok-köve annak a felismerése, hogy az összesen 14 munkahétnyi feladatot a brigádok között 50-50% arányban ossza meg a vállalkozó. Ilyetén elgondolást (egyik brigád: A/a-B/b-A/c; másik brigád: B/a-A/b-B/c) tükröz az általunk bemutatott megoldás is. Egyben a fentiekből az is kiolvasható, hogy 2% kötbér megfizetését (helyesebben: „visszatartását”) már nem tudja elkerülni a vállalkozó.
- A „szabatos” megoldáshoz („egyetlen kezdőpont, egyetlen végpont”) az is hozzátartozna, hogy a két műtárgy építésének rész-hálóit egyetlen fiktív „START” és egyetlen fiktív „FINISH” tevékenységgel (avagy „eseménnyel”) összefogjuk. ...

I.8 Egy kisebb bevásárlóközponthoz kapcsolódó 4 x 50 beállóhelyes autóparkoló burkolatának felújítási munkálatait a szerződés szerint úgy kell elvégezni, hogy a kivitelezés teljes időtartama alatt legalább 100 autó parkolásának lehetőségét biztosítani kell. A munkálatokat a vállalkozó 3 technológiai folyamatba („a”- burkolatbontás; „b”- burkolatalap készítés; „c”- térburkolat fektetés) szervezte, az alábbi, teljes feladat-mennyiségre számított becült időtartamokkal, és előzetes munkaszervezési elképzelésekkel:

Tevékenység időtartamok (200 egységre): $D_a=12$ nap; $D_b=16$ nap; $D_c=12$ nap.

- Szervezési feltétel:
- A burkolatbontást és a burkolatalap készítést egyazon munkabrigád végzi, akik számára folyamatos munkavégzést kell biztosítani;
 - A térburkolat fektetésénél többszöri felvonulás is megengedett;
 - A burkolatalap legalább 5 napos (1 hetes) szilárdságú legyen a burkolat fektetésekor.



Megjegyzés a megoldáshoz:

- A megoldásként javasolt modell lényegi része a teljes építési feladat 50-50 beállóhelyes egységekre történő bontása és azok önálló munkaterületként (I,II,III,IV) történő kezelése.

J – VALAMENNYI KÖZÜL A LEGHOSSZABB ÚT

Bár azt már többször is kihangsúlyoztuk, hogy a hálós időtervezési feladat két – hálózatokon definiált – alap-feladatra (a leghosszabb út keresésére, illetve annak duál-feladatára, a minimális potenciál-rendszer meghatározására) vezethető vissza, az eddig tárgyalt (CPM, PERT, MPM/PDM) technikáknál bemutatott algoritmusokkal – gráf mentén, avagy táblázatosan, de valamennyi esetben „felgöngyölítéses” jelleggel – eredendően a potenciál feladatot oldottuk meg.

Első lépésként kijelöltük a „0” potenciál helyét („forrás”), majd innen indulva, folyamatosan és szisztematikusan bővítgetve a számításokkal feltárt modell-részt, rendre meghatároztuk az élek által reprezentált korlátozásokat kielégítő és az egyes gráf-elemekhez (jellemzően a csomópontokhoz) rendelhető „legkisebb” idő-potenciálokat. Az így kialakított időpotenciál-rendszer belső összefüggései (korlát-értékre, azaz egyenlőségre teljesülő korlátozások beazonosítása) alapján pedig felderítettük a „mértékadó”, „leghosszabb”, vagy ha tetszik „kritikus” uta(ka)t.

A két feladat összefüggése alapján az időtervezési feladatot fordított logikával is megoldhatjuk. Tárjuk fel a leghosszabb uta(ka)t, majd annak ismeretében, az(ok) mentén haladva „összük ki” a feltételeket kielégítő („legkisebb”) idő-potenciálokat! E fordított megközelítésnek több előnye is van:

1. Bármely út, így a leghosszabb út hossza is a benne foglalt élek hosszának (súlyszámaiknak) egyszerű összege. Az viszont, hogy az adott súlyszámokat milyen sorrendben adjuk össze, nem bír jelentőséggel. Ezek szerint viszont nem szükséges előre megjelölni a számítások kiindulópontját („forrás”, avagy „nyelő”), illetve következetesen „nyíl mentén” (avagy azzal szemben) haladva, vagyis „felgöngyölítő jelleggel” végezni a számításokat.
2. Leghosszabb út feladat nem csak „hálózatokon” de más gráfokon is értelmezhető. Az egyedül szükséges kikötés, hogy a gráf nem tartalmazhat „pozitív hurkokat” (olyan hurkokat, melyek él-paramétereinek – azaz a befoglalt élek „súlyszámainak” – összege nullánál nagyobb érték). Ilyen összefüggésben lényegtelen, hogy a gráfon hány „forrás” és hány „nyelő” található (egyáltalán található-e), illetve hogy a gráf egyáltalán összefüggő-e, vagy sem. E „szabadság” ráadásul jól jön összetettebb projektek (projekt modellek), illetve a „multi-projekt menedzsment” területén (is). (Alkalmazási példát lásd később, az „L” fejezetnél.)

A leghosszabb utak felderítésénél két „trivialitásra” is támaszkodhatunk:

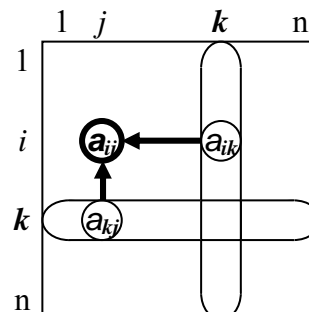
1. A gráfok – ezen belül a hálós idő-modellek – jellemzően lényegesen több élt, mint csomópontot tartalmaznak. Ezért célszerű a számítások súlypontját a csomópontokra helyezni.
2. A csomópontok átjárhatósága („transzitivitása”) okán, ha egy gráfon létezik út „i” pontból „k” pontba, és létezik út „k” pontból „j” pontba, akkor létezik út „i” pontból „j” pontba.

Folytatva a gondolatmenetet: A leghosszabb utak valamennyi csomópont közötti értelmezésével és meghatározásával – a feltárt „leghosszabb” út(ak) mentén – a csomópontokhoz rendelhető „minimális” és „maximális” időpotenciálok egyszerűen „kioszthatók”. ...

A közvetítő pontok módszere

A fentebb említett trivialiszt egy tetszőleges k pontra átfogalmazva: Egy gráfon valamennyi i pontból, melyből út vezet k pontba, út vezet valamennyi olyan j pontba, ahová k -ból út vezet. Ebben az összefüggésben a k pontot az i és j pontok között – a $P=\{i,\dots,k,\dots,j\}$ út(ak)on – egy „közbulső”, avagy „közvetítő” pontnak nevezzük.

Ha tehát megvizsgáljuk a gráf valamennyi pontját, azokat rendre ($k=1,2,3,\dots,n$) közvetítő pontnak választva, és minden vizsgált k közvetítő pont esetében megnézzük, hogy oda mely egyéb i pontokból vezet út (a struktúra mátrix k oszlopának elemei), illetve hogy onnan mely egyéb j pontokba vezet út (a struktúra mátrix k sorának elemei), akkor ezáltal a gráf valamennyi ij csomópont-párjára (viszonylata¹⁹) felderíthetjük az őket összekötő valamennyi $P[i,j]$ útvariánst²⁰.



Az is belátható, hogy ezen „felderítési” folyamat során valamennyi – egynél több élből álló – útvariáns vizsgálatára sor kerül, egyszer és csakis egyszer. A felderítéssel egyidejűleg az útvariánsok különböző jellemzőit (egyáltalán létét, hosszát, esetleg számosságát) határozhatjuk meg, mely egyben lehetőséget biztosít a valamilyen szempontból kiemelt tulajdonságokkal bíró (pl. legrövidebb, leghosszabb) út(ak) felderítésére, illetve leválogatására is²¹.

A gráf paraméteres struktúratáblájából (\underline{A}^0) kiindulva, azt a felderített összefüggésekkel folyamatosan kiegészítve, n „lépésben” (n transzformációval) állíthatjuk elő az éppen vizsgált jellemzőket tartalmazó „teljes elérési táblát” (\underline{A}^n). (Megjegyzés: Ahol n a gráf csomópontjainak számát jelöli. Olvasata nem „kitevő”, hanem „felső index”, egyben transzformációs sorszám.)

A vizsgálatok kiindulópontját képező, az aktuális feladatnak megfelelően elállított \underline{A}^0 struktúratábla a_{ij}^0 elemei megfelelő értékükkel jelzik, hogy adott „ i ” és „ j ” pontok között, adott $i \rightarrow j$ irányban van-e „közvetlen” (egyetlen él által létrehozott) kapcsolat, vagy sem. A közvetlen kapcsolatot a kiinduló struktúratáblában például $a_{ij}^0=1$ érték jelezheti nem súlyozott gráfok esetén, míg súlyozott gráf esetén maga az élhez rendelt súlyszám ($a_{ij}^0=\tau_{ij}$). A közvetlen kapcsolat nem-létét viszont valamilyen, az aktuális feladatnak megfelelően (célszerűen) megválasztott, ám a manuális számításoknál a táblázatokban többnyire fel nem tüntetett, megkülönböztető, „marker” („ M ”) érték ($a_{ij}^0=M$) jelöli.

Ha a gráf-élek halmazának azonosítására bevezetjük az „ E ” jelölést, akkor esetünkben – súlyozott gráf és leghosszabb út(ak) keresése esetén – a kiinduló struktúratábla előállításának összefüggéseit az alábbiak szerint formulázhatjuk:

$$a_{ij}^0 \in \underline{A}^0 \quad a_{ij}^0 = \begin{cases} \tau_{ij} & | \quad ij \in E \\ M & | \quad ij \notin E \end{cases} \quad M = -\infty$$

¹⁹ „Viszonylat” alatt a gráf két csomópontjából alkotott irányított csomópont-párt értünk, függetlenül attól, hogy a két pont között az adott irányban létezik-e út (kapcsolat), avagy sem, illetve hogy az hány (irányított) élből áll.

²⁰ Valamennyi i és j pontok közötti $P[ij]$ utat tekintve, a $P=\{i,\dots,k,\dots,j\}$ utat egy önálló „útvariánsnak” tekintjük, ha az az érintett csomópontok felsorolásában az összes többi út(variáns)tól legalább egy helyen eltér.

²¹ Egy gráfon a hurkok létének ellenőrzését, illetve valamennyi csomópont között a legrövidebb utak hosszának meghatározását célzó számítógépes algoritmust (egy egyszerű belső mag köré szervezett, egymásba ágyazott hármas ciklus formájában) Warshall (1959) és Floyd (1962) publikált (Lásd: következő fejezet). Módszerüket az operációkutatási szakirodalom Floyd-Warshall algoritmus néven referálja. Megmutatható, hogy minimális változtatással algoritmusuk a gráfok csomópontjai között meghatározható számos egyéb jellemző – így a leghosszabb utak – meghatározására is használható. Ez utóbbi változatában több szakirodalmi forrás például az alsó- és felső időkorlátos projekt-ütemezési feladatok "TCSPSP/_{max}" megoldhatóságának ellenőrzésére ajánlja.

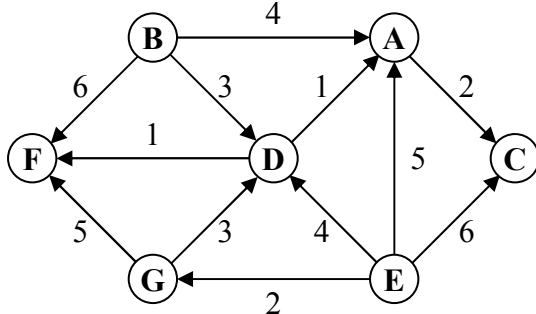
Egy-egy k közvetítőponthoz tartozó \underline{A}^k táblázat értékeinek előállításakor a legutóbb meghatározott \underline{A}^{k-1} táblázat értékeit alapul véve azt kell megvizsgáljunk, hogy az egyes ij ($i \neq k, j \neq k$) viszonylatokhoz tartozó a_{ik}^{k-1} értékek már feltárt kapcsolatokat (útvariánsokat) jelölnek-e ($a_{ik}^{k-1} \neq M$), vagy sem ($a_{ik}^{k-1} = M$), illetve, hogy az eddig feltárt, k -t nem tartalmazó $p[ij]$ útvariáns(ok) vizsgált jellemzői milyen viszonyban állnak az i és j pontok közötti (éppen vizsgált), k -t tartalmazó $p'[ij] = p[ik] + p[kj]$ útvariáns(ok) azonos jellemzőivel. Majd e szerint kell eljárunk. Formálisan ez egy háromváltozós függvény alkalmazását jelenti, melyet $\varphi^k = f(a_{ik}^{k-1}, a_{kj}^{k-1}, a_{ij}^{k-1})$ szimbolikával jelölünk. Esetünkben, a leghosszabb utak feltárásánál $\varphi^k = \max\{a_{ik}^{k-1} + a_{kj}^{k-1}, a_{ij}^{k-1}\}$.

Formálisan összegezve a leghosszabb utak hosszát tartalmazó \underline{A}^k teljes elérési mátrix (tábla) előállítását:

$$\underline{A}^k = \varphi^k(\underline{A}^{k-1}) \quad a_{ij}^k = \begin{cases} \varphi^k(a_{ik}^{k-1}, a_{kj}^{k-1}, a_{ij}^{k-1}) & | a_{ik}^{k-1} \neq M, a_{kj}^{k-1} \neq M, i \neq k, j \neq k \\ a_{ij}^{k-1} & | \text{egyébként} \end{cases} \quad \forall ij$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n$$

Az algoritmus működésének szemléltetésére tekintsük az alábbi gráfot, melyen a létező leghosszabb út megtalálása végett valamennyi csomópont-pár között meghatározzuk a leghosszabb utak hosszát. (A számítások során vizsgált összefüggéseket a gráfon és a struktúratáblán egyidejűleg szemléltetjük. Az induló \underline{A}^0 struktúratáblát a fentieknek megfelelően állíthatjuk elő.)



\underline{A}^0		A	B	C	D	E	F	G
	$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
A	1			2				
B	2	4			3		6	
C	3							
D	4	1					1	
E	5	5		6	4			2
F	6							
G	7				3		5	

Megjegyzés:

- A gráf, illetve a struktúratábla alaposabb szemrevételezése után felismerhető, hogy a gráfon két forrás („B” és „E”), illetve két nyelő („C” és „F”) található.

1. Az „A” csomópontot ($k=1$), mint „közvetítőpontot” vizsgálva megállapítható, hogy:

- „B”-ből (4 egységnyi) út vezet „A”-ba, ugyanakkor „A”-ból (2 egységnyi) út vezet „C”-be, tehát van olyan ($4+2=6$ egységnyi hosszú) út(variáns), mely „B”-ből „A”-n keresztül „C”-be vezet. Egyelőre ez a „B-C” viszonylaton az eddig feltárt egyetlen, egyben leghosszabb út.

$$a_{23}^1 = \max\{a_{21}^0 + a_{13}^0, a_{23}^0\} = \max\{4+2, -\infty\} = 6;$$

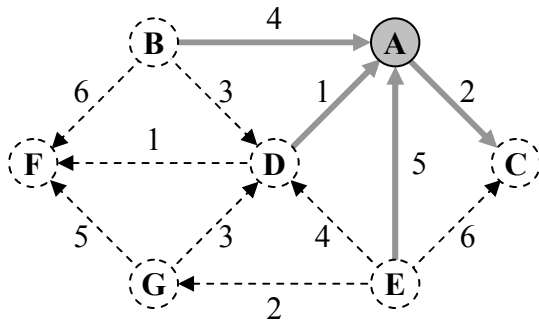
- „D”-ből is (1 egységnyi) út vezet „A”-ba, ugyanakkor „A”-ból (2 egységnyi) út vezet „C”-be, tehát van olyan ($1+2=3$ egységnyi hosszú) út(variáns), mely „D”-ből „A”-n keresztül „C”-be vezet. Egyelőre ez a „D-C” viszonylaton az eddig feltárt egyetlen, egyben leghosszabb út.

$$a_{43}^1 = \max \{a_{41}^0 + a_{13}^0, a_{43}^0\} = \max \{1+2, -\infty\} = 3;$$

- „E”-ből (5 egységnyi) út vezet „A”-ba, ugyanakkor „A”-ból (2 egységnyi) út vezet „C”-be, tehát van olyan (5+2=7 egységnyi hosszú) út(variáns), mely „E”-ből „A”-n keresztül „C”-be vezet, sőt ez az út(variáns) hosszabb, mint az eddig feltárt (esetünkben egyetlen élből álló) 6 egységnyi hosszú út.

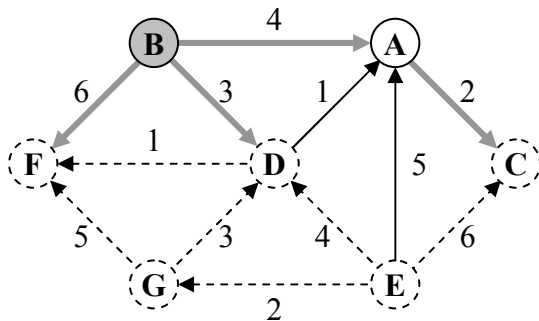
$$a_{53}^1 = \max \{a_{51}^0 + a_{13}^0, a_{53}^0\} = \max \{5+2, 6\} = 7;$$

Ezek szerint módosítjuk a táblázatot. ...



\underline{A}^1		A	B	C	D	E	F	G
	$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
A	1	k		2				
B	2	4		6	3		6	
C	3							
D	4	1		3			1	
E	5	5		7	4			2
F	6							
G	7				3		5	

2. A „B” csomópontot (k=2), mint „közvetítőpontot” vizsgálva megállapítható, hogy a „B” pontból ugyan út vezet „A”, „C”, „D” és „F” pontokba is, de „B” pontba máshonnan út nem vezet (forrás). Így „B” pont, mint „közvetítőpont” a gráf semelyik két csomópontja között nem fedett fel újabb utakat, illetve útvariánsokat ($\underline{A}^2 = \underline{A}^1$).



\underline{A}^2		A	B	C	D	E	F	G
	$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
A	1			2				
B	2	4	k	6	3		6	
C	3							
D	4	1		3			1	
E	5	5		7	4			2
F	6							
G	7				3		5	

3. A „C” csomópontot (k=3), mint „közvetítőpontot” vizsgálva megállapítható, hogy a „C” pontba ugyan út vezet „A”, „B”, „D” és „E” pontokból is, de „C” pontból máshova út nem vezet (nyelő). Így a „C” pont, mint „közvetítőpont” a gráf semelyik két csomópontja között nem fedett fel újabb utakat, illetve útvariánsokat ($\underline{A}^3 = \underline{A}^2$).

(A gráf és a táblázat megmutatásától – a változatlanóság okán – itt eltekintünk.)

4. A „D” csomópontot (k=4), mint „közvetítőpontot” vizsgálva megállapítható, hogy:

- „B”-ből (3 egységnyi) út vezet „D”-be, ...
- = „D”-ből (1 egységnyi) út vezet „A”-ba, tehát van olyan (3+1=4 egységnyi hosszú) út(variáns), mely „B”-ből „D”-n keresztül „A”-ba vezet. Ez azonban nem hosszabb, mint a „B-A” viszonylaton eddig feltárt, avagy egyetlen élből álló út.

$$a_{21}^4 = \max \{a_{24}^3 + a_{41}^3, a_{21}^3\} = \max \{3+1, 4\} = 4;$$

= „D”-ből viszont (3 egységnyi) út vezet „C”-be is, ami azt jelenti, hogy van olyan (3+3=6 egységnyi) út, mely „B”-ből „D”-n keresztül „C”-be vezet. Ez azonban szintén nem hosszabb, mint a „B-C” viszonylaton eddig feltárt, avagy egyetlen élből álló út.

$$a_{23}^4 = \max\{a_{24}^3 + a_{43}^3, a_{23}^3\} = \max\{3+3, 6\} = 6;$$

= „D”-ből úgyszint (1 egységnyi) út vezet „F”-be, vagyis van olyan (3+1=4 egységnyi hosszú) út, mely „B”-ből „D”-n keresztül „F”-be vezet, ami azonban nem hosszabb, mint az „E-C” viszonylaton eddig feltárt, avagy egyetlen élből álló (6 egységnyi) út.

$$a_{26}^4 = \max\{a_{24}^3 + a_{46}^3, a_{26}^3\} = \max\{3+1, 6\} = 6;$$

– „E”-ből is vezet (4 egységnyi) út „D”-be, ...

= „D”-ből (1 egységnyi) út vezet „A”-ba, tehát van olyan (4+1=5 egységnyi hosszú) út (variáns), mely „E”-ből „D”-n keresztül „A”-ba vezet. Ez azonban nem hosszabb, mint az „E-A” viszonylaton eddig feltárt, avagy egyetlen élből álló út.

$$a_{51}^4 = \max\{a_{54}^3 + a_{41}^3, a_{51}^3\} = \max\{4+1, 5\} = 5;$$

= „D”-ből viszont (3 egységnyi) út vezet „C”-be is, ami azt jelenti, hogy van olyan (4+3=7 egységnyi) út, mely „E”-ből „D”-n keresztül „C”-be vezet. Ez azonban szintén nem hosszabb, mint az „E-C” viszonylaton eddig feltárt, avagy egyetlen élből álló út.

$$a_{53}^4 = \max\{a_{54}^3 + a_{43}^3, a_{53}^3\} = \max\{4+3, 7\} = 7;$$

= „D”-ből viszont (1 egységnyi) út vezet „F”-be is, ami azt jelenti, hogy van olyan (4+1=5 egységnyi) út, mely „E”-ből „D”-n keresztül „F”-be vezet. Egyelőre ez az „E-F” viszonylaton az eddig feltárt egyetlen, egyben leghosszabb út.

$$a_{56}^4 = \max\{a_{54}^3 + a_{46}^3, a_{56}^3\} = \max\{4+1, -\infty\} = 5;$$

– „G”-ből is vezet (3 egységnyi) út „D”-be, ...

= „D”-ből (1 egységnyi) út vezet „A”-ba, tehát van olyan (3+1=4 egységnyi hosszú) út (variáns), mely „G”-ből „D”-n keresztül „A”-ba vezet. Egyelőre ez a „G-A” viszonylaton az eddig feltárt egyetlen, egyben leghosszabb út.

$$a_{71}^4 = \max\{a_{74}^3 + a_{41}^3, a_{71}^3\} = \max\{3+1, -\infty\} = 4;$$

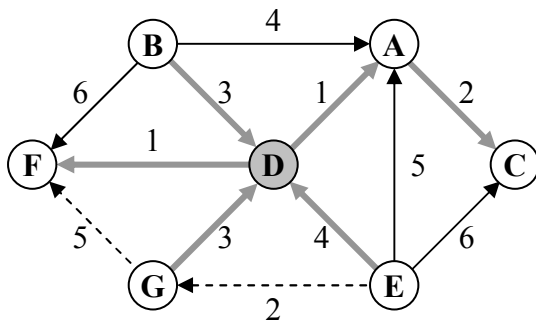
= „D”-ből viszont (3 egységnyi) út vezet „C”-be is, ami azt jelenti, hogy van olyan (3+3=6 egységnyi) út, mely „G”-ből „D”-n keresztül „C”-be vezet. Egyelőre ez a „G-C” viszonylaton az eddig feltárt egyetlen, egyben leghosszabb út.

$$a_{73}^4 = \max\{a_{74}^3 + a_{43}^3, a_{73}^3\} = \max\{3+3, -\infty\} = 6;$$

= „D”-ből továbbá (1 egységnyi) út vezet „F”-be is, tehát van olyan (3+1=4 egységnyi hosszú) út, mely „G”-ből „D”-n keresztül „F”-be vezet, ami azonban nem hosszabb, mint a „G-F” viszonylaton eddig feltárt, avagy egyetlen élből álló (5 egységnyi) út.

$$a_{76}^4 = \max\{a_{74}^3 + a_{46}^3, a_{76}^3\} = \max\{3+1, 5\} = 5;$$

Ezek szerint módosítjuk a táblázatot. ...



\underline{A}^4		A	B	C	D	E	F	G
$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	
A	1			2				
B	2	4		6	3		6	
C	3							
D	4	1		3	k		1	
E	5	5		7	4		5	2
F	6							
G	7	4		6	3		5	

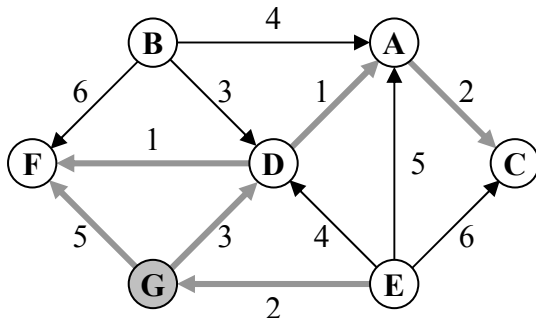
5-6. „E” (k=5) és „F” (k=6) csomópontok, mint közvetítőpontok nem fednek fel újabb kapcsolatot, hiszen „E”-be sehonnan-, „F”-ből pedig sehová nem vezet út (forrás, illetve nyelő). ($\underline{A}^6 = \underline{A}^5 = \underline{A}^4$)

(A gráf és a táblázat megmutatásától – a változatlanóság okán – ezen esetekben is eltekintünk.)

7. A „G” csomópontot (k=7), mint „közvetítőpontot” vizsgálva megállapítható, hogy:

- „E”-ből (2 egységnyi) út vezet „G”-be, ...
- = „G”-ből (4 egységnyi) út vezet „A”-ba, tehát van olyan (2+4=6 egységnyi hosszú) út(variáns), mely „E”-ből „G”-n keresztül „A”-ba vezet, sőt ez az út(variáns) hosszabb, mint az „E-A” viszonylaton eddig feltárt 5 egységnyi hosszú út(ak).
 $a_{51}^7 = \max \{a_{57}^6 + a_{71}^6, a_{51}^6\} = \max \{2+4, 5\} = 6;$
- = „G”-ből viszont (6 egységnyi) út vezet „C”-be is, ami azt jelenti, hogy van olyan (2+6=8 egységnyi) út, mely „E”-ből „G”-n keresztül „C”-be vezet, sőt ez az út(variáns) hosszabb, mint az „E-C” viszonylaton eddig feltárt 7 egységnyi hosszú út(ak).
 $a_{53}^7 = \max \{a_{57}^6 + a_{73}^6, a_{53}^6\} = \max \{2+6, 7\} = 8;$
- = „G”-ből úgyszint (3 egységnyi) út vezet „D”-be is, miszerint van olyan (2+3=5 egységnyi) út, mely „E”-ből „G”-n keresztül „D”-be vezet, ami ráadásul hosszabb, mint az „E-D” viszonylaton eddig feltárt 4 egységnyi hosszú út(ak).
 $a_{54}^7 = \max \{a_{57}^6 + a_{74}^6, a_{54}^6\} = \max \{2+3, 4\} = 5;$
- = Végül „G”-ből (5 egységnyi) út vezet „F”-be is, azaz van olyan (2+5=7 egységnyi) út, mely „E”-ből „G”-n keresztül „F”-be vezet, ami viszont hosszabb, mint az „E-F” viszonylaton eddig feltárt 5 egységnyi hosszú út.
 $a_{56}^7 = \max \{a_{57}^6 + a_{76}^6, a_{56}^6\} = \max \{2+5, 5\} = 7;$

Ezek szerint módosítjuk a táblázatot. ...



\underline{A}^7		A	B	C	D	E	F	G
	$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
A	1			2				
B	2	4		6	3		6	
C	3							
D	4	1		3			1	
E	5	56		78	45		57	2
F	6							
G	7	4		6	3		5	k

Ezzel az adott gráfhoz tartozó, valamennyi csomópont között a leghosszabb utak hosszát tartalmazó „teljes elérési tábla” ($\underline{A}^n = \underline{A}^7$) meghatározását befejeztük. ...

Megjegyzés:

- Ha a „teljes elérési tábla” átlójában a megkülönböztető „marker” értéktől eltérő ($a_{ii} \neq M$) érték szerepel, az azt jelenti, hogy a gráfon hurok van. Ez egyben azt is jelzi, hogy az adott feladatnak van-e egyáltalán megoldása. A leghosszabb út keresési feladatnál az átlóban pozitív érték-, leg-
rövidebb út keresési feladatnál pedig negatív érték nem szerepelhet. Ha mégis, akkor az ismert-
tett algoritmus egy célszerűen módosított változatának segítségével a hurkon lévő élek és cso-
mópontok is beazonosíthatók, és a szükséges hibaelhárítási intézkedések megtehetőek. (Bővebben
lásd: következő fejezetet záró gyakorló feladatoknál.)

A leghosszabb út éleinek beazonosítása

A leghosszabb utak hosszait tartalmazó (\underline{A}^n) teljes elérési táblából kiolvasható, hogy a gráfon valamennyi létező út közül a leghosszabb az „E” és a „C” pontok között található, és hossza 8 egység. De mely éleket tartalmazza ez az út? Ezek beazonosítása a kiindulási („közvetlen”, \underline{A}^0) és az eredményül kapott, utolsó („közvetett”, \underline{A}^n) struktúratábla együttesével lehetséges.

A mellékelt táblázatban együtt tüntettük fel az \underline{A}^0 (kis számok a cellák jobb felső sarkában) és az \underline{A}^7 (nagy számok a cellákban) táblázatok (mátrixok) elemeit.

Bármely $P[ij]$ („leghosszabb”) útnak az első éle a két táblázat segítségével egyszerűen beazonosítható, hiszen csak olyan, az i pontból kiinduló ik élt kell keresnünk, melynek hossza megegyezik a $P[ij]$ és a $P[kj]$ („leghosszabb”) utak hosszának a különbségével, azaz $a_{ik}^0 = a_{ij}^n - a_{kj}^n$.

(Ha több ilyen ik élt is találunk, akkor az – értelemszerűen – alternatív leghosszabb utakat jelez az ij viszonylaton.)

Következő lépésben a maradék „leghosszabb” út(-szakasz), $P[kj]$ első élt kell beazonosítanunk, és így tovább. ...

		\underline{A}^0						
		A	B	C	D	E	F	G
i \ j	1							
	2							
3								
4								
5								
6								
7								
A	1			2 ²				
B	2	4 ⁴		6	3 ³		6 ⁶	
C	3							
D	4	1 ¹		3			1 ¹	
E	5	6 ⁵		8 ⁶	5 ⁴		7	
F	6							
G	7	4		6	3 ³		5 ⁵	

Értelemszerűen – utolsóként – ugyancsak része lesz leghosszabb útnak az a j pontba mutató kj él is, melynek hossza megegyezik az éppen vizsgált „leghosszabb” $P[kj]$ út(-szakasz) hosszával $a_{kj}^0 = a_{kj}^n$.

Fentieket kis példánkra alkalmazva:

- Az „E” ($i=5$) pontból a „C” ($j=3$) pont felé haladva: $a_{57}^0 = 2 = a_{53}^7 - a_{73}^7 = 8 - 6$, tehát az a_{57}^0 érték által reprezentált, 2 egységnyi hosszú „E-G” él része a keresett leghosszabb útnak;
- Most már a „G” ($i=7$) pontból a „C” ($j=3$) pont felé haladva: $a_{74}^0 = 3 = a_{73}^7 - a_{43}^7 = 6 - 3$, tehát az a_{74}^0 érték által reprezentált, 3 egységnyi hosszú „G-D” él is része a keresett leghosszabb útnak;
- A „D” ($i=4$) pontból „C” ($j=3$) pont felé tovább haladva: $a_{41}^0 = 1 = a_{43}^7 - a_{13}^7 = 3 - 2$, tehát az 1 egységnyi hosszú „D-A” él is része a keresett leghosszabb útnak;
- Az „A” ($i=1$) pontból tovább haladva a „C” pont felé viszont már utolsó élként azonosíthatjuk be a 2 egységnyi hosszú „A-C” élt is, hiszen: $a_{13}^0 = 2 = a_{13}^7 = 2$.

Fenti gondolatmenettel bármely két csomópont között a leghosszabb útvariáns(ok) élei beazonosíthatók. ...

Fogalmi pontosítások

A gráf-összetevők szabatosabb jellemzése végett és majdan az időmodell „általánosítását” előkészítendő – de legfőképpen az élek súlyszámaira vonatkozó korlátok feloldására való tekintettel – célszerű bevezetni néhány fogalmi pontosítást. Így:

- **Pozitív forrás** a gráf azon csomópontja, mely legalább egy nem-negatív súlyszámú (él-paraméterű) élnek kiindulópontja, de egyetlen nem-negatív súlyszámú (él-paraméterű) élnek sem végpontja.
- **Pozitív nyelő** a gráf azon csomópontja, mely legalább egy nem-negatív súlyszámú (él-paraméterű) élnek végpontja, de egyetlen nem-negatív súlyszámú (él-paraméterű) élnek sem kiindulópontja.
- A gráfon esetlegesen fellelhető hurkok vonatkozásában a hurokalkotó élek súlyszámainak összege, azaz a „hurokhossz” alapján megkülönböztethető „**pozitív hurok**”, „**negatív hurok**”, illetve „**null-hurok**”.

Fenti fogalmi pontosítások után az alábbiak deklarálhatók:

- A súlyozott gráfra, mint időmodellre vonatkozó egyetlen – a (leghosszabb út keresési) feladat megoldhatósága szempontjából – szükséges és elégséges megszorítás, hogy az pozitív hurkot nem tartalmazhat. (Vesd össze a hálózat definíciójával!)
- A fenti tulajdonsággal bíró gráfon, amennyiben legalább egy nem-negatív súlyszámú (él-paraméterű) él létezik, úgy a leghosszabb út első-, és utolsó éle negatív súlyszámú (él-paraméterű) él nem lehet²².
- Fenti megállapításból következően: Súlyozott, pozitív hurkot nem tartalmazó, de legalább egy nem-negatív súlyszámú (él-paraméterű) éllel bíró gráfon²³ a leghosszabb út(ak) a pozitív forrás(ok) és pozitív nyelő(k) között keresendő(k).

Fentiek szellemében a hálós időmodellekkel szemben azt a kikötést tesszük, hogy annak gráf-reprezentánsán pozitív hurok nem lehet, illetve, hogy azon legalább egy nem-negatív súlyszámmal (él-paraméterrel) bíró élnek lennie kell. Ez esetben „**kritikus út**” alatt – definíciószerűen – a pozitív forrás(ok) és pozitív nyelő(k) közötti leghosszabb út(ak) alkotta részgráfot értjük.

Az időpotenciálok kiosztása

A minimális- és maximális időpotenciálok „kiosztásához” használható algoritmus ismertetéséhez részben felidézzük – az előző fejezetekben már bevezetett – jelöléseket:

- s : pozitív források halmaza (start)
- t : pozitív nyelők halmaza (terminal)
- π_j : „ j ” ponthoz rendelhető minimális időpotenciál (legkorábbi relatív időpont)
- π_i' : „ i ” ponthoz rendelhető maximális időpotenciál (legkésőbbi időpont)
- π_{si} : a pozitív források halmazában lévő „ i ” ponthoz rendelhető „kezdő” időpotenciál
- π_{tj}' : a pozitív nyelők halmazában lévő „ j ” ponthoz rendelhető „záró” időpotenciál
- Π : a háló teljes átfutási ideje ($\Pi = \max_j \{\pi_j\}$)
- a_{ij}^n : a teljes elérési tábla ij eleme (i és j pontok közötti „leghosszabb út” hossza)

²² Ellenkező esetben, ha a „vélt leghosszabb út” elejéről-, avagy végéről elhagyjuk a negatív súlyszámú (él-paraméterű) él(ek)et, akkor a maradék él(ek) súlyszámainak összege, azaz a maradék él-láncolat hossza a „vélt leghosszabb út” hosszánál nagyobb érték lesz. Azaz nem a „vélt leghosszabb út” a leghosszabb.

²³ Éberebb egyetemi hallgatók az előadásokon előszeretettel „kötözködnek” az azt respektáló előadókkal. Az ő kedvükért: Ha egy gráfon nem-negatív súlyszámú (él-paraméterű) él nem található, úgy a „leghosszabb út” egyetlen olyan élből áll, melynek súlyszáma (él-paramétere) abszolút értékét tekintve a legkisebb. (Ezt az esetet azonban – mivel időmodellezésnél nem tipikus – a továbbiakban figyelmen kívül hagyjuk.)

Az egyes csomópontokhoz rendelhető „minimális” és „maximális” időpotenciálok meghatározásának a leghosszabb út(ak) (\underline{A}^n) ismeretére alapuló lépései:

Első lépésben a pozitív forrásoknál egységesen „0” „kezdő” időpotenciált feltételezünk.

$$\pi_{si}=0 \mid i \in s$$

Az egyes csomópontokhoz rendelhető legkisebb időpotenciál a teljes elérési táblából közvetlenül kiolvasható, miszerint a minimális időpotenciál az adott csomóponthoz a pozitív forrásokból vezető leghosszabb utak hosszai közül a legnagyobb érték lesz.

$$\pi_j = \max_i \{a_{ij}^n\} \mid i \in s; j=1,2,\dots,n$$

A háló teljes átfutási ideje ezek közül a legnagyobb érték lesz.

$$\Pi = \max_j \{\pi_j\} = \max_{ij} \{a_{ij}^n\}$$

A maximális időpotenciálok meghatározását attól függően, hogy az időmodellt „zárt” (tradicionalis megközelítés), avagy „nyitott” hálóként kezeljük-e²⁴, a pozitív nyelőkhöz rendelhető „záró” (maximális) időpotenciálok meghatározásával folytatjuk:

$$\text{„Zárt” hálónál}^{25}: \quad \pi_{tj}' = \Pi \mid j \in t,$$

$$\text{„Nyitott” hálónál}^{26}: \quad \pi_{tj}' = \pi_j \mid j \in t.$$

A csomópontokhoz rendelhető maximális időpotenciálok a pozitív nyelőkhöz rendelt „záró” (maximális) időpotenciálok és a teljes elérési tábla értékeinek különbségei alapján meghatározhatók:

$$\pi_i' = \min_j \{\pi_{tj}' - a_{ij}^n\} \quad j \in t; i=1,2,\dots,n$$

„Nyitott” háló esetén az időpotenciálok meghatározása a csomópontokhoz rendelhető minimális időpotenciálok korrekciójával zárul, miszerint a pozitív forrásokhoz rendelhető „kezdő” (minimális) időpotenciál értékét saját maximális időpotenciál értékén rögzítjük²⁷...

$$\pi_{si} = \pi_{si}' \mid i \in s$$

...és a csomópontokhoz rendelhető minimális időpotenciálokat ezen „eltolt”/„késleltetett” pozitív forrásoktól vezető leghosszabb utak figyelembevételével ismételten megállapítjuk²⁸.

$$\pi_j = \max_i \{\pi_{si} + a_{ij}^n\} \quad i \in s; j=1,2,\dots,n$$

²⁴ Emlékeztetőül: „zártak” tekintünk egy hálós időmodellt, ha egyetlen (pozitív) forrással és egyetlen (pozitív) nyelővel rendelkezik, míg ellenkező esetben „nyitott” hálóról beszélünk.

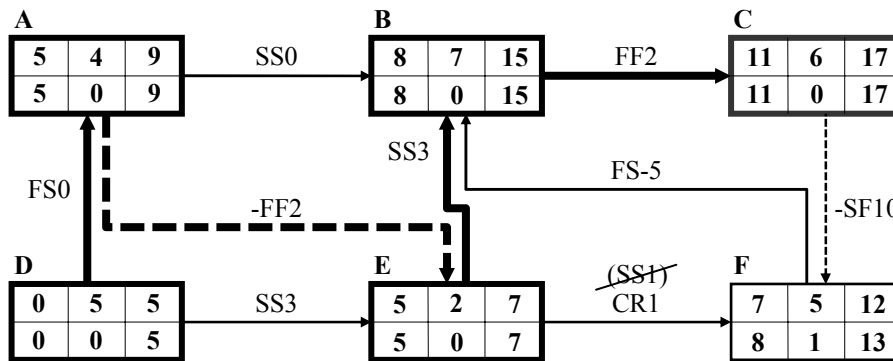
²⁵ Zárt hálónál a pozitív nyelőkhöz maximális („záró”) időpotenciálként a háló teljes átfutási idejét rendeljük.

²⁶ Nyitott hálónál a pozitív nyelőkhöz maximális („záró”) időpotenciálként saját minimális („legkorábbi”) időpotenciáljukat rendeljük. Ilyenkor tulajdonképpen nem értelmezzük („elimináljuk”) a tartalékidőket a pozitív nyelőknél.

²⁷ Ilyenkor gyakorlatilag a pozitív forrásoknál is „elimináljuk” (eltüntetjük, elveszük) az esetleges tartalékidőket.

²⁸ Valamennyi pozitív forrásnál és valamennyi pozitív nyelőnél az esetleges tartalékidők eliminálásával gyakorlatilag mintegy „megfeszítjük” a hálót, amihez modell-filozófiai érveként az szolgálhat, hogy „zárt” hálók esetén is az időelemzés során a „forrás” és a „nyelő” közötti „leghosszabb út legrövidebb állapotát” keressük. Nyitott hálónál pedig ebből a szempontból semelyik (pozitív) forrás-nyelő párt nem különböztetjük meg. ...

A fenti algoritmus szemléltetésére felidézzük az MPM/PDM időmodellnél bemutatott időelemzési feladatot, illetve annak eredményét.



Az alábbiakban – összevetés végett – megmutatjuk az említett hálós modell súlyozott struktúratábláját (\underline{A}^0) és a valamennyi csomópont között a leghosszabb utak hosszait tartalmazó teljes elérési tábláját ($\underline{A}^n = \underline{A}^{12}$). A csomópontok azonosításánál „1” indexszel a tevékenységek kezdésére és „2” indexszel a tevékenységek befejezésére utalunk. A teljes elérési tábla átlójában szereplő értékeket tanulmányozva szembevetünk, hogy valamennyi rögzített idejű tevékenység kezdési- és befejezési csomópontja „0” hosszú hurkon van, melyet az időtartamok alsó-felső korlátjai alkotnak.

A teljes elérési tábla bal oldalán, illetve a tábla felett tüntettük fel a pozitív forrásokhoz rendelhető „kezdő-” (legkorábbi-) (π_{si}), illetve a pozitív nyelőkhöz rendelhető „záró-” (legkésőbbi) (π_{tj}) időpotenciálokat (zárójelben a nyitott háló esetén érvényes értékekkel). A táblázat alatt, illetve jobb oldalon tüntettük fel az egyes csomópontokhoz rendelhető legkorábbi- (π_j), illetve legkésőbbi (π_j') időpotenciálokat (ugyancsak zárójelben a nyitott háló esetén érvényes értékekkel). Az eredményekből az is látszik, hogy esetünkben a legkorábbi időpotenciálok tekintetében a zárt-, illetve nyitott hálóra vonatkozó számítások eredményeiben nincsen különbség. ...

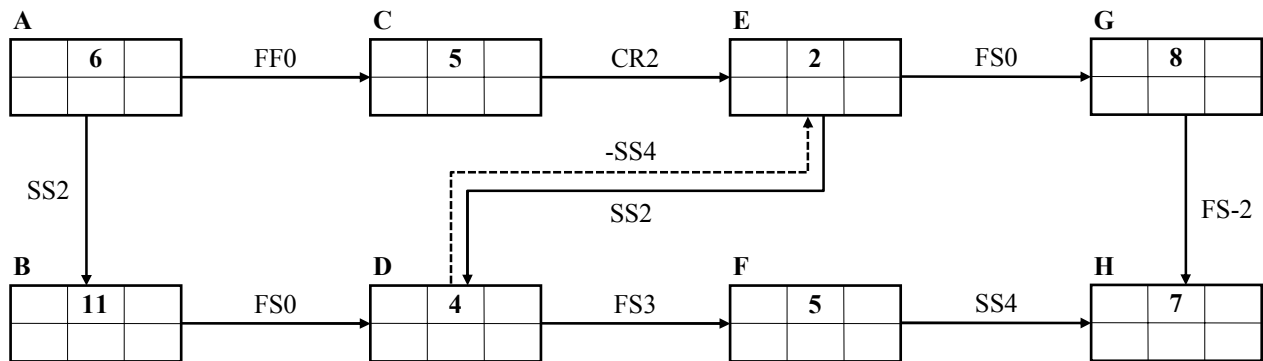
\underline{A}^0	A ₁	A ₂	B ₁	B ₂	C ₁	C ₂	D ₁	D ₂	E ₁	E ₂	F ₁	F ₂
A ₁		4	0									
A ₂	-4									-2		
B ₁				7								
B ₂			-7			2						
C ₁						6						
C ₂					-6						-10	
D ₁								5	3			
D ₂	0						-5					
E ₁			3							2	1	
E ₂									-2			1
F ₁												5
F ₂			-5									-5

π_{si}	\underline{A}^{12}	A ₁	A ₂	B ₁	B ₂	C ₁	C ₂	D ₁	D ₂	E ₁	E ₂	F ₁	F ₂	π_j'
		0	4	3	10	6	12			0	2	2	7	5
		-4	0	-1	6	2	8			-4	-2	-2	3	9
				0	7	3	9						-1	4
					-7	0	-4	2					-8	-3
(11)0					-4	3	0	6					-4	1
					-10	-3	-6	0					-10	-5
0		5	9	8	15	11	17	0	5	5	7	7	12	0
		0	4	3	10	6	12	-5	0	0	2	2	7	5
				3	10	6	12			0	2	2	7	5
				1	8	4	10			-2	0	0	5	7
				0	7	3	9					0	5	8(7)
				-5	2	-2	4					-5	0	13(12)
		π_j	5	9	8	15	11	17	0	5	5	7	7	12

Gyakorló feladat:

J.1 A közvetítő pontok módszerével határozza meg az alábbi (az MPM/PDM modellt tárgyaló fejezet I.3 gyakorló feladatánál már bemutatott) hálós időmodell (korábbiakban az MPM háló „röntgenképeként” aposztrofált) „általános súlyozott DiGráf átíratán” a leghosszabb út hosszát! Azonosítsa be a leghosszabb út éleit és „zár”, majd „nyitott” hálóként határozza meg a csomópontokhoz rendelhető „minimális” és maximális idő-potenciálokat! Megoldását vesse össze az I.3 feladat megoldásával!

P

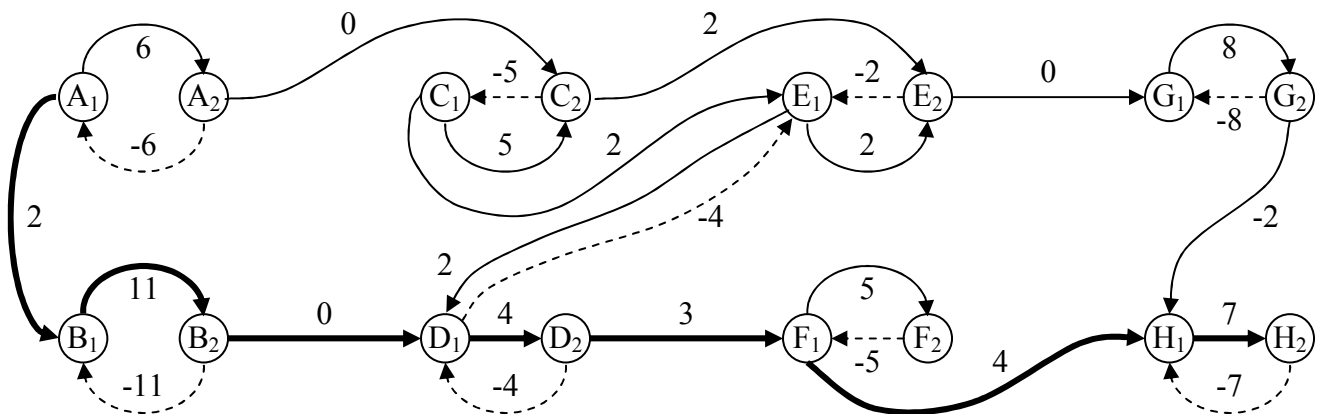
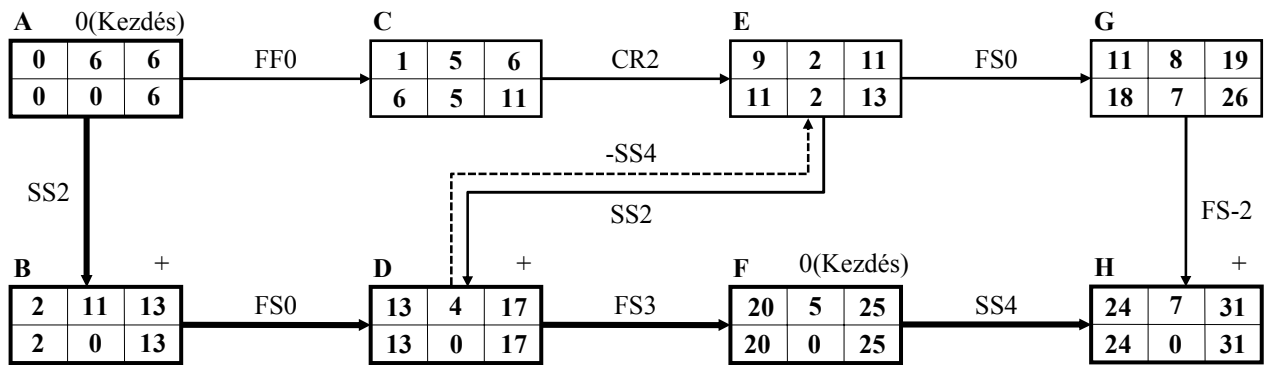


Feladat megoldás

J.1 A megoldás ellenőrzéséhez az alábbiakban megmutatjuk a gráf \underline{A}^0 struktúramátrixát (szürke színnel kiemelve a pozitív források oszlopát, illetve a pozitív nyelők sorát), \underline{A}^{16} teljes elérési tábláját (az időpotenciálokkal, ahol * jelöli a nyitott hálóként meghatározott értékeket), valamint az időelemzett MPM hálót, illetve az MPM háló DiGráf átíratát.

\underline{A}^0	A ₁	A ₂	B ₁	B ₂	C ₁	C ₂	D ₁	D ₂	E ₁	E ₂	F ₁	F ₂	G ₁	G ₂	H ₁	H ₂
A ₁		6	2													
A ₂	-6					0										
B ₁				11												
B ₂			-11				0									
C ₁						5		2								
C ₂					-5				2							
D ₁								4	-4							
D ₂							-4			3						
E ₁							2			2						
E ₂									-2			0				
F ₁												5			4	
F ₂											-5					
G ₁														8		
G ₂													-8		-2	
H ₁																7
H ₂															-7	

		π_{ij}^*																				
																		25	19	31		
π_{si}^*	\underline{A}^{16}	A ₁	A ₂	B ₁	B ₂	C ₁	C ₂	D ₁	D ₂	E ₁	E ₂	F ₁	F ₂	G ₁	G ₂	H ₁	H ₂	π_i'	π_i^*			
0	A ₁	0	6	2	13	1	6	13	17	9	11	20	25	11	19	24	31	0	0			
	A ₂	-6	0	-4	7	-5	0	7	11	3	5	14	19	5	13	18	25	6	6			
	B ₁			0	11			11	15	7	9	18	23	9	17	22	29	2	2			
	B ₂			-11	0			0	4	-4	-2	7	12	-2	6	11	18	13	13			
4	C ₁					0	5	7	11	5	7	14	19	7	15	18	25	6	4			
	C ₂					-5	0	2	6	0	2	9	14	2	10	13	20	11	9			
	D ₁							0	4	-4	-2	7	12	-2	6	11	18	13	13			
	D ₂							-4	0	-8	-6	3	8	-6	2	7	14	17	17			
	E ₁							2	6	0	2	9	14	2	10	13	20	11	9			
	E ₂							0	4	-2	0	7	12	0	8	11	18	13	11			
	F ₁											0	5			4	11	20	20			
	F ₂											-5	0			-1	6	25	25			
	G ₁													0	8	6	13	18	11			
	G ₂													-8	0	-2	5	26	19			
	H ₁															0	7	24	24			
	H ₂															-7	0	31	31			
	π_j	0	6	2	13	1	6	13	17	9	11	20	25	11	19	24	31					
	π_j^*	0	6	2	13	4	9	13	17	9	11	20	25	11	19	24	31					



K – FLOYD-WARSHALL

Egy gráfon valamennyi pontpár között utak létének kimutatását-, illetve valamennyi csomópont között a legrövidebb utak hosszának meghatározását célzó számítógépes algoritmust (egy egyszerű belső mag köré szervezett, egymásba ágyazott hármass ciklus formájában) Warshall (1962(59)), majd Floyd (1962) publikált. Utóbbit az operációkutatási szakirodalom Floyd-Warshall algoritmus néven referálja. Algoritmusai Delphi/Pascal nyelven az alábbiak szerint összegezhetők:

Floyd-Warshall algoritmus (Valamennyi pontpár között a legrövidebb utak meghatározása):

```

var
    n : integer;           { változók deklarálása }
    i,j,k : integer;      { csomópontok száma a gráfon }
    D: array [1..n,1..n] of integer; { csomópont/sor/oszlop futó indexek, ciklusváltozók }
    P: array [1..n,1..n] of integer; { „távolság” mátrix (a gráf „elérési táblája”) }
                                { „címke” mátrix a keresett út(ak) visszafejtéséhez }

Procedure Initialization; { kiindulási mátrix („közvetlen elérési tábla”) előállítás }
begin
    for i:=1 to n do
        for j:=1 to n do
            begin
                D[i,j]:=Wij;
                P[i,j]:=0 { alternatív címkézés: P[i,j]:=i }
            end
        end
    end;

Procedure Calculating_Distances; { a „távolságmátrix” („teljes elérési tábla”) előállítás }
begin
    for k:=1 to n do { külső ciklus – „közvetítőpont választás” }
        for i:=1 to n do { belső ciklusok – táblázatbeli értékek számítása }
            for j:=1 to n do
                if D[i,k]+D[k,j]<D[i,j] then begin { belső mag – az {i..k..j} útvariáns ellenőrzése }
                    D[i,j]:=D[i,k]+D[k,j]; { – módosítás, ha szükséges }
                    P[i,j]:=k { – címkézés (itt k regisztrálása) módosításkor }
                                { – alternatív címkézés: P[i,j]:=P[k,j] }
                end
            end
        end
    end;

```

A kiindulási mátrix előállításánál „ M ” a nem létező közvetlen kapcsolatot, illetve a még fel nem tárt közvetett kapcsolatot jelző, célszerűen megválasztott „megkülönböztető-”, avagy „marker” értéket jelöli (Floyd-nál $M=„+\infty”$), míg „ W_{ij} ” az ij él súly-paramétere („hossza”, „ τ_{ij} ”) a gráfon. Nem létező élnél $W_{ij}=M$.

Az algoritmus lefutása után a „ D ” mátrix valamennyi pontpár között a legrövidebb utak hosszát tartalmazza. A „ P ” („címke”, avagy „mutató”, „pointer”) mátrix bármely pontpár között a legrövidebb utak visszafejtését teszi lehetővé. A „ D ” mátrix átlójában található „ M ”-től eltérő érték hurkon lévő csomópontot jelöl. Ez utóbbi esetleges negatív értéke egyben érvényteleníti is az eredményt („a feladatnak nincsen megoldása”).

Valamennyi pontpár között a létező kapcsolatok (utak és hurkok) kimutatását szolgálja Warshall (szintén 1962 –ben publikált) eredetileg halmazelméleti-, illetve boolean algebrai formulákkal közölt algoritmus:

Warshall algoritmus (Valamennyi pontpár között a létező utak, kapcsolatok feltárása):

```

var
    { változók deklarálása }
    n : integer;           { csomópontok száma a gráfon }
    i,j,k : integer;      { csomópont/sor/oszlop futó indexek, ciklusváltozók }
    B: array [1..n,1..n] of boolean; { „adjacencia mátrix” (a gráf boolean „elérési táblája”) }

Procedure Initialization;      { kiindulási mátrix („közvetlen elérési tábla”) előállítás }
begin
    for i:=1 to n do for j:=1 to n do B[i,j]:=Wij
end;

Procedure Checking_Accesses;   { a „teljes elérési tábla” előállítás }
begin
    for k:=1 to n do           { külső ciklus – „közvetítőpont választás” }
        for i:=1 to n do      { belső ciklusok – táblázatbeli értékek számítása }
            for j:=1 to n do
                B[i,j]:=B[i,j] or (B[i,k] and B[k,j])    { ij, vagy ikj „elérés” (út) „felderítése” }
end;

```

A kiindulási mátrix előállításánál W_{ij} ="false" érték a nem létező közvetlen kapcsolatot (élt) jelöli az ij „viszonylaton”, míg a W_{ij} ="true" érték létező élt jelöl. Az algoritmus lefutása után a „B” mátrix valamennyi pontpár között (valamennyi „viszonylaton”) a létező ("true"), illetve nem létező ("false") kapcsolatokat (utakat) jelöli. A „B” mátrix átlójában található "true" érték hurkon lévő csomópontot jelöl, azaz hurok jelenlétét jelzi.

Az összehasonlítás kedvéért ugyancsak megmutatjuk az előző fejezetben tárgyalt „közvetítő pontok módszerének” Pascal, avagy Delphi programnyelvű átíratát:

„Közvetítő pontok (közbülső pontok) módszere”:

```

var
    { változók deklarálása }
    n : integer;           { csomópontok száma a gráfon }
    i,j,k : integer;      { csomópont/sor/oszlop futó indexek, ciklusváltozók }
    A0: array [1..n,1..n] of integer; { „közvetlen elérési mátrix” („paraméteres struktúratábla”) }
    AN: array [1..n,1..n] of integer; { „elérési-”, illetve a majdani „teljes elérési” mátrix }

Procedure Initialization;      { kiindulási tábla („közvetlen elérési mátrix”) előállítás }
begin
    for i:=1 to n do for j:=1 to n do AN[i,j]:=Wij;
    A0:=AN
end;

Procedure Calculating_AllPairsLongest;   { a „teljes elérési tábla” előállítás }
begin
    for k:=1 to n do           { külső ciklus – „közvetítőpont választás” }
        for i:=1 to n do      { belső ciklusok – táblázatbeli értékek számítása }
            if i<>k then for j:=1 to n do
                { soronként, de a k sor, ... }
                if j<>k then
                    { ... illetve a k oszlop kivételével ... }
                    if (AN[i,k]<>M) and (AN[k,j]<>M) then
                        { ... létező {i..k..j} útvariáns esetén: }
                        if AN[i,k]+AN[k,j]>AN[i,j] then
                            { belső mag: összevetés, és ha kell ... }
                            AN[i,j]:=AN[i,k]+AN[k,j]
                            { ... módosítás ..... „ $\varphi^k(a_{ik}^{k-1}, a_{kj}^{k-1}, a_{ij}^{k-1})$ ” }
end;

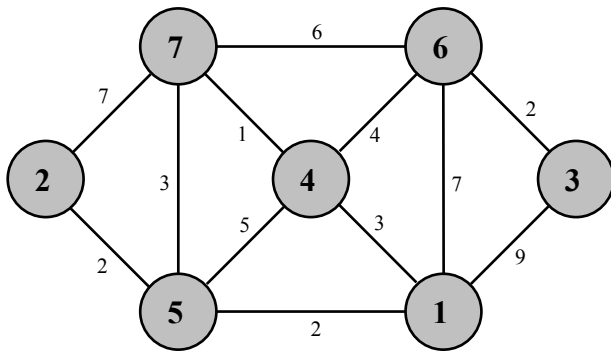
```

A kiindulási mátrix előállításánál „ M ” a nem létező közvetlen kapcsolatot, illetve a még fel nem tárt közvetett kapcsolatot jelző, célszerűen megválasztott „megkülönböztető”, avagy „marker” értéket jelöli (leghosszabb út keresésénél $M=,-\infty$), míg „ W_{ij} ” az ij él súly-paramétere („hossza”, „ τ_{ij} ”) a gráfon. Nem létező élnél $W_{ij}=M$.

Az algoritmus lefutása után az „ AN ” mátrix valamennyi pontpár között a leghosszabb utak hosszát tartalmazza. Az „ $A0$ ” (eredeti paraméteres struktúra) mátrix megőrzése bármely pontpár között a leghosszabb utak felfejtését teszi lehetővé az előző fejezetben ismertetett módon. Az „ AN ” mátrix átlójában található „ M ”-től eltérő érték hurkon lévő csomópontot jelöl. Ez utóbbi esetleges pozitív értéke egyben érvényteleníti is az eredményt („a feladatnak nincsen megoldása”).

A valamennyi pontpár közötti legrövidebb utak (hosszának- és egy-egy variánsának) meghatározását célzó Floyd-Warshall algoritmus működését a következő példával szemléltetjük:

Meghatározandó az alábbi gráf valamennyi pontpárja között a legrövidebb út(ak) hossza!



Δ^0	1	2	3	4	5	6	7
1			9	3	2	7	
2					2		7
3	9					2	
4	3				5	4	1
5	2	2		5			3
6	7		2	4			6
7		7		1	3	6	

A gráf mellett annak $\underline{\Delta}^0$ paraméteres struktúra mátrixa látható, melyben az $M=+\infty$ megkülönböztető értékeket nem tüntettük fel (üres cellák). Az alábbiakban megmutatjuk a k külső ciklusváltozó egyes értékeihez tartozó számítások eredményeit – egy-egy összefogó táblázat formájában. A cellák jobb felső sarkában a \underline{P} mátrix megfelelő értékei láthatók, nem feltüntetve a $p_{ij}=0$ értékeket, míg a nagyobb számok a \underline{D} mátrix aktuális értékeit mutatják, szintén nem feltüntetve a $d_{ij}=+\infty$ értékeket.

$k=1$	1	2	3	4	5	6	7
1			9	3	2	7	
2					2		7
3	9		18^1	12^1	11^1	2	
4	3		12^1	6^1	5	4	1
5	2	2	11^1	5	4^1	9^1	3
6	7		2	4	9^1	14^1	6
7		7		1	3	6	

$k=2$	1	2	3	4	5	6	7
1			9	3	2	7	
2					2		7
3	9		18^1	12^1	11^1	2	
4	3		12^1	6^1	5	4	1
5	2	2	11^1	5	4^1	9^1	3
6	7		2	4	9^1	14^1	6
7		7		1	3	6	14^2

K=3	1	2	3	4	5	6	7
1	18 ³		9	3	2	7	
2					2		7
3	9		18 ¹	12 ¹	11 ¹	2	
4	3		12 ¹	6 ¹	5	4	1
5	2	2	11 ¹	5	4 ¹	9 ¹	3
6	7		2	4	9 ¹	4 ³	6
7		7		1	3	6	14 ²

K=4	1	2	3	4	5	6	7
1	6 ⁴		9	3	2	7	4 ⁴
2					2		7
3	9		18 ¹	12 ¹	11 ¹	2	13 ⁴
4	3		12 ¹	6 ¹	5	4	1
5	2	2	11 ¹	5	4 ¹	9 ¹	3
6	7		2	4	9 ¹	4 ³	5 ⁴
7	4 ⁴	7	13 ⁴	1	3	5 ⁴	2 ⁴

K=5	1	2	3	4	5	6	7
1	4 ⁵	4 ⁵	9	3	2	7	4 ⁴
2	4 ⁵	4 ⁵	13 ⁵	7 ⁵	2	11 ⁵	5 ⁵
3	9	13 ⁵	18 ¹	12 ¹	11 ¹	2	13 ⁴
4	3	7 ⁵	12 ¹	6 ¹	5	4	1
5	2	2	11 ¹	5	4 ¹	9 ¹	3
6	7	11 ⁵	2	4	9 ¹	4 ³	5 ⁴
7	4 ⁴	5 ⁵	13 ⁴	1	3	5 ⁴	2 ⁴

K=6	1	2	3	4	5	6	7
1	4 ⁵	4 ⁵	9	3	2	7	4 ⁴
2	4 ⁵	4 ⁵	13 ⁵	7 ⁵	2	11 ⁵	5 ⁵
3	9	13 ⁵	4 ⁶	6 ⁶	11 ¹	2	7 ⁶
4	3	7 ⁵	6 ⁶	6 ¹	5	4	1
5	2	2	11 ¹	5	4 ¹	9 ¹	3
6	7	11 ⁵	2	4	9 ¹	4 ³	5 ⁴
7	4 ⁴	5 ⁵	7 ⁶	1	3	5 ⁴	2 ⁴

K=7	1	2	3	4	5	6	7
1	4 ⁵	4 ⁵	9	3	2	7	4 ⁴
2	4 ⁵	4 ⁵	12 ⁷	6 ⁷	2	10 ⁷	5 ⁵
3	9	12 ⁷	4 ⁶	6 ⁶	10 ⁷	2	7 ⁶
4	3	6 ⁷	6 ⁶	2 ⁷	4 ⁷	4	1
5	2	2	10 ⁷	4 ⁷	4 ¹	8 ⁷	3
6	7	10 ⁷	2	4	8 ⁷	4 ³	5 ⁴
7	4 ⁴	5 ⁵	7 ⁶	1	3	5 ⁴	2 ⁴

D ^P	1	2	3	4	5	6	7
1	4 ⁵	4 ⁵	9	3	2	7	4 ⁴
2	4 ⁵	4 ⁵	12 ⁷	6 ⁷	2	10 ⁷	5 ⁵
3	9	12 ⁷	4 ⁶	6 ⁶	10 ⁷	2	7 ⁶
4	3	6 ⁷	6 ⁶	2 ⁷	4 ⁷	4	1
5	2	2	10 ⁷	4 ⁷	4 ¹	8 ⁷	3
6	7	10 ⁷	2	4	8 ⁷	4 ³	5 ⁴
7	4 ⁴	5 ⁵	7 ⁶	1	3	5 ⁴	2 ⁴

A fent jobb oldalon látható D^P táblázat az eredményül kapott D és P mátrix értékeit együtt mutatja meg (a p_{ij}=0 értékek feltüntetése nélkül).

Egy-egy pontpár között egy legrövidebb út(variáns) beazonosítása a P címke/mutató mátrix segítségével lehetséges. P mátrix p_{ij} elemei azt mutatják meg, hogy adott két pont, i és j között található legrövidebb út – már ha van ilyen – elsőként (hiszen több is lehet) megtalált útvariánsa egyetlen élből áll-e (p_{ij}=0), vagy többből (p_{ij}≠0). A p_{ij}=k≠0 érték az adott {i..k..j} útvariánsban található „k” közbülső („közvetítő”) pontra mutat. A legrövidebb út feltárása ilyen esetben az {i..k} és {k..j} legrövidebb utak (útszakaszok) vizsgálatával folytatódik, és így tovább, egészen le, az „élek” szintjéig.

E gondolatmenetet nézzük – például – a „2” és „3” számú csomópontok között:

1. $p_{23}=7$;
2. $p_{27}=5$;
3. $p_{25}=0 \rightarrow$ a „2” és „5” számú csomópontok közötti (2 egységnyi hosszú) él része a (legrövidebb) $\{2..3\}$ útvariánsnak;
4. $p_{57}=0 \rightarrow$ az „5” és „7” számú csomópontok közötti (3 egységnyi hosszú) él része a (legrövidebb) $\{2..3\}$ útvariánsnak;
5. $p_{73}=6$;
6. $p_{76}=4$;
7. $p_{74}=0 \rightarrow$ a „7” és „4” számú csomópontok közötti (1 egységnyi hosszú) él része a (legrövidebb) $\{2..3\}$ útvariánsnak;
8. $p_{46}=0 \rightarrow$ a „4” és „6” számú csomópontok közötti (4 egységnyi hosszú) él része a (legrövidebb) $\{2..3\}$ útvariánsnak;
9. $p_{63}=0 \rightarrow$ a „6” és „3” számú csomópontok közötti (2 egységnyi hosszú) él része az összesében $2+3+1+4+2=12$ egységnyi hosszú, $\{2,5,7,4,6,3\}$ „legrövidebb” út(variáns)nak.

Alternatív címkézés esetén az eredményül kapott \underline{P} mátrix p_{ij} eleme az i és j pontok közötti (egy) legrövidebb út utolsó előtti csomópontjára mutat. Ily módon tetszőleges ij „viszonylaton” a (egy) legrövidebb út az utolsó ponttól visszafelé haladva visszafejthető. (A visszafejtés addig folytatódik, míg az „utolsó előtti” pont maga az i pont nem lesz.)

Az alábbi két tábla az alternatív címkézési mód esetén mutatja a kiinduló- ($\underline{D}=\underline{A}^0$), és az eredményül kapott távolság-, illetve címke (\underline{P}) mátrixokat. (A kiinduló táblában az $d_{ij}=+\infty$ megkülönböztető „távolság”-értékeket, illetve a hozzájuk tartozó $p_{ij}=i$ „címke”-értékeket nem tüntettük fel.)

\underline{A}^0	1	2	3	4	5	6	7
1			9 ¹	3 ¹	2 ¹	7 ¹	
2					2 ²		7 ²
3	9 ³					2 ³	
4	3 ⁴				5 ⁴	4 ⁴	1 ⁴
5	2 ⁵	2 ⁵		5 ⁵			3 ⁵
6	7 ⁶		2 ⁶	4 ⁶			6 ⁶
7		7 ⁷		1 ⁷	3 ⁷	6 ⁷	

\underline{D}^P	1	2	3	4	5	6	7	
1		4 ⁵	4 ⁵	9 ¹	3 ¹	2 ¹	7 ¹	4 ⁴
2	4 ⁵		4 ⁵	12 ⁶	6 ⁷	2 ²	10 ⁴	5 ⁵
3	9 ³	12 ⁵		4 ⁶	6 ⁶	10 ⁷	2 ³	7 ⁴
4	3 ⁴	6 ⁵	6 ⁶		2 ⁷	4 ⁷	4 ⁴	1 ⁴
5	2 ⁵	2 ⁵	10 ⁶	4 ⁷		4 ¹	8 ⁴	3 ⁵
6	7 ⁶	10 ⁵	2 ⁶	4 ⁶		8 ⁷	4 ³	5 ⁴
7	4 ⁴	5 ⁵	7 ⁶	1 ⁷	3 ⁷		5 ⁴	2 ⁴

A fenti jobb oldali táblából – például – a 12 egységnyi hosszú „legrövidebb” $\{2..3\}$ út „közbülső” csomópontjai (visszafelé haladva) közvetlenül kiolvashatók:

$$p_{23}=6; \rightarrow p_{26}=4; \rightarrow p_{24}=7; \rightarrow p_{27}=5; \rightarrow p_{25}=2 \mid \implies \{2..3\}=\{2,5,7,4,6,3\}$$

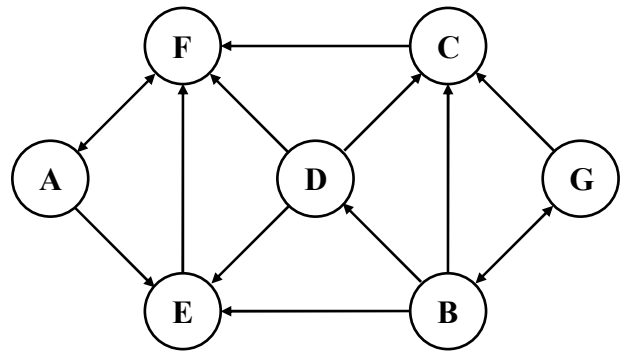
Fenti algoritmusok „szépséghibája”, hogy segítségükkel csak egy „fejthető vissza” az esetlegesen több azonos hosszúságú útvariáns közül, és hogy melyik, az a csomópontok azonosítótól (a vizsgálat sorrendjétől) függ. Ezen állítás igazáról könnyen meggyőződhet az olvasó az „1” és „3” csomópontok közötti legrövidebb utak esetében, hiszen a 9 egységnyi hosszú $\{1,6,3\}$ útvariáns rejtve marad a szintén 9 egységnyi hosszú, (itt) egyetlen élből álló $\{1,3\}$ útvariáns mellett.

Ahhoz, hogy a közbülső pontok („transzitiv lezárás”*) – lásd a fejezet végén) módszerével – és megfelelő „szeparábilis” függvények alkalmazásával – milyen jellemzők állapíthatók meg a gráfokról-, illetve azok segítségével, „kihívásként” adjanak ötletet az itt következő „gyakorló” feladatok. ...

Gyakorló feladatok:

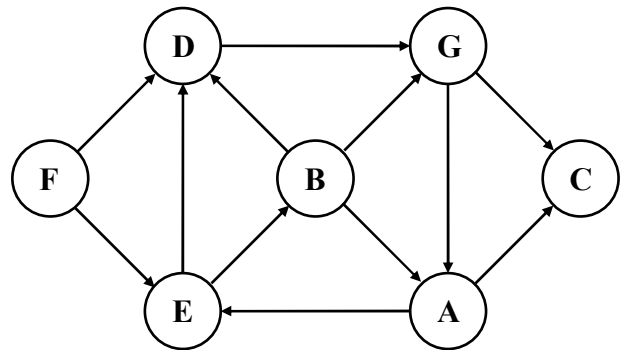
K.1 A mellékelt ábrán látható gráf egy bonyolultabb berendezés „alkatrészeinek” eddigiekben tapasztalt leggyakoribb „meghibásodási hatásláncát” mutatja. A megfelelő, fent bemutatott algoritmus segítségével azonosítsa be az(oka)t az alkatrész(eke)t, mely(ek) meghibásodása

- a teljes berendezés (valamennyi alkatrész) meghibásodásához vezethet;
- bármely alkatrész meghibásodása esetén úgyszintén várható!



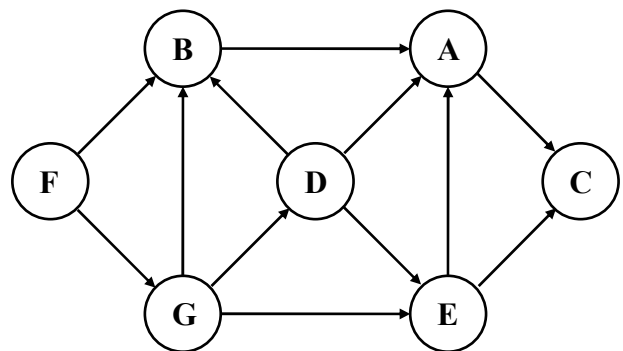
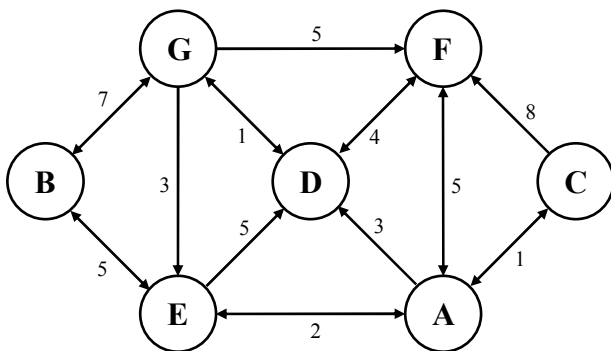
K.2 A fentiekben bemutatottak mintájára készítenő algoritmus segítségével tárja fel az esetleges hurko(ka)t a mellékelt ábrán látható gráfon!

Adjon javaslatot a hur(k)ok felszámolásának „minél hatékonyabb” módjára!



K.3 Elfogadva, hogy az alant, bal oldalon látható gráf egy településközi szállítási hálózat sémáját mutatja a szomszédos települések (gráf csomópontok) közötti szállítások fajlagos ráfordításával (gráf élek és súlyok), a megfelelő, fent bemutatott algoritmusok segítségével

- adjon javaslatot
 - központi elosztó raktár,
 - központi termény-felvásárló hely,
 - katasztrófavédelmi (mentő/tűzoltó/vegyvédelem) bázis,
 - katasztrófavédelmi (árvíz/földrengés/honvédelem) menedék telepítési helyére („településére”)!
- Azonosítsa be a gráf „átlóját” (a gráf valamennyi pontpárja közötti legrövidebb utak közül a leghosszabbat)!



K.4 A fenti, jobb oldalon látható gráf az „F”-ből „C” településbe közlekedő távolsági járatok menetrend szerinti útvonalait mutatja. A fentiekben bemutatottak mintájára készítenő algoritmus segítségével mutassa meg, hogy

- a „G” és „D” települések közötti útrekonstrukció miatti forgalomkorlátozás hány menetrend szerinti útvonalat érint,
- mely két település között közlekedik a legtöbbféle útvonalú „FC” járat!

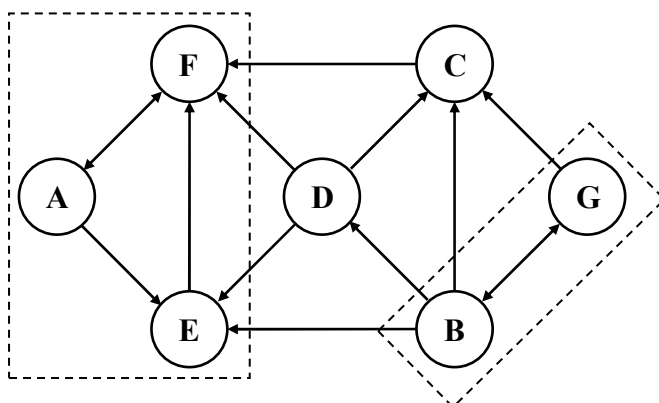
Feladat megoldások

K.1 A feladatbeli két kérdés megválaszolása a Warshall-féle algoritmus segítségével lehetséges. Az egyszerűbb hivatkozás kedvéért a boolean változókat 1 ("true"), illetve 0 ("false") értékekkel helyettesítve (utóbbiakat a táblázatban fel nem tüntetve):

- a) Az az alkatrész, melynek meghibásodása a teljes berendezés (valamennyi alkatrész) tönkremeneteléhez vezethet olyan „csomópont” a gráfon, melyből (önmagát nem tekintve) valamennyi másik csomóponthoz út vezet. Az ilyen alkatrészt (csomópontot) nevezzük a modellben „domináns” pontnak. Tehát a „teljes elérési tábla” azon sora, melynek – az átlót nem tekintve – valamennyi cellája elérési lehetőséget mutat, „domináns” pontot azonosít ($\sum_j a_{ij}^n - a_{ij}^n = n-1$). Esetünkben ez a „B” és a „G” pont.

Hasonló logikával:

- b) Az az alkatrész, melynek meghibásodása bármelyik másik alkatrész tönkremenetele esetén szintén várható, olyan „csomópont” a gráfon, melyhez (önmagát nem tekintve) valamennyi másik csomópontból út vezet. Az ilyen alkatrészt (csomópontot) nevezzük a modellben „dominált” pontnak. Tehát a „teljes elérési tábla” azon oszlopa, melynek – az átlót nem tekintve – valamennyi cellája elérési lehetőséget mutat, „dominált” pontot azonosít ($\sum_i a_{ij}^n - a_{ij}^n = n-1$). Esetünkben ez az „A”, az „E” és az „F” pont.



	A	B	C	D	E	F	G
A	1				1	1	
B	1	1	1	1	1		1
C	1					1	
D	1		1		1	1	
E	1				1	1	
F	1					1	
G	1	1	1	1	1	1	1

Megjegyzések a megoldáshoz:

- A fenti „teljes elérési táblában” vastag betűtípussal tüntettük fel az eredeti, „közvetlen elérési tábla” (\underline{A}^0) elemeit. A vékony, dőlt betűk (számok) ezek szerint azokat a „legrövidebb” elérési lehetőségeket (utakat) jelölik, melyek legalább két darab irányított élből állnak.
- Mind a táblázat átlóbeli értékeiből, mind a gráf ábrájából látható, hogy amennyiben a gráfon több domináns, illetve több dominált pont is található, úgy azok között hurok kapcsolat van, melyek összefüggő hurokrendszert alkotnak („AEF”, illetve „BG” „hurokrendszerek”).
- Az is látható, hogy a domináns hurokrendszer forrásként (csak „kifelé” mutató nyilak), míg a dominált hurokrendszer nyelőként (csak „befelé” mutató nyilak) viselkedik a gráf többi része felé.

Bármilyen meglepő, a feladatnak időmodellezési vonatkozásai is lehetnek. Tudniillik, ha a gráfon pozitív hurokrendszer található, amely egyben domináns, avagy dominált ponthalmaz is, úgy az(oka)t egyetlen forrásként, avagy nyelőként kezelve az időmodell (leghosszabb út keresési-, illetve minimális potenciál feladat) még értelmezhető marad! A domináns, illetve dominált ponthalmazok (hurokrendszerek) pedig mintegy periódusgenerátorként viselkednek. Sőt! Felmerül a kérdés: ilyen periódusgenerátor(ok) a modellbe bárhová beépíthető(k)? (Lásd a gyakorlatban: „ismétlődő termelési ciklusok”) ...

Az triviálisan megállapítható, hogy a „tipikus” („zárt”) hálós időmodellek (egyetlen forrás, egyetlen nyelő) esetén a forrás egyben domináns pont, míg a nyelő egyben dominált pont is. Több kezdő- és végpontú modell (multi-projekt menedzsment) esetén viszont felmerülhet a dominancia-hatókör fogalma, mely a gráfnak (modellnek) azon részét azonosítja, melyen belül az adott forrás, illetve adott nyelő domináns-, illetve dominált pontként viselkedik. ...

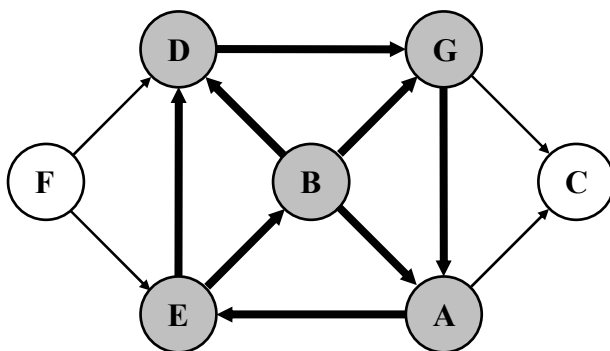
K.2 A hurkok létének kimutatása, illetve a hurkon lévő csomópontok beazonosítása bármelyik fenti algoritmussal lehetséges. A hurok élek beazonosításához azonban a kiindulási (\underline{A}^0) tábla („közvetlen elérési tábla”, „struktúramátrix”) és a „teljes elérési tábla” (\underline{A}^n) egyaránt szükséges. Feladatunk esetében az \underline{A}^0 tábla akár „át is örökíthető” az \underline{A}^n táblába, mindössze a Warshall által használt kétértékű (nála boolean) függvényt- és változókat, illetve Floyd algoritmusának belső magját háromértékű függvényrel- és változókkal kell helyettesíteni.

- Jelölje „0” érték a nem létező, illetve még fel nem tárt utakat ($M=0$),
- „1” jelölje az egyetlen élből álló utakat, és végül
- jelölje „2” érték azokat a pontpárokat („viszonylatokat”) melyek között a „legrövidebb” (legkevesebb élből álló) út is legalább két élt tartalmaz.

A „belső mag”-ként alkalmazandó függvény pedig (például a közvetítő pontok módszerénél ismertetett algoritmus módosításával, illetve az ott alkalmazott jelölési rendszerrel élve):

$$\phi^k = \max \{a_{ij}^{k-1}; 2 - a_{ij}^{k-1}\}$$

Ez utóbbi algoritmussal meghatározott (\underline{A}^n) „teljes elérési tábla” átlóbeli értékeiből, illetve a gráf rajzából is látható, hogy a gráf „A”, „B”, „D”, „E” és „G” pontja „önmagából is elérhető”, tehát hurkon van.



	A	B	C	D	E	F	G
A	2	2	1	2	<u>1</u>		2
B	<u>1</u>	2	2	<u>1</u>	2		<u>1</u>
C							
D	2	2	2	2	2		<u>1</u>
E	2	<u>1</u>	2	<u>1</u>	2		2
F	2	2	2	1	1		2
G	<u>1</u>	2	1	2	2		2

Egy-egy ($a_{ij}^0=1$) él esetén annak eldöntéséhez, hogy az illető él hurok él-e, vagy sem, mindössze azt kell tudni, hogy

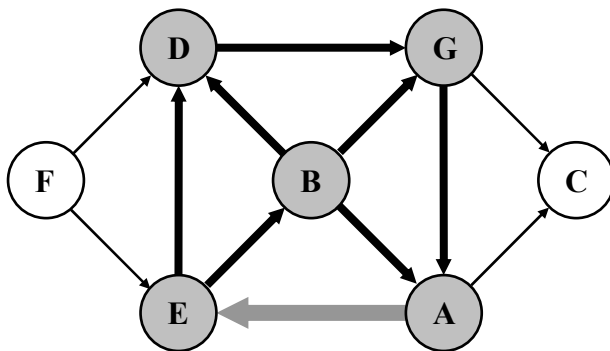
- egy hurok él kezdő és végpontja egyaránt hurkon lévő csomópont ($a_{ii}^n \neq M$ és $a_{jj}^n \neq M$), és
- a két csomópont között ellenkező irányban is van kapcsolat ($a_{ji}^n \neq M$).

A „hurok éleket” a fenti táblázatban aláhúzott értékkel jelöltük, a gráfon pedig megvastagítottuk. Az alkalmazott háromértékű belső függvény- és változók következtében az \underline{A}^0 -beli, éleket reprezentáló ($a_{ij}^0=1$) értékek az \underline{A}^n -ben is láthatók ($a_{ij}^n=1$).

Annak elősegítésére, hogy az esetleges téves adatbevitel következtében előálló, szándékozatlan és alkalomadtán igen terebélyes hurokrendszert minél hatékonyabban számolhassuk fel, némi segítséget nyújthat az a „felismerés”, hogy azok a hurok élek melyek kezdőpontja, avagy végpontja azonos, nem lehetnek egyazon (nyíl-folytonos!) hurok részei.

Ezen felismerés alapján állapítsunk meg (w_{ij}) súlyszámokat az egyes (a_{ij}^n) hurok élekhez, melyek azt mutatják meg, hogy az adott hurok él legalább hány huroknak a része!

Ehhez állítsuk elő az \underline{A}^{n+1} táblát, melynek $a_{ij}^{n+1}=1$ értékei a hurok éleket reprezentálják, míg összes többi értéke zérus. (A zérus értékeket a táblázatokban továbbra sem tüntetjük fel.)



	A	B	C	D	E	F	G
A					<u>1⁴</u>		
B	<u>1¹</u>			<u>1¹</u>			<u>1¹</u>
C							
D							<u>1²</u>
E		<u>1³</u>		<u>1¹</u>			
F							
G	<u>1²</u>						

A hurok élekhez rendelhető (w_{ij}) súlyszám meghatározása: az adott ($a_{ij}^{n+1}=1$) hurok él kezdőpontjába, mint végpontba érkező hurok élek (szimmetrikus cella oszlopában található $a_{ij}^{n+1}=1$ értékek) száma ($\sum_j a_{ji}^{n+1}$) szorozva a végpontjából, mint kezdőpontból kiinduló hurok élek (szimmetrikus cella sorában található $a_{ij}^{n+1}=1$ értékek) számával ($\sum_i a_{ji}^{n+1}$).

$$w_{ij} = \sum_j a_{ji}^{n+1} \cdot \sum_i a_{ji}^{n+1}$$

A számított w_{ij} értékeket a fenti táblázat celláinak jobb felső sarkában tüntettük fel. Ezen súlyszámok, mint adott élt tartalmazó hurkok számának alsó becslései alapján azt várjuk, hogy például az A-E él kiiktatásával legalább 4 hurok megszakad (eltűnik) a gráfon. (Esetünkben ez valóban a teljes hurokrendszer megszűnését eredményezné.)

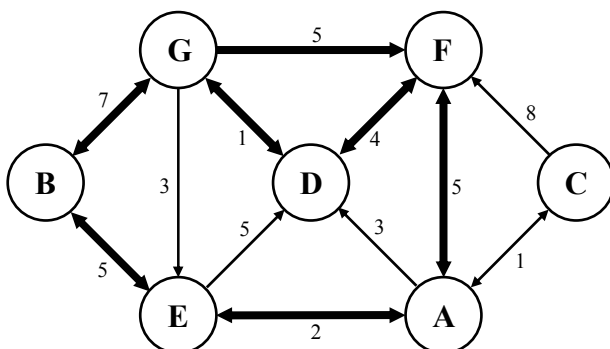
Sajnos ez az okoskodás nem mindig vezet ténylegesen „hatékony” (értsd „gyors”) megoldáshoz, de valamivel többet segíthet, mint a hurkon lévő csomópontok egyszerű felsorolása.

A feladat időmodellezési vonatkozását a hálós időmodellen található esetleges pozitív hurkok feltárása és megszüntetése – mint „hiba-elhárítási metódus” – jelentheti. ...

- K.3 A feladatban kért javaslatok megalapozásához Floyd algoritmusán, vagy a közvetítő pontok módszerének tárgyalásakor bemutatott algoritmus megfelelően adaptált változatán keresztül ($M=+\infty$; $\phi^k = \min \{a_{ij}^{k-1}, a_{ik}^{k-1} + a_{kj}^{k-1}\}$) vezet az út. Valamennyi itt megfogalmazott „javaslat” a gráfon valamennyi pontpár között a legrövidebb utak (hosszának) ismeretét feltételezi.

- 1.a) A példánk szerinti központi elosztó raktár helyéül az a „település” javasolható, ahonnan a környező településekre irányuló szállítások ráfordításainak összege a legkisebb. Vagyis az onnan a gráf többi pontjába vezető legrövidebb utak összege (a „teljes elérési tábla” adott sorában szereplő értékek összege, nem tekintve az átlóbeli értéket) a legkisebb ($\min_i \{\sum_j a_{ij}^n - a_{ii}^n\}$). Az ilyen pontot nevezzük a súlyozott gráf „**forrás oldali súlypontjának**”. Esetünkben ez az „A” pont ($\min_i \{\sum_j a_{ij}^n - a_{ii}^n\}=22$).
- 1.b) A példánk szerinti központi termény-felvásárló helyéül az a „település” javasolható, ahová a környező településekből irányuló szállítások ráfordításainak összege a legkisebb. Vagyis a gráf többi pontjából oda vezető legrövidebb utak összege (a „teljes elérési tábla”, adott oszlopában szereplő értékek összege, nem tekintve az átlóbeli értéket) a legkisebb ($\min_j \{\sum_i a_{ij}^n - a_{ij}^n\}$). Az ilyen pontot nevezzük a súlyozott gráf „**nyelő oldali súlypontjának**”. Esetünkben ez az „E” pont ($\min_j \{\sum_i a_{ij}^n - a_{ij}^n\}=24$).
- 1.c) A példánk szerinti katasztrófavédelmi (mentő/tűzoltó/vegyvédelem) bázis helyéül az a „település” javasolható, ahonnan a hozzá rendelt „legtávolabbi” település elérésének „ideje” (úthossza) a legkisebb. Vagyis az onnan a gráf többi pontjába vezető legrövidebb utak közül a leghosszabb (a „teljes elérési tábla” adott sorában szereplő értékek legnagyobbika, nem tekintve az átlóbeli értéket) is a lehető legrövidebb ($\min_i \{\max_j \{a_{ij}^n \mid i \neq j\}\}$). Az ilyen pontot nevezzük a súlyozott gráf „**forrás oldali centrumának**”. Esetünkben több ilyen pont is van: „A”, „E” és „G” ($\min_i \{\max_j \{a_{ij}^n \mid i \neq j\}=7$).
- 1.d) A példánk szerinti katasztrófavédelmi (árvíz/földrengés/honvédelem) menedék helyéül az a „település” javasolható, amely a hozzá rendelt „legtávolabbi” településről is a legrövidebb „idő alatt” (legrövidebb úton) elérhető. Vagyis a gráf többi pontjából az oda vezető legrövidebb utak közül a leghosszabb is (a „teljes elérési tábla” adott oszlopában szereplő értékek legnagyobbika, nem tekintve az átlóbeli értéket) a lehető legrövidebb ($\min_j \{\max_i \{a_{ij}^n \mid i \neq j\}\}$). Az ilyen pontot nevezzük a súlyozott gráf „**nyelő oldali centrumának**”. Esetünkben a forrás oldali centrumok („A”, „E”, „G”) egyben nyelő oldali centrumok is ($\min_j \{\max_i \{a_{ij}^n \mid i \neq j\}=7$).

A súlypont és a centrum vonatkozásában a forrás-, illetve nyelő oldal megkülönböztetésének szimmetrikus (értsd: irányítatlan) gráfon nincs értelme. Ugyanakkor a fenti „javaslatok” feltételezik, hogy a gráfnak van olyan pontja, melyből az összes többi pont elérhető (forrás oldal), illetve mely az összes többiből elérhető (nyelő oldal). Ha nincs ilyen, az úgyszintén külön vizsgálat tárgyát képezheti, hogy melyik az a pont, melyből a legtöbb pont elérhető, illetve mely a legtöbb pontból elérhető (... némiképp hasonlóan a K.1 feladathoz).



	A	B	C	D	E	F	G
A	2	7	1 ¹	3 ³	2 ²	5 ⁵	4
B	7	10	8	8	5 ⁵	12	7 ⁷
C	1 ¹	8	2	4	3	6 ⁸	5
D	6	8	7	2	4	4 ⁴	1 ¹
E	2 ²	5 ⁵	3	5 ⁵	4	7	6
F	5 ⁵	12	6	4 ⁴	7	8	5
G	5	7 ⁷	6	1 ¹	3 ³	5 ⁵	2

2. Az átló(k) éleinek beazonosításához, vagy a Floyd-féle \underline{P} (címke-) mátrixra, vagy – mint a közvetítő pontok módszerénél – az eredeti struktúra táblára is szükség van. Mi itt az utóbbi megoldást választottuk, mikor is az eredeti \underline{A}^0 struktúramátrix elemeit bemásoltuk az \underline{A}^n teljes elérési táblába (fenti tábla celláinak jobb felső sarkába írt számok). Bármelyik két pont közötti legrövidebb utak – így valamennyi átló – élei a közvetítő pontok módszerénél előre felé haladva, felgöngyölítés jelleggel-, míg Floyd módszerénél egy átló élei a \underline{P} (címke-) mátrix segítségével „belülről”-, avagy visszafejtés jelleggel azonosíthatók. Esetünkben az átlók a „B” és az „F” pontok között jelentkeznek 12 egységnyi hosszal ($\{B,E,A,F\}$, $\{B,G,D,F\}$, $\{B,G,F\}$, $\{F,A,E,B\}$, $\{F,D,G,B\}$). Az átlókat a gráf fenti rajzán az élek megvastagításával emeltük ki.

A feladatnak az általunk tárgyalt hálós időmodellek szempontjából nincs közvetlen vonatkozása. Hasonló feladatok – természetesen – idő vetületben is megfogalmazhatók, mint például olyan esetekben, ahol a feladatbeli „települések közötti szállítások” és „fajlagos ráfordítások” eredendően állapotok közötti (többé-kevésbé) reverzibilis átmenetként és „idő” dimenzióban értendők. ...

- K.4 A feladat gyakorlatilag egy gráf adott két pontja közötti utak (útvariánsok) leszámítását kéri. Hurokmentes irányított gráfon az itt megfogalmazott kérdések megválaszolásához segítséget nyújthat a közvetítő pontok módszerénél bemutatott algoritmus egy célszerűen módosított változata $M=0$ megkülönböztető értékkel és $\varphi^k = a_{ij}^{k-1} + a_{ik}^{k-1} \cdot a_{kj}^{k-1}$ transzformációs függvénnyel a belső magban.

Az alábbi baloldali tábla a gráf 01 értékű \underline{A}^0 „közvetlen elérési táblája”, míg jobb oldalon az \underline{A}^n „teljes elérési tábla” látható. (Az üres cellák az $M=0$ megkülönböztető értékeket rejtik.)

	A	B	C	D	E	F	G
A			1				
B	1						
C							
D	1	1			1		
E	1		1				
F		1					1
G		1		1	1		

	A	B	C	D	E	F	G
A			1				
B	1		1				
C							
D	3	1	4		1		
E	1		2				
F	6	3	8	1	2		1
G	5	2	7	1	2		

- a) Az, hogy a „GD” útszakasz (él) hány „FC” útvariánsnak a része, szinte közvetlenül kiolvasható a „teljes elérési táblából”, ami nem más, mint az „FG” és a „DC” útvariánsok számának szorzata ($1 \cdot 4 = 4$). Hasonló elven valamennyi élhez (illetve csomópont) rendelhető egy-egy „tagsági szám” (akár, mint \underline{R}^{FC} „tagsági mátrix”), ami azt mutatja meg, hogy az egyes élek (illetve csomópontok) az „FC” viszonylaton hány útvariánsnak részei. (Ilyen „tagsági mátrixok” – természetesen – „bármely”, vagy épp az „összes” viszonylat esetén meghatározhatók.)
- b) Az a) szerinti vizsgálatot minden ij útszakaszra (élre) elvégezve azt tapasztaljuk, hogy esetünkben a legtöbbfajta „FC” járatnak (útvariánsnak) az „FG” útszakasz (él) a része.

Megjegyzések a megoldáshoz:

- A fentiek egyfajta „inverzeként” az egyes élekhez, illetve csomópontokhoz olyan „tagsági mátrixok” is meghatározhatók, melyek elemei azt mutatják meg, hogy az egyes ij viszonylatokon az adott él, illetve csomópont hány útváriánsnak része.
- Amennyiben az \underline{A}^n „teljes elérési mátrix” átlójában $M=0$ értéktől eltérő érték jelenik meg, az – hurokra utalván – érvényteleníti a számításokat.

A feladat időtervezési vonatkozásai – például – a teljes tartalékidőn belüli tevékenység allokációnál („erőforrás allokáció” – lásd később), illetve optimalizálási feladatoknál (lásd CPM^{cost} feladat) az ú. n. „szub-kritikus” utak, avagy alternatív (kritikus) utak számításba vételekor jelentkezhetnek. ...

Megjegyzések:

Összevetve a Floyd/Warshall-féle algoritmusoknak-, illetve a közvetítő pontok módszerének a fejezet elején közölt Delphi/Pascal átiratát, látható, hogy a „közvetett” kapcsolatok (egynél több élből álló utak) felderítésekor az egy-egy „ k ” értékhez („közbulső”, avagy „közvetítő” ponthoz) tartozó táblázatok számításánál a „közvetítő pontok módszere” kizárja a vizsgálandók közül az aktuális „ k ” pont sorát („ $i=k$ ”-ből induló útváriánsok), illetve oszlopát („ $j=k$ ”-val záruló útváriánsok), míg a Floyd/Warshall-féle algoritmusok – az adott feladatok esetében irreleváns lévén – ezzel a megkülönböztetéssel eleve nem élnek.

- * Eredendően súlyozatlan gráfok esetén az általunk „teljes elérési mátrix”-ként aposztrofált \underline{A}^n táblázatot – mint logikai struktúrát – a gráfelméleti, illetve operációkutatási/számítástudományi szakirodalom a gráf „tranzitív lezártja”-ként, az $\underline{A}^0 \rightarrow \underline{A}^n$ transzformációsorozat pedig „tranzitív lezárásként” referálja. (– Utalván a csomópontok „átjárhatóságára”, azaz „tranzitivitására”. ...)

L – A GTM

Az előző fejezetekben tárgyalt időmodellek kapcsán már jeleztük, hogy míg a hálós időtervezési feladat a hálózatokon definiált két alap-feladatra (a leghosszabb út keresésére, illetve annak duál-feladatára, a minimális potenciál-rendszer meghatározására) vezethető vissza, az annak megoldását is befoglaló „fejlettebb” eljárások (MPM/PDM) kimondva, kimondatlanul túllépnek a „hálózat” eredeti definícióján, illetve az abból adódó lehatárolásokon. Ráadásul az eredmények értelmezésénél bevezetett („kritikus-”) „út” fogalom sem konform gráf-technikai alap-értelmezésével.

- A hálózat, definíciója szerint: „súlyozott, irányított, hurokmentes gráf, egyetlen forrással és egyetlen nyelővel, valamint nem-negatív súlyszámokkal”. Az MPM/PDM modellben definiált rögzített időtartamú tevékenységek, illetve felső korlátozások – az alsó és felső korlátozások (minimális- és maximális kapcsolatok) kölcsönös egymásba transzformálhatósága okán – impliciten becsempészik mind a hurkokat, mind a negatív súlyszámokat a „hálózatba”. Sőt, alkalom adtán az „egyetlen forrás” és „egyetlen nyelő” kitétele sem teljesül.
- A James E. Kelley-ék által a CPM technikánál bevezetett „kritikus út” fogalma nem konform a gráf-modelleknél értelmezett „út” fogalmával, miszerint az „a gráf egy csomópontjából egy másikba vezető – ismétlődésektől (hurkóktól) mentes – nyíl-folytonos él-láncolat”, hiszen „kritikus út” alatt valójában az adott irányított gráfon a leghosszabb utak összességéből alkotott („domináns”) rész-gráfot értik. (Ez ellentmondást áthidalandó, úgy mondják: „Több kritikus út is megengedett”.)

Idő-modellezési szempontból ugyancsak korlátot jelenthet, hogy valamennyi előzőekben ismertetett technika az időelemzést adott, diszkrét értékű „tevékenységidőkkel” történő számításokra vezeti vissza, azaz a tevékenységidő „bemenő adat” az időelemzés számára, így megelőző döntések sorozatára kényszerül a modellező, jöllehet, a megfelelő tevékenység-időtartamok megválasztását maga a hálós technika (a háló idő-elemzése) is segíthetné (szolgáltatathatná).

Szintén ellentmondásos helyzethez vezethet, hogy a számítások „kezdő-” és „végpontjaként” előre szükséges megjelölni az egyetlen kiindulási állapot reprezentánst (forrást) és egyetlen célreprezentánst (nyelőt). Az igazi problémát nem önmagában az „egyetlen” kitétel jelenti, hanem az abból levezetett „(teljes) tartalékidő(k)”, azokon keresztül pedig a „kritikus út” értelmezése.

Tudniillik a tartalékidő akkor valós adat a modellt használó („döntéshozó”) szakember számára, ha annak felhasználásával (azaz a bevont/szükséges erőforrásokkal) ő maga rendelkezik. Ez különösen nagyobb, összetettebb projektek esetében elvezethet odáig, hogy indokolttá válhat több kezdet-, illetve cél reprezentáns (forrás, illetve nyelő) egyidejű beépítése a modellbe. („Nyitott háló”, „Multi-projekt menedzsment”).

Ez utóbbi szemléltetésére gondoljunk egy „síkvidéki” vízerőmű építésre, ahol az erőmű létrehozásához nagy-tömegű területrendezési (földművek, infrastruktúra hálózatok), műtárgy-építési (völgyzáró gát, zsilip, híd-szerkezetek) és gép-gyártási (turbinák, generátorok, elektromos gépészeti és vezérlési berendezések) is hozzátartoznak. A területrendezési, műtárgy-építési és gépgyártási feladatok erre specializálódott szervezetek közreműködésével – és azok számára – önmagukban is jelentős, egymástól csaknem függetlenül szervezhető projektek, melyek időtervei „csak” néhány ponton illeszkednek egymáshoz. E kapcsolódó, ám önállóan menedzselt projektek számára más és más lesz a projekt kezdete, és a vége, függetlenül attól, hogy végső soron egy adott célt szolgálnak.

Nem valószínű, például, hogy a megvalósítás során a területrendezési munkáknak az elfogadott ütemtervhez képest gyorsabb előmenetele, avagy megcsúsztatása hasznosítható idő-többletet jelent

például a turbina gyártási feladatok végrehajtásával kapcsolatban. A turbina gyártó vállalat saját termelési terve szerint, vélhetően szélesebb ügyfélkör számára ténykedik, így az adott projekt megvalósulása során „felbukkanó”, saját hatáskörén kívüli lehetőségeket, avagy akadályokat nem igen tudja termelési tervében lereagálni. Úgy szerződni vele pedig, hogy lényegesen nagyobb időkeretben álljon a projekt rendelkezésére, mint ahogy az a számára adott feladatrész elvégzéséhez szükséges, igen költséges, ha nem lehetetlen feladatnak bizonyulhat.

Megjegyzések:

- Nem elfelejtendő, hogy a modellezés (időelemzés) során „a leghosszabb út legrövidebb állapotát keressük”. A tartalékidőket pedig ezen legrövidebb állapothoz mérjük. Ez az alapelv nem sérül több kezdő- és végpont viszonylatában sem. Több forrás és/vagy több nyelő esetén azonban – a modellezés korai fázisában különösen – nem biztos, hogy helyes döntés „eleve” kitüntetni valamelyik forrás-nyelő párt.
- Ha az egyébként önállóan menedzselt projektek modelljei számára az egyesítő (generál) modellben közös kezdő-, illetve közös befejező (határ idő-)pontot jelölnénk ki, a (rész-)projekteknél (azok elejénél és/vagy végénél) akár igen nagy, de valójában hamis, félrevezető „tartalékidők” jelenhetnek meg.

A fenti fogalom-rendszerek és modellbeli alapvetések elméleti tisztázásának és együttes kezelésének igénye egy a Magyar Államvasutak Rt. (MÁV) és a Budapesti Műszaki Egyetem (BME) között az 1980-as évek végén, az 1990-es évek elején létrejött kutatási megállapodás keretében, „multi-projekt menedzsment” (de még inkább: „termelés menedzsment”) környezetben merült fel élesen.

A kutatás-fejlesztési megbízás értelmében az egyetem kutató csoportjának – szoros együttműködésben a MÁV szakembereivel – két szinten kellett kidolgoznia a MÁV pályaeépítési- és fenntartási feladatainak ütemezését segítő metodikai- és szoftver rendszert.

1. Ki kellett építeni egy gyors, a MÁV gyakorlatában alkalmazott, variábilis, technológiai modulokból építkező, ütemtervkészítő rendszert (és adatbázist), mely lehetőséget biztosít újabb technológiai modulok kialakítására, tesztelésére, gazdasági elemzésére és integrálására, illetve „tetszőlegesen” kialakított technológiai „sor” adott építési feladatra (vonalszakaszra) történő gyors adaptálására¹⁹;
2. Elő kellett készíteni egy a teljes országos vasúthálózat pályaeépítési- és pálya-rekonstrukciós feladatait átfogó központi tervező-ütemező rendszert a MÁV tervezési gyakorlatához igazodóan, 3 éves görgetett időhorizonton, 10 perces(!) pontossággal, elvileg több ezer(!) eseti beavatkozás (egyenként pár tíztől pár százig terjedő számú tevékenységet tartalmazó, és ideiglenes vágányzárakat igénylő helyi projektek) tervezésével és figyelemmel kísérésével²⁰.

A kihívást nem csak az igen nagy számú adat megbízható kezelése, de összefüggéseik elvi modelljének tisztázása is jelentette: Nincsen előre definiált kezdőpont, nincsen egyértelműen azonosított végpont, az egymástól jórészt független helyi projekteket néhány központi elosztású vezérgép ütemezése, valamint vonalszakaszonként vasút-forgalmi előírások és szempontok kötik össze, a helyi projektek tervezését és lebonyolítását a helyi szervezetek végzik, és mindez az országos hálózat

¹⁹ Az elkészült rendszert „FITT” („Felépítményi Időkorlátos Technológiák Tervezése”) néven a kutatócsoport 1991-ben mutatta be a MÁV vezetőségének, mely bemutatkozás a rendszer oktatásával, majd később egy budapesti nemzetközi vasúti konferencián történő bemutatásával folytatódott.

²⁰ A elkészült rendszermodellt és szoftvert „VÁZ” („VÁgányZári időtervező rendszer”) néven mutatta be a kutatócsoport a MÁV illetékes fórumain. Mindkét rendszer további életének a magyarországi „rendszer váltást” követően a MÁV átszervezése, részbeni privatizálása, valamint az azzal párhuzamos gazdasági megszorítások és – a nemzetközi érdeklődés ellenére – a számítástechnikai fejlődés követésének elmaradása (grafikus, de DOS környezet) vetett véget.

működőképességének minél teljesebb fenntartása mellett. A felvázolt peremfeltételek – többek között – az ismert hálós idő-modellezési eljárások alkalmazhatóságának, és/vagy valamilyen rész-feladatra történő adaptálhatóságának kérdéskörét is felvetették.

A széles körben ismert, elterjedt hálós ütemezési technikák kritikai elemzése az időmodellek metodikai és fogalmi vonatkozásaira egyaránt kiterjedt. A vizsgálatok eredményeként megfogalmazott, és az ismert eljárások korlátainak feloldását, illetve egy általánosítható, de eredendően az időbeliségre koncentrááló modell (innen a név: General Time Model = általános időmodell²¹) kidolgozását célzó fejlesztési „irányelveket” az alábbiak szerint lehetne ma összefoglalni:

- 1) Azon modellbeli összetevők, vagy összefüggések (korlátozások) között, melyek idő-tartományt határoznak meg, nincsen érdemi különbség. E szerint nincs különbség bármilyen („késleltetési”) időparaméterrel bíró kapcsolat (mint relatív időkorlát), és bármilyen értelemben korlátozott tevékenységidő között. (*Grafikus analógia: Gráf-élek*);
- 2) Célszerű visszatérni az esemény-csomópontú megfeleltetésre. Aminek időbeli kiterjedése nincs (esemény), annak ne legyen gráfbeli „kiterjedése” sem (csomópont). Hasonlóan: ami időbeli kiterjedéssel bír (tevékenység/folyamat), bírjon gráfbeli kiterjedéssel is. (*Gráf analógia – leghosszabb út feladat*);
- 3) Tekintve, hogy bármilyen (relatív) felső korlátozás „mínusz eggyel történő átszorzással” ellentétes irányú, és korlát-értékét tekintve ellentétes előjelű, alulról történő korlátozással helyettesíthető, nincs különbség a korlátozások típusai (alsó/felső korlát, rögzített érték) között. (*Homogén feltételek – csak „alsó” korlátozások*);
- 4) Tekintve, hogy bármely gráfbeli út hossza az annak részét képező élek súlyszámainak egyszerű összege, nincs jelentősége annak, hogy a „leghosszabb út” elemeit milyen sorrendben tárjuk fel. Nincs ok a „címkézési technikák” („felgöngyölítéses eljárások”) preferálására. (*Alternatív módszerek keresése*);
- 5) Tekintve, hogy több, egyébiránt „független” hálós időmodell egyidejű kezeléséről, és „véletlenszerű” (elvileg a rész-háló bármely belső pontjára irányuló) kapcsolatokkal történő „összefűzéséről” – és „görgetett időtervezésről” – van szó, nincs lehetőség egyetlen kezdőpont és egyetlen végpont beazonosítására. Nincsen egyetlen kitüntetett „irány”, avagy „viszonylat”. (*Többszörösen nyitott háló*);
- 6) Fentiek következtében a gráf-technikai analógiát a hálózatokra történő leszűkítésről ki kell terjeszteni bármilyen „általános” súlyozott, irányított gráfra. Minden, a modellezést feleslegesen terhelő korlátozást fel kell oldani. Nem érdekes a hurkok léte, vagy nem-léte, pozitív-, avagy negatív súlyszámok léte, avagy nem-léte, a források és nyelők száma, egyáltalán a gráf-modell összefüggősége. Az esetleges ellentmondásokat, teljesíthetetlen feltételeket maga az eljárás derítse fel – és adjon segítséget a korrekció mikéntjének megválasztásához. A felhasználó nem kell, hogy szükségszerűen hálótechnikai szakember legyen. (*Gráf-megszorítások „teljes” feloldása*);
- 7) A vizsgálatoknak célszerű kiterjednie akár a már elterjedten használt fogalomrendszer („tevékenységidő”, „forrás”, „nyelő”, „kritikus út”, „határ-időpontok”, „dominancia”, stb.) felülvizsgálatára, pontosítására. (*Relatív időkorlátok áttekintése, Eredmény-adatok értékelése*)

²¹ A kutatások eredményei az 1990-es évek vége óta GTM (General Time Model = Általános időmodell) néven kerültek beépítésre a BME Építési Menedzsment szakirányos hallgatóinak tananyagába.

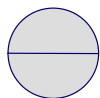
Elvi tevékenységidő korlátozások

A hálós időelemzés számára elengedhetetlen tevékenységidő adatok becslésének korlátairól, illetve bizonytalanságáról az előzőekben már esett szó. Az eddig ismertett technikák (PERT, CPM, MPM) megkövetelik a tevékenységidők előre meghatározott voltát – még akkor is, ha látszólag sztochasztikus paramétereket is kezelnek (a konkrét számítások diszkrét értékekkel történnek). Az időtervezési alapismeretek köréből már jól ismert a tevékenységek időzítésében elő-előforduló „paradox helyzet” jelensége, aminek felismerésére már csak a befoglaló ütemterv készítésekor, a tevékenységek „összehangolásakor” van mód. Előfordulhat, hogy egy-egy tevékenység időtartamát előzetesen még nem tudjuk – vagy nem akarjuk – rögzíteni, sőt a javasolt időértéket kifejezetten a befoglaló ütemterv (háló) elemzésétől várjuk. Feloldva az eddig tárgyalt hálótechnikai időtervezési alkalmazások ilyenkor korlátait is, és gyakorlatilag visszatérve az esemény-csomópontú értelmezésre, a tevékenységidők számára alsó- és/vagy felső korlátok felállításával mód nyílik a befoglaló ütemterv belső időpontjainak és a tevékenységek időtartamainak szimultán meghatározására is.

Ezzel a megoldással nemcsak a feloldható paradox helyzeteket nem hozzuk létre (a számítás logikája, algoritmusa kifejezetten ezektől mentes eredményre vezet), nem csak az ennek megfelelően legrövidebb teljes átfutási időt kapjuk, de – a hálós idő-modellezés alap-logikájával, és alapvető szépségével összhangban – nem kényszerítünk bele a modellbe eleve olyan megkötéseket, amelyeket eredendően nem szándékoztunk beépíteni, illetve amelyek szükségtelen előzetes állásfoglalásokra készítenek bennünket.

Az alábbiakban a tevékenységidők korlátozásának megkülönböztetett eseteire adunk elvi példát és gyakorlati magyarázatot, a vizuális memorizálás, illetve a megkülönböztetés és figyelem-felhívás céljából javasolható grafikus megjelenítéssel („tevékenység-pajzsokkal”) szemléltetve.

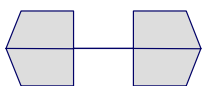
A tevékenységidő Zérus (0): „esemény”



Az azonosított null-időtartamú tevékenységnek (eseménynek) csak időbeli pozíciója van, míg időbeli kiterjedése nincs (fikció). Tipikus az ún. mérföldkövek, részhatáridők, elvárt állapotok időzítésénél (akár mint cél-, akár mint kiindulási állapot reprezentáns).

[Időelemzés után felső szegmensében legkorábbi-, alsó szegmensében legkésőbbi bekövetkezési időpontja kerülhet feltüntetésre.]

A tevékenységidő sem alulról, sem felülről nem korlátozott: „befüggesztett tevékenység”



Tipikus az ún. helyszínen tartási feladatoknál, mint például a víztelenítés, daruzás, állványozás, stb., ahol is a tevékenység szükséges kezdése és befejezése technológiailag egyaránt jól beazonosítható, de tényleges időtartama a projekt számos egyéb folyamatától, tevékenységétől függ. Ilyen esetben a tevékenység szükségességét jelöljük, de időtartamát előre nem rögzítjük.

[Időelemzés után baloldalt fent a legkorábbi kezdés, lent a legkésőbbi kezdés, jobb oldalon fent a legkorábbi befejezés, lent a legkésőbbi befejezés kerülhet feltüntetésre.]

A tevékenységidő csak alulról korlátozott: „megszakítható tevékenység”



Tipikus olyan esetekben, mikor a feladat elvégzéséhez szükséges idő – figyelembe véve a rendelkezésre álló technológiákat, kapacitásokat és körülményeket – jól becsülhető, de egy menetben történő megvalósításához nem ragaszkodunk. Ilyen lehet pl. a külső-, vagy belső befejező munkák egy része (festés,

bútorozás, tereprendezés, vízrendezés, stb.), vagy egyéb, kisebb erőforrás igényű feladatok (földvisszatöltés, szigetelés, stb.).

[Középen fent a tevékenységidő alsó korlátja látható, az alatta lévő cella üresen maradhat. Időelemzés után baloldalt fent a legkorábbi kezdés, lent a legkésőbbi kezdés, jobb oldalon fent a legkorábbi befejezés, lent a legkésőbbi befejezés kerülhet feltüntetésre.]

A tevékenységidő csak felülről korlátozott: „feltételes tevékenység”

Tipikus lehet olyan esetben, amikor valamilyen nem alapvető feladat elvégzése a rendelkezésre álló idő függvénye (belefér-e az időbe). A felső korlát-értéket – mint rendelkezésre állási időt – gazdaságossági-, meteorológiai-, elérhetőségi-, stb. szempontok alapján határozhatjuk meg. (Például: Az eredményül kapott korlátos időtartam alatt az esetleges bontott anyagok újrahasznosítás céljából a helyszínen megvásárolhatók. Ez esetben a felső időkorlát a bontott anyagok esetleges, leghosszabb helyszínen tartási – tárolási, őrzési – idejét jelenti.)

[Középen lent a tevékenységidő felső korlátja látható, a felette lévő cella üresen maradhat. Időelemzés után baloldalt fent a legkorábbi kezdés, lent a legkésőbbi kezdés, jobb oldalon fent a legkorábbi befejezés, lent a legkésőbbi befejezés kerülhet feltüntetésre.]



A tevékenységidő alulról és felülről – eltérő értékekkel – egyaránt korlátozott: „rugalmas időtartamú, nem megszakítható tevékenység”

A megvalósítás során a legtöbb tevékenység így viselkedik. Alsó értékét a rendelkezésre álló technológia, kapacitás, illetve az ismert körülmények-, míg felső értékét a projekt egyéb folyamatai, gazdaságossági-, avagy rendelkezésre állási-, stb. feltételei alapján határozhatjuk meg. Célszerű alkalmazni olyan esetekben, amikor az optimális „vezérütem” (általános előrehaladási sebesség, avagy jellemző napi teljesítmény, stb.) meghatározását magától az időelemzéstől várjuk (szinkronizálás, paradox helyzetek automatikus feloldása).

[Középen fent a tevékenységidő alsó-, alatta pedig a felső korlátja látható. Időelemzés után baloldalt fent a legkorábbi kezdés, lent a legkésőbbi kezdés, jobb oldalon fent a legkorábbi befejezés, lent a legkésőbbi befejezés kerülhet feltüntetésre.]



A tevékenységidő alulról és felülről – azonos értékekkel – korlátozott: „rögzített időtartamú, nem megszakítható tevékenység”

A hagyományos időtervezésnél leginkább alkalmazott tevékenységtípus. Alkalmazni olyan esetben célszerű, mikor a feladat végrehajtásáról határozott elképzelésünk van, és a meglévő szerződések, valamint a kapcsolódó folyamatok az elvégzéshez rendelkezésre álló időt erősen behatárolják. Tipikus lehet a sokszereplős, összetett műszaki feladatoknál, vagy az igen jól paraméterezhető gépesített-, avagy automatizált (gyártási) folyamatoknál.

[Középen fent a tevékenységidő alsó-, alatta pedig – azonos értékkel – felső korlátja látható. Időelemzés után baloldalt fent a legkorábbi kezdés, lent a legkésőbbi kezdés, jobb oldalon fent a legkorábbi befejezés, lent a legkésőbbi befejezés kerülhet feltüntetésre.]



Megjegyzés:

- „Befüggesztett” és „feltételes” tevékenységek esetén előfordulhat, hogy az időelemzés – bár matematikailag helyes, de – műszakilag nehezen értelmezhető eredményt szolgáltat, mint például azt, hogy az adott tevékenység „hamarabb befejeződik, mint ahogy elkezdődik”.

dődött”, ami többnyire tervezési-, háló-logikai hiba eredménye. Az említett helyzet azonban korántsem törvényszerűen értelmetlen. Műszaki értelmezéséhez gondolhatunk olyan esetre, amikor az adott tevékenység – mondjuk – egy vonalas létesítmény építésének egy rész-folyamata. Ez esetben az időbeli fordulás értelmezhető úgy is, hogy az adott tevékenység a feltételezettel ellentétes irányban (pl. a záró munkaszelvénytől a kezdő munkaszelvény felé) halad – igaz, ekkor az esetleges felső tevékenységidő korlát már hatástalan.

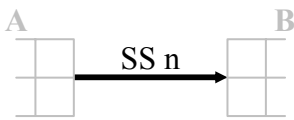
Elvi kapcsolat-típusok

A hálós kapcsolatok relatív időkorlátok. Az összevetett határidőpontok (időpotenciálok) – úm. kezdések és/vagy befejezések – időbeli különbségeinek irányított alsó-, illetve felső korlátai.

Azzal a feltételezéssel élve, hogy a tevékenységek számára rendelkezésre álló időn belül a kitűzött feladatok megvalósítása egyenletes ütemben történik – minek következtében egy tevékenység időbeli lefolyásának leírásához elegendő kezdő- és befejezési időpontját ismerni –, a tevékenységek egymáshoz viszonyított relatív időhelyzetének (időpotenciáljainak) korlátozására az alábbi elvi alap-összevetések (és kombinációik) fogalmazhatók meg:

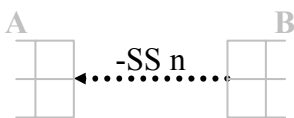
SS n = Start-Start n (Kezdés-Kezdés n) minimum

A követő („B”) tevékenység legkorábban csak a megelőző („A”) tevékenység kezdését követő „n” nap elteltével kezdhető. Később lehet, de előbb semmiképp. A kapcsolat tipikusan jól szinkronizált (közel azonos idejű), avagy egymást megvezető tevékenységek relatív indítására szolgál. Gondoljunk például a kitakarással, vagyis munkaárokban végzendő – mondjuk – csatornaépítési feladatokra (földkiemelés, ducolás, ágyazat készítés, csőfektetés, stb.).



-SS n = Start-Start n (Kezdés-Kezdés n) maximum

A követő („B”) tevékenység a megelőző („A”) tevékenység kezdését követő legfeljebb „n” napon belül el kell hogy kezdődjék. Hamarabb lehet, de később semmiképp. A kapcsolat tipikusan jól szinkronizált (közel azonos idejű), avagy egymást megvezető tevékenységek esetén, jellemzően állagmegóvási feltételek megfogalmazására szolgál. Gondoljunk például arra, hogy munkaárok kiemelésekor bizonyos mélység, avagy fejtési hossz elérése után a földfalat megtámasztani szükséges, még mielőtt a talaj nedvességtartalmát (látszat-kohézióját), avagy a környező talaj megtámasztó hatását veszítve beomlik.



FS n = Finish-Start n (Befejezés-Kezdés n) minimum

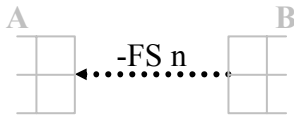
A követő („B”) tevékenység legkorábban csak a megelőző („A”) tevékenység teljes befejezését követő „n” nap elteltével kezdhető. Később lehet, de előbb semmiképp. A kapcsolat tipikusan a technológiailag egymástól erősen függő-, vagy közös-, de erősen korlátos erőforrásokat használó tevékenységek relatív időzítésére szolgál. Gondoljunk például arra, hogy az előregyártott vb. teherhordó szerkezeteknél az oszlopnak állnia kell mielőtt a gerenda rákerül, hogy azt követően a födémpanel is a helyére kerülhessen. Vagy: a monolit vb. pillérnek a betonozást követően el kell érnie bizonyos kort, hogy kizsaluzható, avagy terhelhető legyen. Vagy: a cölöpverő gépnek el



kell hagynia a területet, ahhoz, hogy a cölöpfej készítő brigád a cölöpökhöz hozzá férhessen. Vagy: a darunak le kell helyeznie az éppen emelt elemet ahhoz, hogy a következőt felvehesse. És így tovább.

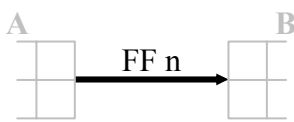
-FS n = Finish-Start n (Befejezés-Kezdés n) maximum

A követő („B”) tevékenység a megelőző („A”) tevékenység befejezését követő legfeljebb “n” napon belül el kell hogy kezdődjék. Hamarabb lehet, de később semmiképp. A kapcsolattal – jellemzően pontszerű szerkezetek létrehozása során – állag-megóvási-, vagy technológiai előírások fogalmazhatók meg. Tipikus példája lehet ennek a finom földmunka (tükör) állagvédelme, ami a szerelőbeton – vagy egyéb ágyazati rétegek – mihamarabbi ráfektetését kívánhatja meg. Vagy: a helyszínen készített, fűrt vb. cölöpök felső betonszegmensének eltávolítása (visszavésés) – a cölöp- és cölöpfej vasalatának összedolgozása-, valamint a felső, gyengén tömörödött betonréteg eltávolítása végett – célszerű, ha a betonozást követő rövid időn belül, még viszonylag kis szilárdságú, könnyen fejthető betonnál történik meg.



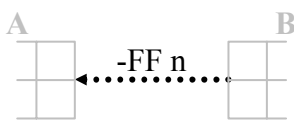
FF n = Finish-Finish n (Befejezés-Befejezés n) minimum

A „megelőző” („A”) tevékenység úgy időzítendő, hogy az a „követő” („B”) tevékenység befejezését megelőzően legalább “n” nappal hamarabb befejeződjék. A kapcsolattal jellemzően időben „visszametsző” feltételeket fogalmazhatunk meg. Például szolgálhat erre a mélyépítésben az eltakarásra kerülő szerkezetek felmérése, vagy a magasépítésben a szerkezeti betonvasalás ellenőrzése- és jóváhagyása – még bebetonozás előtt. Ugyancsak hasznos eszköz lehet rögzített, meg nem szakítható tevékenységek időzítésénél, ha a követő tevékenység (technológiai folyamat) időigénye nyilvánvalóan kisebb, mint az azt megelőző tevékenységé (folyamaté).



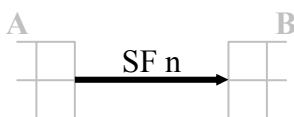
-FF n = Finish-Finish n (Befejezés-Befejezés n) maximum

A követő („B”) tevékenység a megelőző („A”) tevékenység befejezését követő legfeljebb “n” napon belül be kell hogy fejeződjék. Hamarabb lehet, de később semmiképp. A kapcsolattal jellemzően egymást kiegészítő-, avagy egymás mellé rendelt (technológiailag egymástól nem függő) folyamatok időzíthetők. Tipikus példája ennek a projektek befejező fázisában az érdemi szerkezeti- és szakipari munkálatok befejezésének és az ideiglenes létesítmények eltávolításának, avagy a munkaterület kitakarításának és/vagy a környezet rendezésének relatív időzítése.



SF n = Start-Finish n (Kezdés-Befejezés n) minimum

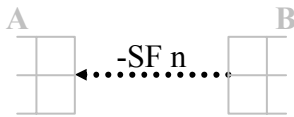
A „megelőző” („A”) tevékenység kezdetét követően még legalább “n” napig a „követő” („B”) tevékenység fenntartandó. Tovább is lehet, de rövidebb ideig semmiképp. A kapcsolattal a tevékenységek megkívánt minimális időbeli átfedését írhatjuk elő. A vele megfogalmazható követelményekre tipikus példa lehet az egymást fel-, avagy kiváltó folyamatok, szolgáltatások időzítése. Például egy jelentős mélyépítési szerkezeti részeket is magába foglaló létesítmény esetén a munkaterület intenzív ideiglenes víztelenítésének feladatát



fokozatosan veszi át az új létesítmény saját víztelenítő rendszere. A végleges rendszer teljes – és bizonyosan megbízható – üzeméig az ideiglenes rendszer is fenntartandó. Vagy: az új termék (új szolgáltatás) általánossá válásáig a régi termék szervize (régii szolgáltatás) – akár törvény által előírtan is – teljeskörűen fenntartandó (garancia, szavatosság).

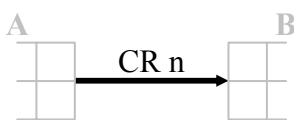
-SF n = Start-Finish n (Kezdés-Befejezés n) maximum

A követő („B”) tevékenység a megelőző („A”) tevékenység kezdését követően legfeljebb „n” napig tartható fenn. Rövidebb ideig lehet, de tovább semmiképp. A kapcsolattal a tevékenységek még elfogadható maximális időbeli „átfedését” írhatjuk elő. A Kezdés-Befejezés minimum kapcsolathoz hasonlóan a vele megfogalmazható követelményekre tipikus példa lehet az egymást fel-, avagy kiváltó folyamatok, szolgáltatások időzítése – csak éppen ellenkező értelemben. Például: az új rendszer (szolgáltatás) munkába állítását (bevezetését) követően a régi rendszer záros időn belül leszerelendő (megszüntetendő). Vagy: az elkészült új üzemszertebe annak munkába állását követően a régi – részleges szanálásra ítélt – üzem adott egységei záros határidőn belül átköltöztetendők.



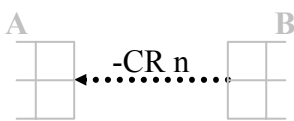
CR n = CRITICAL approach n (Kritikus megközelítés n) minimum

A megelőző („A”) tevékenység és a követő („B”) tevékenység között minden készütségi foknál legalább „n” nap követési idő tartandó. Több lehet, de kevesebb semmiképp. A kapcsolattal jellemzően technológiai szüneteket írhatunk elő – többnyire időben erősen átlapolt-, viszonylag nagy időigényű tevékenységek esetén, a tevékenységek tényleges időtartamától függetlenül. Tipikus példa erre a beton szilárdulása (útalap, sávalap, térbeton), a festék száradása, a földmű konszolidációja, és így tovább.



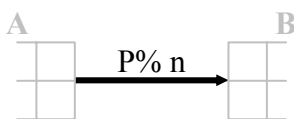
-CR n = CRITICAL approach n (Kritikus megközelítés n) maximum

A megelőző („A”) tevékenység és a követő („B”) tevékenység között minden készütségi foknál legfeljebb „n” nap követési idő tartható. Kevesebb lehet, de több semmiképp. A kapcsolattal leginkább időben erősen átlapolt-, viszonylag nagy időigényű tevékenységek esetén az ún. sérülékeny állapotok védelmét írhatjuk elő – a tevékenységek tényleges időtartamától függetlenül. Tipikus példa erre útépitésnél a „nyitott szemszerkezetű” aszfalt kötőréteg, melynek elszennyeződéstől való védelme érdekében a rákerülő záró kopóréteget rövid időn (pl: 2 nap) belül meg kell építeni.



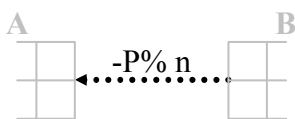
P% n = Progression n % (Készütségi fok n %) minimum

A megelőző („A”) tevékenység és a követő („B”) tevékenység között minden készütségi foknál legalább „n” %-os előny biztosítandó. Több lehet, de kevesebb semmiképp. A kapcsolat alkalmazására tipikus példa lehet – mondjuk vonalas létesítmény esetén – a biztonságos és hatékony munkavégzéshez szükséges minimális térköz biztosítása. Ez esetben a minimális „térköz” (szelvényhossz) a teljes építési feladat (hossz) százalékában jeleníthető meg. A kapcsolat alapvetően „rögzített időtartamú, meg nem szakítható tevékenységek” között értelmezhető.



-P% n = Progression n % (Készültségi fok n %) maximum

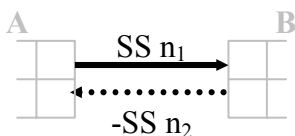
A megelőző („A”) tevékenység és a követő („B”) tevékenység között minden készültségi foknál legfeljebb “n” %-os előny biztosítható. Kevesebb lehet, de több semmiképp. A kapcsolatot leginkább “munkaterület-korlátozásra” használhatjuk. Gondoljunk – mondjuk – a közműépítési feladatokra, ahol az egyidejűleg munkába vehető szakasz hosszát a település működtethetőségének fenntartása érdekében a helyi önkormányzat szigorúan korlátozza. Ez esetben a feltárható közműszakasz hossza a teljes építési feladat (hossz) százalékában jeleníthető meg. Vagy: előregyártásnál (betonelemek, vasalatok, acélszerkezetek) a gyártás és a bedolgozás közötti időt a rendelkezésre álló köztes tárolási kapacitás függvényében írhatjuk elő. Ez esetben az ideiglenesen tárolható mennyiség a teljes építési mennyiség százalékában jeleníthető meg. A kapcsolat alapvetően „rögzített időtartamú, meg nem szakítható tevékenységek” között értelmezhető.



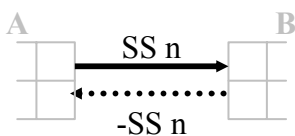
A tevékenységek egymáshoz viszonyított időbeli helyzetét – természetesen – „alulról” és „felülről” egyaránt tájékoztathatjuk. A leggyakrabban előforduló ilyen igényekre szolgáljanak az alábbi példák:

„Korlátozott követés”

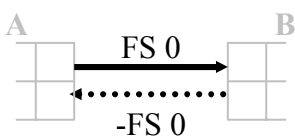
A követő („B”) tevékenység a megelőző („A”) tevékenység kezdését követően legalább „n₁” nappal később, de legfeljebb „n₂” napon belül elkezdendő. Gondoljunk arra a már fentebb említett esetre, amikor az árok kiemelését a földfal megtámasztása kell, hogy kövesse. Ekkor a ducoló brigádnak várnia kell, míg a kiemelést végző gép biztonságos távolságba ér, ugyanakkor a ducolást – ezt követően – minél hamarabb el kell végeznie. Az alsó-felső korlátozás természetesen más kapcsolatokkal is értelmezhető. Lényeg, hogy az időzítésre több-, de alulról és felülről egyaránt korlátozott megoldás legyen.

**„Kényszer követés”**

A követő („B”) tevékenység szigorúan a megelőző („A”) tevékenység kezdését követő n nap elteltével kezdendő. Sem előbb, sem később. Az előírás értelmezéséhez gondoljunk például a kivitelező építőipari projektekre jellemző nagy mennyiségű – és esetleg nagy távolságú – szállítási feladatokra. Nagy méretű és bonyolult szállítandó egységek és erősen korlátozott építéshelyi tárolási- és emelési kapacitások esetén az egymást követő szállítmányokat a gyártó helyről igen szigorú rendben- és időzítéssel kell indítani. Az ilyen „egyesélyes” korlátozás természetesen más kapcsolatokkal is elérhető. Lényeg, hogy az időzítésre egyetlen megoldás legyen. (A „Kényszer követés” valójában a „Korlátozott követés” egy speciális esete.)

**„Azonnali követés”**

A követő („B”) tevékenység a megelőző („A”) tevékenység befejezését követően késedelem nélkül, azonnal kezdendő. Sem előbb, sem később. Az előírás alkalmazására legjellemzőbb példa a viszonylag nagy értékű-, vagy a megvalósítás során kiemelt jelentőségű (“vezér”) erőforrások alkalmazása. (Például a toronydaru,



a cölöpverő gép, vagy utépítésnél a finisher.) Az alsó korláttal a tevékenységek időbeli átlapolását védjük ki – tehát ugyanaz az erőforrás alkalmazható. A felső korlátozással pedig a drága állás-időket igyekszünk kizárni. Az ilyen “egyesélyes, átlapolás- és megszakítás nélküli” korlátozás természetesen más kapcsolatokkal is elérhető. (Az „Azonnali követés” a „Kényszer követés” egy speciális esete.)

Megjegyzések:

- A kapcsolatok értelmezésénél az idő-paraméterek („korlát értékek”) egyszerűbb érthetősége végett többnyire “n” nap-ot emlegettünk. Természetesen a „nap” egység helyett bármilyen – a hálós modellezés alap időegységéül választott – időegység (óra, műszak, hét, stb.) is használható. Maga az időkorlát-paraméter (n) elvileg tetszőleges valós (pozitív, negatív, nulla) – de jellemzően egész – szám lehet.
- Az időkorlát paraméterek értékének megválasztásánál az esetek többségében a rendelkezésre álló-, valamint a munkálatok hatékony elvégzéséhez szükséges munkaterület nagysága (a munkafolyamat kiszolgálása, alkalmazott erőforrások, gépek, anyagok helyigénye, munkavédelmi szempontok, stb.), továbbá a tervezett munka-intenzitás (pl. napi előrehaladás) lehet az elsődleges támpont. Viszonylag kis számú azon esetek köre, amikor az időkorlát paramétere pusztán az időbeliség alapján meghatározható. Ilyen például a technológiai szünet (szilárdulás, száradás, konszolidáció, kötés, ülepedés, stb.), vagy a triviális sorrendiség (pl: FS0, Befejezés-Kezdés minimum, zérus idő-paraméterrel).
- A felső korlát (maximum) típusú kapcsolatokkal körültekintően kell bánni, mert könnyen technológiai fordulásokra, vagy ellentmondó feltételrendszerre vezethetnek. Időparaméterüket alapos megfontolások után célszerű megválasztani, és magát a korlátozást általában párban, valamely – a technológiát biztosító – alsó korlát (minimum) típusú kapcsolattal együtt célszerű alkalmazni.
- Több kapcsolat itt közölt értelmezésénél felmerülhet a gyanú, hogy a „megelőző” tevékenység nincs feltétlenül ok-okozati kapcsolatban a „követő” tevékenységgel, sőt, a „követő” tevékenység időben hamarabb bonyolódhat, mint a „megelőző”. Ez nincs ellentmondásban a háló logikájával, hiszen a „megelőző-követő” szópár alapvetően a viszonyítás irányára utal: mihez viszonyítok mit. Valójában – a széleskörűen elterjedt szóhasználat helyett – helyesebb lenne „viszonyítási alap-“ és „viszonyított” tevékenységeket említeni. A korlátozásokat (τ_{ij}) viszont minden esetben a „viszonyított” (π_j) és a „viszonyítási alap” (π_i) potenciál különbségére ($\pi_j - \pi_i$) értjük.
- **Emlékeztetőül:** A minimális („alsó korlát”) típusú kapcsolatok megjelenítésénél a folyamatos nyíl a viszonyítás irányát, az idő-paraméter pedig magát az alsó korlát értéket jelöli, míg maximum („felső korlát”) típusú kapcsolatoknál a viszonyítás fordított irányát szaggatott nyíl, a felső korlát értéket pedig az idő-paraméter jelöli, miközben a kapcsolat típusát jelölő betűkód elé „mínusz” jel (-) kerül. Mindez utóbbi alapvetően a mögöttes matematikai összefüggésekre utal, hiszen bármely maximum („felső korlát”) típusú kapcsolat egyenértékűen helyettesíthető egy fordított viszonyítási irányú, idő-paraméterét tekintve ellentétes előjelű minimum („alsó korlát”) típusú kapcsolattal. Az előbbi jelöléseket felhasználva: $\pi_j - \pi_i \leq \tau_{ij} \quad \equiv \quad \pi_i - \pi_j \geq -\tau_{ij}$.

Az időelemzés eredményeinek értelmezése

A hálós időelemzés eredményei (határ-időpozíciók, idő-potenciálok) mindig folytonos, relatív időtengely mentén értendők, ahol a legkisebb időpotenciál értéke zérus ($\pi_i^{\min}=0$). Potenciál-értékek esetén a szakirodalom mindig relatív, nem-negatív értékeket ért. Megjegyzendő, hogy időtervezési értelemben, illetve a belső összefüggések szempontjából érdektelen, ha az origó („0” időpotenciál) „téves” kijelölése (nem a megfelelő „forráshoz” történő rendelése) következtében néhány „potenciál” negatív értéket vesz fel. A nem-negatív értékekhez a feladat-analógia okán „szoktunk” ragaszkodni.

T = Total execution time (Teljes átfutási idő):

A teljes átfutási idő értelmezése – utalva a feladatra analógiákra:

- 1) A relatív (idő)korlátokat kielégítő „minimális” (idő)potenciál-rendszer legnagyobb elemének értéke. (Avagy legnagyobb és legkisebb elemének különbsége, ahol a legkisebb érték jellemzően zérus.)
- 2) A hálós modellen (mint súlyozott, irányított gráfon) található leghosszabb út hossza.
- 3) A modellben szereplő valamennyi feladat elvégzéséhez minimálisan szükséges idő.

ES = Early Start (Korai kezdés):

A tevékenység hálós logikai kapcsolat- és tevékenységidő korlátok által meghatározott lehetséges legkorábbi kezdése.

LS = Late Start (Késői kezdés):

A tevékenység hálós logikai kapcsolat- és tevékenységidő korlátok által meghatározott, a projekt (lehetséges legrövidebb) teljes átfutási idejét még nem befolyásoló, megengedhető legkésőbbi kezdése.

EF = Early Finish (Korai befejezés):

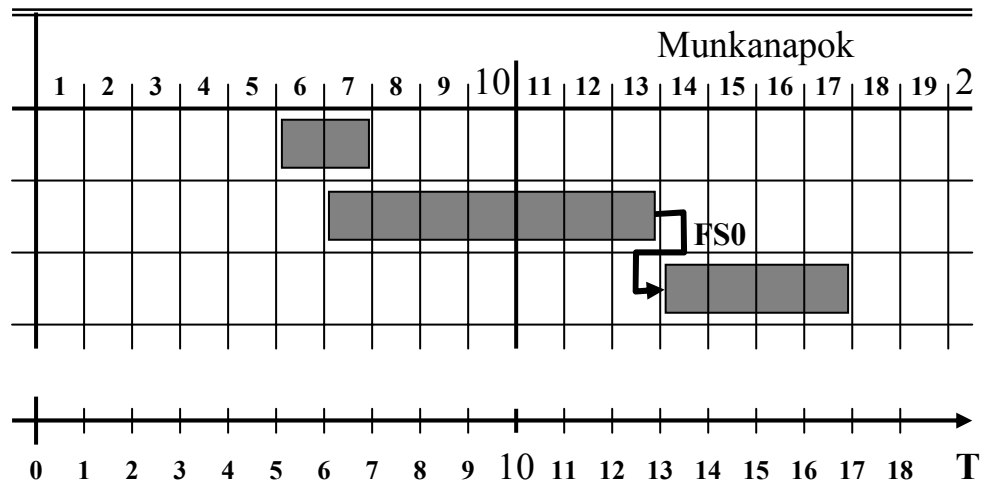
A tevékenység hálós logikai kapcsolat- és tevékenységidő korlátok által meghatározott lehetséges legkorábbi befejezése.

LF = Late Finish (Késői befejezés):

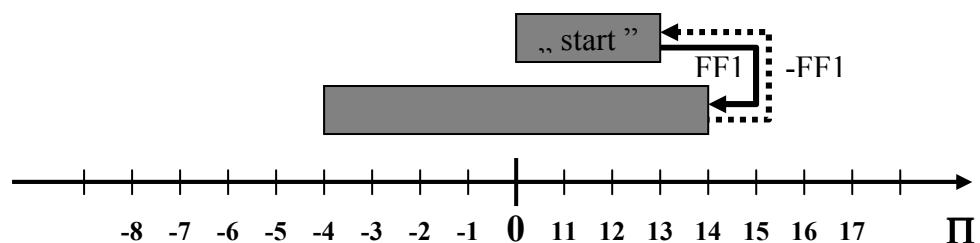
A tevékenység hálós logikai kapcsolat- és tevékenységidő korlátok által meghatározott, a projekt (lehetséges legrövidebb) teljes átfutási idejét még nem befolyásoló, megengedhető legkésőbbi befejezése.

Megjegyzések:

- Viszonylag gyakori hiba kezdő háló-elemzőknél, hogy az időpotenciálok kezelésénél a tőszámnév/sorszámnév „problémába” belekeverednek. Folyamatos időtengelyen, például munkanap időegység használatakor, a „0-1” időintervallum az 1. munkanap; az „1-2” időintervallum a 2. munkanap; stb. Az a két napos munkafolyamat, mely a folyamatos időtengelyen – mondjuk – a „5-7” időintervallumban helyezkedik el, a 6. és 7. munkanapra esik. És így tovább. ... Avagy: Ha a megelőző tevékenység legkorábban – mondjuk – a 13. napon ér véget, s az egyedül őt követő egyetlen tevékenységhez FS0 kapcsolat fűzi, akkor a megelőző tevékenység legkorábbi befejezésének „időpotenciálja” és az őt követő tevékenység legkorábbi kezdésének „időpotenciálja” egyaránt 13, jöllehet a megelőző tevékenység a 13. munkanapon ér véget, a követő pedig a 14.-en kezdődik. ... (Lásd alább.)



- A hálós idő-modell kínálja eszközrendszerekből adódóan szándékozatlanul, avagy tudatosan előfordulhat olyan helyzet, hogy néhány tevékenység időpotenciáljai negatív tartományba esnek (amit, ugye, általában nem értelmezünk). A helyzet műszakilag azonban nem feltétlenül ellentmondásos, hiszen az így megjelenő ütemterv (részlet) úgy is értelmezhető, hogy a „negatív időtartományba” eső „előkészítő”, avagy „kísérő” (mellérendelt) tevékenységeket már régebben el kellett volna kezdeni ahhoz, hogy a modellezett projekt a megjelölt (relatív) határidőponttal egyáltalán „elkezdhető” legyen. Egyébiránt a modellbeli belső összefüggések a „0” („kezdő”) időpotenciál felvett helyére nézve teljesen közömbösek, sőt, elképzelhető az egész projekt „hátrafelé” történő ütemezése is („ahhoz, hogy a projekt adott határidőre elkészüljön legkésőbb mikor és mit kell tenni”) – mint ahogy azt számos számítógépes szoftver opcióként fel is kínálja. Az eredményül kapott potenciál-rendszerek legfeljebb egymás $\delta\pi$ potenciállal (az időtengelyen) „eltolt” transzponáltjai.



Tekintettel az elvileg lehetséges tevékenységidő-korlátozások sokféleségére a „tartalékidőket” a tevékenységek kezdésére és befejezésére egyaránt indokolt külön-külön meghatározni, illetve értelmezni.

TF = Total Float (Teljes tartalékidő):

A tevékenység adott időpontjának (kezdésének, avagy befejezésének) lehetséges legnagyobb mértékű késedelme anélkül, hogy az a projekt teljes átfutási idejét veszélyeztetné, feltéve, hogy az adott tevékenység valamennyi mértékadó megelőző tevékenységét lehetséges legkorábbi időzítése szerint lehet(ett) végrehajtani.

FF = Free Float (Szabad tartalékidő):

A tevékenység adott időpontjának (kezdésének, avagy befejezésének) lehetséges legnagyobb mértékű késedelme anélkül, hogy az a projekt bármely más tevékenységének akár legkorábbi időpozíció szerinti kivitelezhetőségét veszélyeztetné, feltéve, hogy az adott tevékenység valamennyi mértékadó megelőző tevékenységét lehetséges legkorábbi időzítése szerint lehet(ett) végrehajtani.

CF = Conditional Float (Feltételes tartalékidő):

A tevékenység adott időpontjának (kezdésének, avagy befejezésének) lehetséges legnagyobb mértékű késedelve anélkül, hogy az a projekt teljes átfutási idejét veszélyeztetné, feltéve, hogy az adott tevékenység valamennyi mértékadó megelőző tevékenységét megengedhető legkésőbbi időzítése szerint lehet(ett) végrehajtani.

IF = Independent Float (Független tartalékidő):

A tevékenység adott időpontjának (kezdésének, avagy befejezésének) lehetséges legnagyobb mértékű késedelve anélkül, hogy az a projekt bármely más tevékenységének akár legkorábbi időpozíció szerinti kivitelezhetőségét veszélyeztetné, feltéve, hogy az adott tevékenység valamennyi mértékadó megelőző tevékenységét megengedhető legkésőbbi időzítése szerint lehet(ett) végrehajtani.

CP = Critical Path (Kritikus út):

A kritikus út definíciói – utalva a két feladat analógiára:

- 1) Mindazon kitüntetett határ-időpontok (tevékenység kezdések és/vagy befejezések), melyek lehetséges legkorábbi- és megengedhető legkésőbbi idő-potenciáljai megegyeznek, valamint a közöttük szélső (korlát) értékükkel teljesülő relatív időkorlátok (tevékenységidő korlátok, avagy kapcsolatok) által alkotott részgráf.
- 2) A hálós modellen (mint összefüggő súlyozott, irányított gráfon) a pozitív forrás(ok) és pozitív nyelő(k) közötti leghosszabb utak alkotta részgráf.

Megjegyzések:

- A tevékenységidők rugalmasabb korlátozásának lehetőségéből adódóan („befüggesztett tevékenység”, „megszakítható tevékenység”, „feltételes tevékenység”, „rugalmas időtartamú, meg nem szakítható tevékenység”) indokolt a tevékenységek kezdésének és befejezésének egyaránt (önállóan) meghatározni és értelmezni (értékelni) a tartalékidejeit. A széleskörben elterjedt, leginkább használt (MPM/PDM) idő-modellezési technikáknál alkalmazot rögzített idejű, nem megszakítható tevékenységek esetén a megfelelő kezdési- és befejezési tartalékidők azonosan egyenlők.
- A független tartalékidő – amennyiben azt eleve nem korlátozzuk (Lásd CPM^{time} modellnél) – számszakilag negatív értéket is felvehet, ami abszolút-értékével arra utal, hogy a közbülső esetek közül milyen időtartományon belül válhat az adott tevékenység adott időpontjának (kezdésének, avagy befejezésének) időhelyzete a projekt más tevékenységei számára meghatározóvá. A pozitív független tartalékidő az adott tevékenység-határidőpont (kezdés, avagy befejezés) időzítésének tovaggyűrűző hatásoktól mentes, szabad „mozgás-terjedelmét” adja meg.
- Számos járatos szoftver megengedi a „kritikus út” bizonyos „tartalékidő-túréssal” történő értelmezését és megjelenítését. (Nem csak a „0”, de adott értéknél nem nagyobb tartalékidejű tevékenységeket is kritikusként jelenítheti meg a szoftver). Ez alapvetően eredményközlési opció, és nem a matematikailag mértékadó összefüggés-rendszert azonosítását szolgálja. (Segítségével – kellően nagy „túrés”-érték beállításával – akár az összes tartalékidő „eltüntethető”.)
- Számos járatos szoftver felkínálja a hálós logikai feltételek mellett naptári feltételek és egyéb, például erőforrás-allokációs feltételek beépítését a projekt-modellbe. Ezen vegyes feltételek eredményeként részben, vagy egészben „eltűnhet” a kritikus út. (... Ha egyszer nem a hálós feltételek a mértékadók!) A tisztán logikai kapcsolatokból építkező hálós időtervnek (súlyozott irányított gráfnak) mindig van leghosszabb, azaz „kritikus” útja, amely – konvencionális hálós

idő-modell esetén – az egyetlen kezdőpont („START”) és az egyetlen végpont („END”) között létesít kapcsolatot. *(A több kezdő és/vagy végpontú hálós időmodellekről az előzőekben – más összefüggésben – már esett szó.)*

Kapcsolatok (korlátozások) dominanciája

A fejezet első részében már megállapítottuk: „Azon modellbeli összetevők, vagy összefüggések (korlátozások) között, melyek idő-tartományt határoznak meg, nincsen érdemi különbség. E szerint nincs különbség bármilyen („késleltetési”) időparaméterrel bíró kapcsolat (mint relatív időkorlát), és bármilyen értelemben korlátozott tevékenységidő között.” A korábban már ismertetett, tevékenységeknél értelmezett tartalékidőkhöz hasonlóan a kapcsolatoknál is értelmezhetjük és meghatározhatjuk a „teljes-”, „szabad-”, „feltételes-” és „független” **„kapcsolati tartalékidőt”**. Az „árnyalatnyi” különbség abban jelentkezik, hogy míg a tevékenységek tartalékidőivel az egyes határidőpontok (kezdések és/vagy befejezések) esetleges elmozdulásának tovagyrúzó hatásait vizsgáljuk, a kapcsolatok dominanciájának vizsgálatánál arra vagyunk kíváncsiak, hogy az egyes relatív időkorlátozások (tevékenységidő korlátok, kapcsolatok) mikor és milyen mértékben válnak mértékadóvá. A számszerű meghatározások a CPM^{time} modellnél megismertekhez hasonlóan történhetnek, az éppen vizsgált kapcsolat CPM^{time}-beli „tevékenység-élként” történő „megfeleltetésével”, és anynyi különbséggel, hogy a „független” (kapcsolati) tartalékidő értelmezését nem feltétlenül korlátozzuk a nem-negatív értékekre.

Passzív (indomináns) kapcsolat (korlátozás):

Az időelemzés alapján a tevékenységek sem szélső-, sem köztes idő-helyzetében érvényre nem jutó kapcsolat, korlátozás ($\pi_j - \pi_i < \tau_{ij}$; $\pi_i - \pi_j < -\tau_{ij}$). A kapcsolat (korlátozás) illetően jellegére a nullánál nagyobb értékű „független” kapcsolati tartalékidő figyelmeztet. Tekintve, hogy a hálós időmodellel szemben alapvető elvárásunk annak állékonysága, az ilyen kapcsolat nem feltétlenül dobandó ki a modellből, hiszen egyébként fontos logikai információt hordozhat, és az esetleges módosítások során még mértékadóvá válhat.

Szub-domináns kapcsolat (korlátozás):

Az időelemzés alapján a tevékenységek szélső (legkorábbi, avagy legkésőbbi) időhelyzetében ugyan nem mértékadó, de köztes idő-helyzetben mértékadóvá válni tudó kapcsolat. A kapcsolat (korlátozás) illetően jellegére a nullánál nagyobb „szabad-” és „feltételes-”, de nullánál nem nagyobb értékű „független” kapcsolati tartalékidő figyelmeztet. Az ilyen (rejtetten mértékadó) kapcsolatokra különösen oda kell figyelni a tevékenységek erőforrás-allokációs célú, („teljes-”, „szabad-” és „feltételes-”) tartalékidőkön belüli allokációjánál, a „tényleges” ütemterv kialakítása során.

Domináns kapcsolat (korlátozás):

Az időelemzés alapján a tevékenységek szélső (legkorábbi és/vagy legkésőbbi) időhelyzetében mértékadó kapcsolat, korlátozás ($\pi_j - \pi_i = \tau_{ij}$; $\pi_i - \pi_j = -\tau_{ij}$). A kapcsolat (korlátozás) illetően jellegére a nulla értékű „szabad-”, vagy „feltételes-”, de nullánál nagyobb értékű „teljes” kapcsolati tartalékidő figyelmeztet. Ezek azok a kapcsolatok (relatív idő-korlátok), melyek – a tevékenységek időkorlátaival együtt – az időelemzés eredményeképpen nyert „korai” és „késői” idő-potenciál rendszert (belső határidőpontokat) meghatározták.

Kritikus kapcsolat (korlátozás):

Az időelemzés alapján kritikus tevékenységek (határ-időpontok) közötti mértékadó (domináns) kapcsolat (korlátozás). A kapcsolat (korlátozás) illetően jellegére a nulla értékű „teljes” kapcsolati tartalékidő figyelmeztet. Ezek azok a kapcsolatok (korlátozások), melyek a projekt teljes átfutási idejének minimumát meghatározzák. Különösen kiemelt szerephez jutnak az időterv módosításakor, illetve a teljes átfutási idő (kritikus út) értékelésekor.

Tevékenységidő korlátok dominanciája, „kritikussági” típusok

Az időütemtervek értékelésénél a kritikus út(ak), ezen belül pedig a kritikus tevékenységek kiemelt szerephez jutnak. Az egyidejűleg többféle (SS, SF, FF, FS) kapcsolatot megengedő hálós időtervezési/modelllezési technikáknál (MPM/PDM, GTM) a kritikus út elemzésén belül különös jelentőséggel bír a kritikus tevékenységek (azon belül a tevékenységidő korlátok) további vizsgálata. E vizsgálatok elengedhetetlenek az esetlegesen szükségessé váló módosítások, beavatkozások mikéntjének megválasztásánál, a remélt változást nem eredményező-, avagy a kifejezetten a szándékozottal ellentétes hatást kiváltó beavatkozások elkerülése végett.

Az MPM modellnél ismertettekhez hasonlóan, de annyi különbséggel, hogy nem feltételezzük a tevékenység-időtartam egyetlen, rögzített értéken történő (alsó-felső) korlátozását:

„Pozitív kritikus” tevékenység:

A kritikus tevékenység időtartamának alsó korlátja („megszakítható tevékenységek”, „rugalmas időtartamú, meg nem szakítható tevékenységek”, „rögzített időtartamú, meg nem szakítható tevékenységek”) mértékadó a háló (projekt) teljes átfutási idejére nézve. Felismerni az adott tevékenységbe „beérkező”- és az onnan „távozó” kritikus kapcsolatok alapján lehet. E szerint: a kritikus út a tevékenység „kezdetébe” (kezdési határidő-pontjához) érkezik, és „végéből” (befejezési határidő-pontjából) indul tovább. Tekintve, hogy a tevékenység-él típusú hálós időtervek (PERT, CPM) „MPM nyelven” csak a FS0 („Befejezés-Kezdés minimum 0”) típusú kapcsolatot kezelik (csomópont), ezen technikáknál valamennyi kritikus tevékenység „pozitív kritikus”. „Pozitív kritikus” tevékenység időtartamának (időtartama alsó korlátjának) növelése azonnali (a módosítás nagyságával azonos mértékű) növelő hatást gyakorol a háló (projekt) teljes átfutási idejére. *Időtartama (alsó időkorlátja) ellentétes irányú változásának (csökkentésének) következménye az alternatív kritikus utak (ágak) létének, illetve a még nem kritikus, ú.n. „szub-kritikus” utak kritikussá válásának a függvénye. Mindössze annyi bizonyos, hogy annak következtében nem nő a teljes átfutási idő.*

„Negatív kritikus” tevékenység:

A kritikus tevékenység időtartamának felső korlátja („feltételes tevékenységek”, „rugalmas időtartamú, meg nem szakítható tevékenységek”, „rögzített időtartamú, meg nem szakítható tevékenységek”) mértékadó a háló (projekt) teljes átfutási idejére nézve. Felismerése: A kritikus út a tevékenység „végébe” (befejezési határidő-pontjához) érkezik, és „kezdetéből” (kezdési határidő-pontjából) indul tovább. „Negatív kritikus” tevékenység időtartamának (időtartama felső időkorlátjának) csökkentése (a módosítás „irányával” ellentétesen, de abszolút-értékben azonos nagysággal) azonnali növelő hatást gyakorol a háló (projekt) teljes átfutási idejére. *Időtartama (felső időkorlátja) ellentétes irányú változása (növelése) alapvetően csökkenteni „igyekszik” a teljes átfutási időt, de tényleges következménye az alternatív kritikus utak (ágak) létének, illetve a még nem kritikus, ú.n. „szub-kritikus” utak kritikussá válásának a függvénye. Annyi azonban bizonyos, hogy következtében nem nő a teljes átfutási idő. (Erőforrás-szint csökkentési lehetőség!)*

„Kezdés (látszat) kritikus” tevékenység:

A kritikus tevékenység időtartamának korlátjai – már, ha van egyáltalán ilyen – nem mértékadók a háló (projekt) teljes átfutási idejére nézve. Felismerése: A kritikus út a tevékenység „kezdetébe” (kezdési határidő-pontjához) érkezik, és úgy szint a „kezdetéből” (kezdési határidő-pontjából) indul tovább. (Maga a tevékenység nem része a kritikus útnak.) „Kezdés kritikus” tevékenység időtartamának (időtartama korlátainak) kis mértékű változtatása nincs azonnali hatással a háló (projekt) teljes átfutási idejére. *Magát a „tevékenységet” (munkavégzést, folyamatot) kritikusként kezelni valójában nem is lenne indokolt. Hacsak nem a rendelkezésre bocsátandó erőforrások időzítése (pl. „munkaterület átadás”) apropóján.*

„Befejezés (látszat) kritikus” tevékenység:

A kritikus tevékenység időtartamának korlátjai – már, ha van egyáltalán ilyen – nem mértékadók a háló (projekt) teljes átfutási idejére nézve. Felismerése: A kritikus út a tevékenység „végébe” (befejezési határidő-pontjához) érkezik, és úgy szint a „végéből” (befejezési határidő-pontjából) indul tovább. (Maga a tevékenység nem része a kritikus útnak.) „Befejezés kritikus” tevékenység időtartamának (időtartama korlátainak) kis mértékű változtatása nincs azonnali hatással a háló (projekt) teljes átfutási idejére. *Magát a „tevékenységet” (munkavégzést, folyamatot) kritikusként kezelni valójában nem is lenne indokolt. Hacsak nem a rendelkezésre bocsátott erőforrások „visszanyerésének” időzítése (pl. „munkaterület átvétel”, „elszámolás”) apropóján.*

„Határidő (végponti) kritikus” tevékenység:

A kritikus tevékenység időtartamának korlátjai – már, ha van egyáltalán ilyen – nem mértékadók a háló (projekt) teljes átfutási idejére nézve. Felismerése: A kritikus út a tevékenység „kezdetébe” (kezdési határidő-pontjához) és „végébe” (befejezési határidő-pontjához) egyaránt beérkezik, és „kezdetéből” (kezdési határidő-pontjából) és „végéből” (befejezési határidő-pontjából) egyaránt tovább indul (több kritikus ág), de a tevékenység időtartamának korlátai – már ha vannak egyáltalán – nem mértékadók, nem részei a mértékadó feltétel/korlát rendszernek. Ez a helyzet csak „megszakítható”, „feltételes”, „befüggesztett” és „rugalmas időtartamú, nem megszakítható” tevékenységek esetében fordulhat elő. *Említett típusú tevékenységeknél azonban magának a tevékenység-időtartamnak a meghatározását is a hálós időelemzéstől vártuk....*

„Abszolút kritikus” tevékenység:

A kritikus tevékenység időtartamának alsó- és felső korlátjai („rugalmas időtartamú, meg nem szakítható tevékenységek”, „rögzített időtartamú, meg nem szakítható tevékenységek”, de ilyen összefüggésben csak utóbbi jöhet szóba) egyaránt mértékadók a háló (projekt) teljes átfutási idejére nézve. Felismerése: A kritikus út a tevékenység kezdetébe (kezdési határidő-pontjához) és végébe (befejezési határidő-pontjához) egyaránt beérkezik, és kezdetéből (kezdési határidő-pontjából) és végéből (befejezési határidő-pontjából) egyaránt tovább indul (több kritikus ág), sőt maguk – az azonos értékű – időtartam-korlátok is részei a kritikus útnak, azaz a mértékadó feltétel/korlát rendszernek. Az „abszolút kritikus” tevékenység időtartamának (időtartam-korlátainak együttes,) bármilyen értelmű változtatása (csökkentése, avagy növelése) azonnali – abszolút értékében a változtatás mértékével azonos nagyságú – növelő hatással bír a háló teljes átfutási idejére. *Ilyen eset tipikusan – de nem kizárólagosan – szinkronizált szalagok valamely belső rész-szalagjánál fordul(hat) elő.*

Számítások a GTM hálón

Az általános időmodell (GTM) megfeleltetéseivel felépített hálós időmodellben a „minimális” és „maximális” időpotenciálok, avagy „legkorábbi-” és „legkésőbbi határ-időpontok” meghatározására akár az eddigiekben tárgyalt eljárások közül is – kisebb módosításokkal – több is kínálkozik:

1. A közvetítő pontok módszerével (~ módosított Floyd-Warshall algoritmus segítségével ~), a feladat minden további nélkül megoldható. Az eredendően számítógépre kifejlesztett algoritmusnak nagy hátránya a relatíve nagy („ n^3 ”) számítási igény, illetve a szükséges operatív tár („adattömb”) nagy mérete. Manuális számításokra csak demonstratív jelleggel, kifejezetten kis méretű feladatok esetén ajánljuk. Ugyanakkor a rendelkezésre álló számítástechnikai eszköztár műveleti- és (operatív) tár-kapacitásának robbanásszerű növekedése e kapacitások korlátozó voltának átértékelésére készítheti az alkalmazót (szoftverfejlesztőt).
2. Ugyancsak eredendően a számítástechnikához köthető az az „iteratív” algoritmus, mely minden határidő-ponthoz egy-egy kezdeti „0” időpotenciál rendelése után a (relatív) korlátozások (feltételek, kapcsolatok, időtartam korlátok) halmazán rendre, többször (több ciklusban) végigha-

ladva, az időpotenciálok folyamatos korrigálásával (legkorábbi idők meghatározásánál szigorúan csak a megfelelő potenciálok növelésével, legkésőbbi időpontok számításánál a megfelelő potenciálok csökkentésével) „elégíti ki” a feltételeket. Bizonyítható, hogy „konzisztens” („nem ellentmondó”) korlátozások esetén legfeljebb a korlátozások számának megfelelő számú ciklusban a korlátozásokat kielégítő potenciál-rendszer(ek) előállítható(k). (Minden ciklusban legalább egy potenciál a „helyére kerül”.) A ciklusok leállításának feltétele, hogy az utoljára végrehajtott ciklusban egyik potenciál-értéket se kelljen módosítani (megoldás), avagy a potenciál-érték módosításokat tartalmazó ciklusok száma haladja meg a korlátozások számát (nincs megoldás, ellentmondó, úgymond „inkonzisztens” a feltételrendszer).

- 3/a. A leghosszabb út keresési, illetve minimális potenciál feladatoknál bemutatott „felgöngyölítéses” eljárások szintén alkalmazhatók, igaz ezeknél az esetleges (nem-pozitív) hurkok a számítások egy részének iteratív (vissza-visszatérő) jelleggel történő végrehajtását is megkövetelhetik.
- 3/b. A leginkább hasonló „megjelenés” apropóján a kézi számításokra az MPM/PDM modellnél bemutatott számítási minta-feladat gondolatmenetét javasoljuk, annyi eltéréssel, hogy az egy-egy tevékenységnél meghatározásra kerülő kezdési- és befejezési időpotenciálok közötti összefüggést („ha az egyiket ismerem, ismerem a másikat is”) nem lehet annyira mechanikusan kezelni, mint azt ott tettük, hanem az érvényesíteni szándékozott tevékenységidő korlátok szerint kell eljárni. Ez utóbbi szemléltetésére szolgáljon az alábbi minta-feladat.

Gyakorló feladatok:

VÉGSZÓ

Végezetül – mintegy csattanóként – álljon itt, a könyv (fejezet) végén négy „bűvös” kérdés a hálós idő-modellezés témaköréből!

(Egyetemi előadásokon, külső tanfolyamokon, esetleg már több éves hálótervezési gyakorlattal bíró előkészítő-, tervező-, irányító szakembereknek tartott továbbképzéseken is feltehetőek e kérdések – akár bevezetőként is. Hiszen aki mind a négyre tudja (és érti) a szabatos választ, annak nincs mi újat mondani e témában – hazamehet. Talán „gonoszság” illet állítani, de – több évtizedes oktatási tapasztalatok alapján (halkan) lehet mondani, hogy – az ilyen jellegű előadások esetében – az egymás után feltett kérdésekre az egyre „bátrabb” válasz vélhetően az egyre mélyülő csend lesz.)

Ha valaki nem tudja a válaszokat, vagy nem biztos bennük, tükröt tartva az alábbi bekeretezett rész fölé, viszonylag gyorsan elolvashatja azokat. Azért tükörrel, mert annak használata során a vélhetőleg önmagát is megpillantó olvasó láthatja: ő az, aki ennyi olvasás után sem tud határozott választ adni a feltett kérdésekre. ... ☺

Ím a kérdések:

1. Tevékenység-él típusú hálós időmodellben (ütemterven) tartalékidővel nem rendelkező tevékenység időtartama δ értékkel nő. Mi lesz a háló teljes átfutási idejével?
2. Tevékenység-él típusú hálós időmodellben (ütemterven) tartalékidővel nem rendelkező tevékenység időtartama δ értékkel csökken. Mi lesz a háló teljes átfutási idejével?
3. Tevékenység-csomó típusú hálós időmodellben (ütemterven) tartalékidővel nem rendelkező tevékenység időtartama δ értékkel nő. Mi lesz a háló teljes átfutási idejével?
4. Tud-e olyan esetet említeni, amikor egy tartalékidővel nem rendelkező tevékenység egyaránt „pozitív”- és „negatív kritikus”?

szakított tevékenységűek, szimultánban szűkös vagy nem szűkös rész-összeállítás esetében

4. Igen, $\Delta_{\text{max}} \leq \delta$ típusú hálós idő-modellek alkalmazásakor, rögzített idejű, még nem teljes aktivitási időben végzett munka során azonos értékű (szimultán-) értéket nem figyelnek. A "Bőve" típusú hálós modellek esetében értéktől függetlenül mindig a hálós tevékenységűek közötti kritikus hálósok közötti különbség (lásd: kritikusok közötti különbség) a hálós teljes aktivitási idejére nézve rögzített, melyesetben az azott

3. Az itt a $\Delta_{\text{max}} \leq \delta$ típusú hálós modellekben, ha egy kritikus tevékenység időtartama megnő, annak (szűk) értékek különbsége ($\delta \leq \Delta_{\text{max}}$)

aktivitási idejében a csökkenés mértéke az aktivitás- illetve szimultán kritikusok közötti különbség értékeivel azonos értékű csökkenésként jelenhet meg a hálós teljes

5. Az itt a $\Delta_{\text{max}} \leq \delta$ típusú hálós modellekben, ha egy kritikus tevékenység időtartama csökken, az

növekedése azonos értékű megjelölés a hálós teljes aktivitási idejében ($\Delta = 0$)

1. Az itt a $\Delta_{\text{max}} \leq \delta$ típusú hálós modellekben, ha egy kritikus tevékenység időtartama megnő, annak

Az igazság:

Irodalomjegyzék

1. Andrásfai Béla, *Gráfelmélet*, Polygon Könyvtár, JATE Bolyai Intézet, Szeged, 1997
2. Bacher Károly, Dr. Monori József, Dr. Neszmélyi László, *Építésszervezés I/2, A hálós időtervezés*, kézirat, BME, 1990
3. Frank S. Budnick, Dennis McLeavy, Richard Mojena, *Principles of Operations Research for Management*, IRWIN Homewood, Illinois, 1988
4. *Deterministic and stochastic scheduling, Proceedings of the NATO Advanced Study and Research Institute on Theoretical approaches to scheduling problems* held in Durham, England, 1981, ed. by M. A. H. Dempster, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan
5. Robert W. Floyd, *Algorithm 97: Shortest Path*, Communications of the ACM 5(6): 345, June 1962
6. Hajnal Péter, *Gráfelmélet*, Polygon Jegyzettár, JATE Bolyai Intézet, Szeged, 1997
7. F. S. Hillier, G. J. Lieberman, *Bevezetés az operációkutatásba*, LSI Oktatóközpont, Budapest, 1994
8. James E. Kelley Jr., Morgan R. Walker, *Critical-path Planning and Scheduling*, Proceedings of Eastern Joint Computer Conference, p. 160-173, Boston MA, December 1959
9. James. E. Kelley, Opinions Letters (6/23/2003 Issue), The State of CPM Schedules, <http://enr.construction.com/opinions/lettersUpdates/archives/030623.asp>
10. Klafszy Emil, *Hálózati folyamatok*, Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1969
11. Joseph J. Moder, Cecil R. Phillips, Edward W. Davis, *Project Management with CPM, PERT and Precedence Diagramming*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1983
12. Robert W. Miller, *Schedule, Cost and Profit Control with PERT*, McGraw-Hill Book Company, 1963
13. J. Nezval, *A szalagrendszerű építkezés elmélete*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1958
14. Klaus Neumann, Christoph Schwindt, *Project with Minimal and Maximal Time Lags: Construction of Activity-on-Node Networks and Applications*, Institute für Wirtschaftstheorie und Operations Management, Universität Karlsruhe, 1995, Technical Report WIOR-447
15. Roy Pilcher, *Principles of construction management*, McGraw-Hill, Berkshire, England, 1976
16. Norman Polmar, *The Polaris: A Revolutionary Missile System and Concept*, Seminar 9 (1994) – "More Bang for the Buck:" U.S. Nuclear Strategy and Missile Development, 1945-1965, Colloquium on Contemporary History, January 12 1994; Naval Historical Center, Department of the Navy, USA, <http://www.history.navy.mil/colloquia/cch9d.html>
17. B. Roy, *Les problèmes d'ordonnancement*, Dunod, Paris, 1964

18. B. Roy and B. Sussmann, *Les problèmes d'ordonnancement avec contraintes disjonctives*, Note DS no 9. bis, SEMA, Montrouge, 1964
19. Harvey M. Sapolsky, *The Polaris System Development*, Harvard University Press, 1972, *Management Book Review*, Project and Risk Management, <http://www.cadmus.ca/bookreviewpolaris.htm>
20. Vattai Zoltán, *FITT - Vágányzárban végzett időkorlátos technológiák tervezése*, Építéstechnológia - építési menedzsment konferencia, Számítástechnika: tudományos és gyakorlati alkalmazások az építőiparban szekció, Szabadka, 1997
21. Vattai Zoltán, *Kombinatorikai modellek az építőipari menedzsmentben*, kandidátusi értekezés, MTA TMB, Budapest, 1999
22. Vattai Zoltán András, *Floyd-Warshall Again*, 7th International Conference On Organization, Technology And Management In Construction, Zadar, Horvátország, 2006
23. S. Warshall, *A Theorem on Boolean Matrices*, Journal of the ACM, Vol 9, 1, 11-12, 1962
24. Gary E. Whitehouse, *System Analysis and Design Using Network techniques*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1973
25. Wayne L. Winston, *Operációkutatás – Módszerek és alkalmazások*, Aula Kiadó Kft., 2003 ISBN 963 9478 61 X

"Kötetlenül"

a

Hálós Időtervezési Technikákról

MELLÉKLETEK

A POLARIS PROJEKT
EGY FORRADALMIAN ÚJ FEGYVER-RENDSZER ÉS KONCEPCIÓ

írta:
Norman Polmar

Előzmények

Az Egyesült Államok „Polaris” néven ismertté vált tengeralattjáróról indított ballisztikus rakétája nem volt a világ első tengeri telepítésű stratégiai fegyvere. 1955 szeptemberében a Szovjetunió már indított egy a NATO által SS-1B Scud-A néven jegyzett ballisztikus rakétát egy felszínen úszó tengeralattjáróról.¹ Ez csaknem négy évvel az Egyesült Államok tengeralattjáróról indított első Polaris rendszerű ballisztikus rakétájának kilövése előtt történt. Mindazonáltal a U.S. Polaris sok vonatkozásban forradalmian új fegyver-rendszernek számított.

A tengerről indított ballisztikus rakétáknak az ellenség saját területén lévő célpontok ellen történő bevetésének gondolata a jelek szerint a németektől származik, a II. Világháború idejéből. A német elképzelések szerint egy V-2 típusú robotrepülőgépet vontattak volna egy tengeralattjáró által egy felszín alatti vetőcsőben vontatott kilövőállással együtt az Egyesült Államok területének elérését lehetővé tévő hatótávolságba. A németek tengeralattjáró vontatta V-2 koncepciója nem vált működőképes valósággá. Bár bizonyos alkatrészek és a tervek a szovjetek kezébe kerültek a háború végén, a szovjetek nem követték ezt a koncepciót. Ellenben német technológiára és szakembergárdára alapozva a tengeralattjáróról indított irányított- (cirkáló-), és a ballisztikus rakétarendszerek fejlesztésébe egyaránt belekezdtek a késő 1940-es években.² Az 1950-es évek végére mindkét tengeralattjáró fegyverzet típust szolgálatba állították, s még 1955 szeptemberében kilőtték az első módosított, tengeralattjáróról (felszínről) indított, egyébként a szárazföldi erőknél használt ballisztikus rakétát. A világon az első tengeralattjáróról indított hadműveleti csapásmérő fegyver a felszíni kilövésű szovjet R-13 (NATO jelöléssel: SS-N-4), nukleáris robbanófejjel ellátott ballisztikus rakéta volt, 350 tengeri-mérföldes hatótávolsággal. Az 1959-es rendszerbe állításakor ez volt a világ első tengeralattjáróról indított ballisztikus fegyverzet-rendszere (SLBM). (SLBM = Submarine-Launched Ballistic Missile = Tengeralattjáróról Indított Ballisztikus Rakéta)

A U.S. Polaris SLBM, mely egy évvel ezt követően került rendszerbe állításra, viszont technikailag fejlettebb és valóban forradalmi fegyverzet-rendszer volt. „Forradalmi”, mert olyan fegyverzet-rendszer, mely 1.) adott területen lényeges műszaki fejlődést eredményezett, 2.) a védelmi politikára-, illetve hadvezetésre mélyreható benyomást gyakorolt. ...

... A forradalmi újítás három területre összpontosult: tengeralattjáróra telepített indítórendszer, maga a rakéta, alkalmazási koncepció.

Döntés a Polaris -ról

Azok az erőfeszítések, melyek a Polaris SLBM rendszer kifejlesztéséhez vezettek a szovjetek által 1954 augusztusában végrehajtott kísérleti hidrogénbomba (termonukleáris) robbantást követően, a „Nagy Négyek” 1955 szeptemberében megtartott genfi csúcstalálkozója után kezdődtek. A stratégiai fegyverek terén mutatkozó szovjet fejlesztésektől való félelemtől vezérelve az Eisenhower adminisztráció utasítást adott a Haditengerészetnek, hogy csatlakozzon a Szárazföldi Erőkhöz egy felszíni hajóról indítható közepes hatótávolságú ballisztikus rakétarendszer (IRBM) kifejlesztésére.³ (IRBM = Intermediate Range Ballistic Missile = Közepes Hatótávolságú Ballisztikus Rakéta)

A Haditengerészet hevesen tiltakozott a közös fejlesztési program ellen, mivel a Szárazföldi Erők a folyékony hajtóanyagú Jupiter rakéták fejlesztésén dolgozott. A Haditengerészet megítélése szerint a folyékony hajtóanyag kezelése tengeri körülmények túl veszélyes és a közel 20 méteres rakéták hajóra történő telepítése is túl sok problémát vet fel.⁴

Mindezekon túl a Haditengerészetben belül tapasztalható volt egy általános ellenkezés a ballisztikus rakéták tengeri telepítését illetően, „hadi-kulturális” szempontból, két vonatkozásban is. Először: A késő 1940-es évektől a Légügyi Minisztérium és a Hadianyagügyi Minisztérium egymástól független erőfeszítéseket tett szárazföldi célpontok ellem bevethető, tengeralattjáróról indítható irányított (cirkáló) rakéták kifejlesztésére, és egyik minisztérium se kívánt még csekély erőforrást sem átcsoportosítani egy új ballisztikus rakétafejlesztési programhoz. Másodsor: Az 1940-es évek végén a Haditengerészet veszített a Légierővel szemben a B-36 bombázók kontra repülőgép-anyahajók vitában. Ez a vereség a Haditengerészet presztízsébe került és még a háború utáni első repülőgép-anyahajó építésének programját is törölték. Mindezek után a Haditengerészet vezetése el akarta kerülni a szolgálatok közötti újabb viaskodást, jelen esetben a stratégiai fegyverek terén. És valóban, Robert B. Carney admirális, aki 1953 és 1955 között a Haditengerészeti Műveletek Főparancsnoka volt, visszatartotta a Haditengerészetet a tengeri telepítésű ballisztikus rakéták fejlesztésének támogatásától.

Volt egy harmadik tényező, ami ugyan a Haditengerészet számára nem „kulturális”, de nagyon is valós problémaként jelentkezett. A félelem, hogy egy új rendszer fejlesztésére fordítandó összegek túllépnek a Haditengerészet rendes költségvetési keretein.⁵

A tengeri telepítésű ballisztikus rakétarendszer fejlesztésével szembeni ellenkezést Arleigh A. Burke admirálisnak a Haditengerészeti Műveletek Főparancsnokává történő 1955. augusztusi kinevezése változtatta meg. Az admirális életrajzírója szerint: „Főparancsnokságának első időszaka [1955-1957] alatt Burke leglényegesebb kezdeményezése az volt, hogy szemben az addigi ellenkezésekkel, támogatta egy haditengerészeti közepes hatótávolságú ballisztikus rakétarendszer kifejlesztésének egy nagy prioritású programját.”⁶

Tartva attól, hogy ha a projektet a Haditengerészet meglévő bürokráciájára bízta, akkor az a Haditengerészetben belül alacsony prioritást kap és eleve kudarcra lesz ítélve, Burke admirális létrehozott egy „Különleges Projektek Irodáját” (SPO). (SPO = Special Projects Office = Különleges Projektek Irodája) Azt akarta, hogy a tengeri telepítésű rakéta projektet irányító SPO „vertikális” szervezet legyen, független a meglévő műszaki osztályoktól. Mindaddig minden nagyobb haditengerészeti műszaki fejlesztést, ide értve a gyártást is, az 1842 óta „horizontális” rendszerbe szervezett műszaki osztályok irányítottak. Ezen intézkedéseiben a haditengerészeti miniszter, Charles S. Thomas erőteljesen támogatta.

Hasonlóan fontos volt az új szervezet első vezetőjének megválasztása. Burke a poszt betöltésére egy haditengerészeti repülési tisztet, William F. Raborn ellentengernagyot nevezte ki, akinek számottevő tapasztalata volt az irányított rakéták területén. Raborn-nak a Polaris projektben játszott meghatározó szerepére való tekintettel szükséges idézni Burke admirális kritériumait, mely tulajdonságokkal szerinte ezen ellentmondásos és nehéz, de elengedhetetlen projekt vezetésére megválasztott tisztnek rendelkeznie kell. Burke szerint:

„Felismertem, hogy az illetőnek nem kell műszaki embernek lennie. De képesnek kellett lennie arra, hogy megértse, amiről a műszakiak beszélnek. Sok és sokfajta embert kellett bevonnia a munkába. Olyan embert akartam, aki elboldogul a repülővel [értsd: légierővel], mert ez [a program] jól helybenhagyja őket. Ellen akartak állni, takarodót fűjni, hiszen ez – amennyiben teljes sikerrel zárul, hosszabb távon – elhomályosítja az ő stratégiai csapásmérő képességüket.

Tengeralattjárós ügy szint nem lett volna jó erre a feladatra, mert ezt [a fegyvert] eredetileg felszíni hajókra szánták. A tengeralattjárósok egy meglehetősen zárt társaság, és jobbára olyasmit akartak csinálni, amit a tengeralattjárósok már csináltak ... túl azon, hogy ellenezték a ballisztikus rakétákat.”⁷

Burke-nek fenntartásai voltak a felszíni erők tisztjeivel szemben is, mert „ők nem sokat tudtak a rakétákról, avagy stratégiáról”. Ettől függetlenül, az admirális később egyértelművé tette jelen cikk írója számára, hogy olyan tisztet választott – és támogatott teljes mellszélességgel -, akiről úgy gondolta, hogy rendelkezik a projekt irányításához szükséges képesítésekkel – elsősorban egyéni képzettsége alapján, minimális tekintettel arra, hogy a Haditengerészet mely „szakszervezetéhez” tartozik. Burke támogatása arra is kiterjedt, hogy megmondta Raborn-nak, korlátozott számban projektcsapatába hívhatja a Haditengerészet legjobb embereit; és bármikor, ha úgy látszik, hogy a projekt céljai nem teljesíthetők, Raborn a projekt feladásának javaslatát is Burke elé terjesztheti.

1955. november 8-án a védelmi miniszter a Haditengerészet és a Szárazföldi Erők együttes bevonásával létrehozott egy közös IRBM programot. A Légierő „Atlas” ICBM programjával és a Szárazföldi Erők „Jupiter” programjával együtt a szintén kiemelt nemzeti prioritást kapott tengeri telepítésű Jupiter program gyors ütemben haladt. A Haditengerészet azt fontolgatta, hogy a Jupiter IRBM-eket átalakított fedélzetű kereskedelmi hajókra telepíti; 3 rakétát hajónként.⁸ 1956 során ütemterv készült az első IRBM-ekkel felfegyverzett kereskedelmi hajó 1959-es vízrebocsátására. Néhány tanulmány szintén foglalkozott a Jupiter IRBM-ek tengeralattjárókról történő felszíni kilövésének megvalósíthatóságával.

A Haditengerészetnek még mindig súlyos aggályai voltak az igen gyúlékony folyékony hajtóanyag hajófedélzetén történő alkalmazását illetően és tanulmányokat kezdtek a szilárd hajtóanyagú rakéták irányában. Azonban a szilárd hajtóanyagú rakétáknak kicsi a fajlagos tolóerejük [ugyanazon teher célba juttatásához lényegesen nagyobb rakéta szükséges, mint folyékony hajtóanyag esetén], ami legfőbb hátrányuk. A legnagyobb lendület a szilárd hajtóanyagú rakéták irányában akkor következett be, amikor 1956 közepén a tudósok megvalósíthatónak találták a termonukleáris robbanófejek miniaturizálását. Úgy mondják, Dr. Teller Ede sugalmazta azt 1956 nyarán, hogy egy 200 kg-os robbanófej is képes egy 2500 kg-os robbanóerejének kifejtésére.⁹ Szeptemberben az Atomenergia Ügyi Bizottság úgy becsülte, hogy egy kisméretű nukleáris robbanófej 1965-re, talán 1963-ra, rendelkezésre állhat.

Ez az előrelépés, a nagyobb tolóerejű szilárd hajtóanyagok kifejlesztésével egyetemben, lehetővé tette: 1.) 1956 decemberében a szakítást a Szárazföldi Erők Jupiter programjával; 2.) a Polaris SLBM program hivatalos elindítását, szilárd hajtóanyagú rakétával; és 3.) a felszíni hajókról a tengeralattjárókra, mint indító- és hordozóeszközökre történő áttérést.

1957. február 8-án a Haditengerészeti Műveletek Főparancsnoka, Burke parancsba adta az elvárást, miszerint 1965-re legyen működőképes az első, tengeralattjáróról indított, 1500 tengeri mérföld hatótávolságú rakéta. Az 1500 tengeri mérföldes hatótávolság azért lett kikötve, mert az lehetővé tette, hogy egy tengeralattjáró a Norvég tengerről célba vegye a szovjet fővárost, Moszkvát – 1100 tengeri mérföldnyire a szárazföld belsejében.

Az 1965-ös célt kitűző 1957. februári ütemtervet a Polaris programban hamarosan módosítások, és gyorsító intézkedések sora követte. 1957. október 4-én a szovjetek Föld körüli pályára állították a Szputnyik-ot, a világ első mesterséges holdját. Október 23-án a haditengerészeti miniszter a Polaris program gyorsítását javasolta, hogy 1959 decemberéig rendelkezésre álljon egy 1200 tengeri mérföld hatótávolságú rakéta, 1962 közepéig 3 darab SLBM tengeralattjáró és 1963 közepéig egy 1500 tengeri mérföld hatótávolságú rakéta. Egy hónappal később új gyorsító intézkedéseket hoztak, hogy az 1200 tengeri mérföld hatótávolságú rakéta 1960 októberére már rendelkezésre álljon. 1957 de-

cemberében a Haditengerészet tervet készített az első tengeralattjárónak 1959 decemberéig, a másodiknak 1960 márciusáig történő hadrendbe állítására.

Ahhoz, hogy ezeket a hajóegységeket ilyen rövid idő alatt megépíthessék, 1957 utolsó napján a Haditengerészet elrendelte egy éppen építés alatt álló atommeghajtású támadó torpedóromboló tengeralattjáró és egy második, még el nem kezdett egység átalakítását ballisztikus rakétahordozó tengeralattjáróvá. A támadó tengeralattjáró terveinek átdolgozása során a hajótestet 40 m-rel meghosszabbították, hogy lehetővé tegyék a különleges navigációs-, rakétavezérlő- és egyéb-, a feladatok végrehajtását támogató berendezések elhelyezését, csak úgy, mint a 16 vetőcsövet a Polaris rakéták számára.

A legmagasabb nemzeti- és haditengerészeti prioritásokból adódóan az első Polaris tengeralattjárót, a USS *George Washington*-t rohamléptekkel építették. A tengeralattjáró az első tengeralattjáróról indítható Polaris rakétát 1959. június 9-én lőtte ki. A tengeralattjáró 1960. november 15-én indult első stratégiai rakétafejveres őrzésére. A hajóegység 16 darab Polaris A-1 típusú rakétával volt felfegyverezve, melyek mindegyike 1200 tengeri mérföld hatótávolsággal bírt, és csaknem egy megatonná (MT) robbanófejjel volt szerelve. A *George Washington* első őrzésére alkalmasan egy huzamban 67 napot töltött a tengeren. A hajó merülési rekordot állított fel azáltal, hogy 66 napig és 10 óráig tartózkodott megszakítás nélkül víz alatt.

1960. december 30-án, mielőtt a *George Washington* visszatért a kikötőbe, a második Polaris tengeralattjáró, a *Patrick Henry* kihajózott első elrettentő őrzésére. 1967-ig 41 Polaris tengeralattjáró futott a tengerre, fedélzetükön összesen 656 rakétával.¹⁰

A tengeralattjáró

A világ első SLBM tengeralattjárói a szovjet Zulu-osztályú, dízel-elektromos meghajtású hajóegységek voltak, két-két SS-N-4 típusú rakétával felfegyverezve. Ezeket az 1958-1959 -ben szolgálatot teljesítő, SLBM-ekhez átalakított vízalatti egységeket az új konstrukciójú Hotel (atommeghajtású) és Golf (dízel) osztályú hajók követték, melyek mindegyike három darab rakétát hordozott. Az első, egy megatonná robbanófejjel szerelt rakéták hozzávetőlegesen 350 tengeri mérföld hatótávolsággal bírtak. Lényeges, hogy a tengeralattjárónak a felszínre kellett emelkednie az SS-N-4 rakéták indításához.

Ezzel ellentétben, a U.S. Polaris tengeralattjárók mindegyike 16 darab rakétát hordozott. Továbbá, a U.S. rakétákat akkor is ki lehetett löni, amikor a tengeralattjáró teljes terjedelmében a felszín alatt maradt, és úgy vélték, hogy azok pontosabbak is a szovjet fegyvereknél.¹¹

Mint ahogy a rakétákat, úgy a Polaris tengeralattjárók tűzvezérlő- és navigációs rendszereit is gyorsított ütemben fejlesztették. A rakéta hatótávolságából, és abból az igényből adódóan, hogy a tengeralattjáró a felszín alatt maradjon, a pontos navigáció nélkülözhetetlen volt. Ebben, a navigációs műholdak kifejlesztését megelőző időben, a Polaris program számára kifejlesztett belső navigációs rendszer (SINS) (SINS = Ships Internal Navigation System = Hajók Belső Navigációs Rendszere) szintén figyelemre méltó műszaki eredmény volt. A másik nagy teljesítmény egy olyan létfenntartó rendszer kifejlesztése volt, amely 150-160 fős legénység számára szolgáltatott oxigént és vizet egy 60-70 napos felszín alatti őrzés időtartama alatt.

Összegezve: építésük idején a Polaris SLBM tengeralattjárók voltak a legnagyobb, legösszetettebb és legerősebb fegyverzettel ellátott tengeralattjárók, amiket bármely ország valaha addig épített.¹² A Polaris program szóvivői büszkén jegyezték meg, hogy egyetlen Polaris tengeralattjáró nagyobb robbanóerőt képes célba juttatni, mint amennyit a világ összes bombázó repülőgépe együttesen cél-

ba juttatott a Második Világháború idején. A Polaris tengeralattjárók megépítése, melynek során csak 1963-ban 12 darab hajóegységet készítettek el, valóban figyelemre méltó volt.

A rakéta

Egy hadihajó, illetve bármilyen katonai hordozóeszköz megítélésének elsődleges szempontja, annak fegyverzete. És itt, ezen a ponton, a Polaris tengeralattjáró valóban forradalmi volt. Mint már fentebb említést nyert, az első szovjet SLBM tengeralattjárók mindegyike kettő, vagy három rakétát hordozott. A programnak még a korai fázisában megszületett a döntés a Polaris tengeralattjáró nagy számú – végül 16 db – rakétával történő felfegyverzéséről. A program néhány résztvevője nem értett egyet „ilyen sok tojás egy kasba tételével” a nagy számú rakéta kockáztatása miatt, ha az ellenség beméri és elsüllyeszti a Polaris hajóegységek valamelyikét. De a legtöbb hivatalnok úgy vélte, hogy az ellenség szorult helyzetbe kerül az eredendően a felszín alatt tartózkodó tengeralattjárók megtalálásának problémájával, így ilyen nagy számú fegyver egyetlen hajótestbe helyezése költség-takarékos és stratégiailag épkézláb megoldás.¹³ Ha valaki belegondol, hogy a Polaris tengeralattjáró hajóteste egy módosított támadó tengeralattjáró hajótest volt, a Haditengerészet azon képessége, hogy egyetlen egységbe 16 rakétát telepítsen, nagy bravúr volt a hajótervezés területén.

A Polaris rakéták voltak a világ első nagy hatótávolságú szilárd hajtóanyagú rakétái. A Szárazföldi Erők Jupiter IRBM-ei folyékony hajtóanyagot használtak, és számottevően nagyobbak voltak az első Polaris SLBM-eknél:

	<u>Jupiter IRBM</u>	<u>Polaris A-1</u>
Súly	50 to	13 to
Hossz	18,3 m	8,54 m
Átmérő	2,67 m	1,37 m
Hatótávolság	1500 tengeri mérföld	1200 tengeri mérföld

A szilárd hajtóanyagú meghajtás továbbfejlesztése a rakéták méretének jelentős mértékű csökkentését tette lehetővé. Egy másik nagy eredmény egy olyan rendszer kifejlesztése volt, amely egy felszín alatt tartózkodó tengeralattjáró tároló silójából ki tudta vetni és a felszínre tudta juttatni a rakétát (magának a rakétahajtóműnek az indítása a felszín felett kellett hogy történjék), valamint képessé tette a tengeralattjárót arra, hogy a nagy és hirtelen súlycsökkenéshez igazodjék. A Polaris rakéta egyik hátránya, ugyanakkor, annak korlátozott hatótávolsága volt, ami az SLBM tengeralattjárók számára az óceán hadműveleti területét erősen korlátozta, ha azok Moszkvát és más településeket vettek célba a Szovjetunió belső területén.

Az 1200 tengeri mérföldes A-1 típusú rakétákat a szilárd-hajtóanyag program indulásakor köztes fegyverzetnek tekintették. A nagyobb hatótávolságú változatok fejlesztése már folyamatban volt. Az A-1 típus kisebb hatótávolságát a gyorsabb hadrendbe állítási ütemterv miatt fogadták el. A-1 típusal a fedélzetén 1960. novemberében a USS *George Washingtoni* teljesített járőrszolgálatot. Az 1500 tengeri mérföldes A-2 -es rakétával a USS *Ethan Allen* 1962. júniusában indult járőrszolgálatba, a 2500 tengeri mérföldes A-3 -mal pedig a USS *Daniel Webster*, 1964. szeptemberében. A Polaris mindhárom változatának méretei hozzávetőlegesen azonosak voltak (lásd: A melléklet).

Így, egy négy éves perióduson belül, a rakéták hatótávolsága mintegy kétszeresére nőtt. Egy a behatoló képességet segítő visszatérő [értsd: a légkörbe visszatérő] egységet fejlesztettek ki az A-3

számára, de az nem került hadrendbe állításra. Helyette az A-3 -at három robbanófejes többszörös visszatérő egységgel (MRV) látták el, ami mint egy sörétes vadászpuska „szórja meg” a három viszonylag kisméretű robbanófejjel a célpontot. (MRV = Multiple Reentry Vehicle = Többszörös Visszatérő Hordozóeszköz) Ez volt az egyedüli amerikai harcászati rakéta, amit MRV robbanófejjel rendszeresítettek, hogy ellensúlyozza a rakéta korlátozott pontosságát, ezzel növelve a „puha” célpontok elleni hatékonyságát. Mind a 41 tengeralattjárót végül is az A-3 típusú rakéták hordozásához igazították.¹⁴

A rakéta és robbanófej fejlesztés folyt tovább, és 1971 márciusában a USS *James Madison* már 16 Poseidon C-3 típusú rakétával indult őrzőjáratra. Miközben ezen fegyverek behajózásához a tengeralattjáró „átalakítására” volt szükség, az viszonylag kevés módosítást igényelt. Végül is 31 tengeralattjárót alakítottak át erre a konfigurációra.

A Poseidon volt a világ első többszörös önálló célravezetésű hordozóegységgel (MIRV) felszerelt hadműveleti harcászati rakétája. (MIRV = Multiple Independently targeted Reentry Vehicle) Akár 14 robbanófejet is szerelhettek az A-3 rakétára, igaz a hatótávolság rovására. A MIRV programot – amit később a Minuteman III -nál és az azt követő ICBM-eknél és SLBM-eknél is átvettek – elsődlegesen a szovjetek várható ballisztikus rakéta-elhárító rendszereinek (ABM) leküzdésére hívták csatarendbe. (ICBM = Inter-Continental Ballistic Missile = Interkontinentális Ballisztikus Rakéta) (ABM = Anti-Ballistic Missile = Ballisztikus Rakéták elleni Rakéta) Rendes körülmények között a Poseidon – „született” Polaris – tengeralattjárókon 10 robbanófejes rakétákat szándékoztak hadrendbe állítani. A Poseidon SLBM-ek ezen felül állítólag megközelítették a szárazföldi telepítésű ICBM-ek pontosságát is.

A Polaris/Poseidon végső változata az úgy nevezett EXPO (EXPO = Extended-range Poseidon = Megnövelt hatótávolságú Poseidon) rakéta volt, ami a korai 1970-es években ért el magas fokú fejlettséget. Ezt a rakétát hamarosan Trident I (C-4) -re nevezték át. Az eredeti 41 Polaris tengeralattjáróból 12-t alakítottak át ezen fegyver hordozására.¹⁵

Ilyenformán az Egyesült Államok tengeralattjáró flottája által nagy számban hordozott Polaris SLBM a legrugalmasabb fegyverek egyike volt Amerika stratégiai arsenáljában.

Az üzemeltetési koncepció

A Polaris rendszer fejlesztésének még a korai szakaszában döntés született a tengeralattjárók két teljes (hozzávetőlegesen 160-160 fős) legénységgel történő üzemeltetéséről, ami lehetővé tette, hogy a hajóegységek minél több időt töltsenek őrzőjáratban. Ezt a koncepciót „Arany” és „Kék” fedőnévvel titulálták. A gyakorlatban a „Kék” legénység egy 60-napos őrzőjáratra viszi a tengerre a tengeralattjárót. Amikor a hajóegység visszatér a kikötőbe, a „Kék” és az „Arany” legénység körülbelül 15 napot tölt az ellátmány utántöltésével és a hajó őrszolgálatra történő felkészítésével. Majd az „Arany” legénység száll tengerre a tengeralattjáróval egy újabb 60-napos őrzőjáratra.

A skóciai Holy Loch és a spanyolországi Rota bázisú tengeralattjárókat üzemeltető személyzetet rendszeres körülmények között légi úton szállították oda- és vissza az Egyesült Államok területén lévő bázisaikról.

A éppen parton lévő személyzetnek hozzávetőlegesen 45 napja volt szabadságra és (szimulátoros) gyakorlatokra. Ez a „Kék-Arany” legénységi koncepció jól működött a 41 Polaris/Poseidon tengeralattjárónál. Minden időpillanatban az SLBM erők több mint fele volt működőképes és tartózkodott a tengereken. Matematikailag a tengeri- és a kikötőbeli tartózkodási idő aránya hozzávetőlegesen 4:1 kellett volna, hogy legyen; azonban a tengeralattjáróknak rendszeresen hosszabb időt kellett tölteniük a kikötőkben, nagyjavítások, rakéta-tesztek és egyéb okok miatt.

Az ütemterv

A Polaris projektbe számos premisszával fogtak bele: például, hogy a kisebb robbanófejek kerülnek tényleges kifejlesztésre és gyártásra, és hogy szilárd hajtóanyaggal fog a meghajtás működni. A Polaris SLBM rendszer – azaz a szóban forgó tengeralattjárók, a rakéták, a navigációs berendezések, a létfenntartó rendszerek, a kiképző eszközök, és az egyéb összetevő-sokadalom – kifejlesztésének időtartama igazán figyelemre méltó volt. Ehhez fogható bravúr valószínűleg még semmilyen hasonló bonyolultságú amerikai fegyverrendszer esetében sem volt.

Annak biztosítására, hogy minden darab időben „illeszkedjék”, Raborn ellen-tengernagy adoptálta az akkortájt újdonság PERT idő-ütemezési rendszert. A Polaris program egyik történetírója megjegyezte, hogy „A Különleges Projektek Irodája nemzetközi elismerésre tett szert az általa alkalmazott menedzsment-kontroll rendszer újszerűségével és hatékonyságával.”¹⁶

A Polaris rendszer fejlesztése során kompromisszumok születtek az ütemterv vonatkozásában, hogy a rendszereket mihamarabb egyenesbe hozzák. 1957 végén a Haditengerészet tervezete hat Polaris tengeralattjárót igényelt 1965-ig tengerre bocsátani. A *George Washington* 1960 végén került tengerre. 1962 közepére hat Polaris tengeralattjáró volt üzemképes (az *Ethan Allen* már A-2 rakétát hordozott) és 1967-re a teljes, 41 Polaris tengeralattjáróból álló flotta erősítette Amerika nukleáris elrettentő erejét. A Polaris szóvivői gyakran nyilatkozták, hogy a Polaris a „tervek szerint, és a tervezett ütemben” halad.

A kezdetektől fogva a Polaris rendszer kibontakozási lehetőségeit – nevezetesen a rakéták hatótávolsága-, a robbanófejek- és a pontosság területén – felismerték, megtervezték és véghezvitték. Ebben az összefüggésben is, a Polaris SLBM-et forradalmi rendszernek lehet nevezni.

Az elrettentő (támadó) potenciál hatása és a védelmi politika

Az Egyesült Államok vezetői az 1950-es években fogtak hozzá a Polaris SLBM rendszer fejlesztéséhez, mert attól tartottak, hogy a Szovjetunió a rakéta- és műhold rendszerek kifejlesztésének területén folyó versengésben előnyre tett szert, ami Amerika [esetleges konfliktusbeli] túlélését közvetlenül veszélyeztetné. Az 1960-as évek közepére, a halálos Polaris SLBM és a szárazföldi telepítésű Minuteman ICBM rendszerek hadrendbe állításával a Szovjetunióval szembeni retteget „rakéta hiány” semmivé lett. Sőt, az 1970-es évekig az Egyesült Államok nyilvánvaló előnnyel bírt ezen rendszerek területén.

A Polaris program nagy számú olyan rakétát állított elő, mely viszonylag rövid idő alatt képes volt csapást mérni a Szovjetunióra. A Légierő Minuteman programja 1967-re 1000 darab, silókba telepített, szilárd hajtóanyagú ICBM rakétát produkált. Ugyanebben az évben a szovjetek elkezdtek hadrendbe állítani SS-9 -es interkontinentális ballisztikus rakétáikat, ami sokáig rejtély volt az Egyesült Államok hírszerzése számára. Az SS-9 abban az időben a világ legnagyobb rakétája volt, és Mod 4 változata három MRV robbanófejet hordozott. Az 1970-es években sok amerikai elemző arra a következtetésre jutott, hogy az SS-9 három hatalmas robbanófejét a Minuteman rakéták megsemmisítésére tervezték, amelyeket az SS-9 robbanófejek elrendezéséhez hasonló hármass csoportokban állítottak hadrendbe. Nyilvánvalóan, az SS-9 -esek és a későbbi fegyverek súlyosan veszélyeztették Amerika fix, szárazföldi telepítésű stratégiai rakétáit.

Ugyanakkor, azidőtájt a Polaris tengeralattjárók *teljességgel* sebezhetetlenek voltak a szovjet ellenrendszerek számára. A Polaris kezelésére a szovjetek számos nagy tengeralattjáró-elhárítási hadászati programot kezdtek el, de a késő 1970-es évekig ezek az erőfeszítések nem jelentettek számottevő fenyegetést az SLBM erőkre. 1978-ban a védelmi miniszter még egyértelműen kijelentette,

hogy „Az SLBM erők meghatározó szerepe, mint a stratégiai erők bevett triászának legtúlélőképebb összetevője, mind a jelenben, mind az előrelátható jövőben, jól megalapozott.”¹⁷

Ebből a túlélőképességből adódóan, ahogy Brown miniszter mondta: „Az SLBM erők hozzájárulnak a válságbeli stabilitáshoz. Egy túlélőképes tengeri ballisztikus stratégiai rakéta-erő léte mérsékli a szovjetek igyekezetét, hogy további fegyveres ellenerőre tegyenek szert, és hogy az Egyesült Államok földje elleni támadásokat tervezzenek, mivel ezek a támadások nem semmisítenék meg képességünket a megtorlásra.”¹⁸ Kimondatlanul, de bizonyosan nyilvánvalóan, a Polaris korlátozott pontossága, szemben a szárazföldi telepítésű ICBM-ével, azt jelentette, hogy a tengeralattjáróról indított rakétát nem lehetett első-csapásmérő fegyverként, vagy ellenerőként használni; ez valóban egy megtorló fegyver, egy visszatartó erő volt.

Amikor már a Szovjetunió nagy hangsúlyt fektetett a tengeralattjárók elleni hadviselésre, az Egyesült Államok katonai vezetésén belül és kívül a szakértők megkérdőjelezték az Egyesült Államok stratégiai rakétahordozó tengeralattjáróinak túlélőképességét egy nagyobb konfliktusban a szovjetekkel. De még mindig, az SLBM tengeralattjárók és a szárazföldi bázisú bombázók, vagy ICBM-ek túlélő-képességbeli összevetésében, az előbbieket változatlanul a jobban sikerültek. 1994 februárjában a védelmi miniszter, Frank Carlucci kijelentette: „A mi 28 Poseidon és nyolc Trident [típusú] ballisztikus rakéta-hordozó tengeralattjáróból álló flottánk ... biztosítja számunkra a legtúlélőképebb stratégiai nukleáris [csapásmérő] képességet.”¹⁹

Tanulságok

A Polaris SLBM egy forradalmi fegyver-rendszer volt. Elsősorban, jelentős műszaki előrelépéseket testesített meg a tengeralattjárók és a rakéták tekintetében. Szintén számottevő volt a rendszer addig csaknem példa nélküli fejlődési potenciálja; lényegében ugyan az a tengeralattjáró típus hordozta a rakéták valamennyi újabb generációját – a Polaris A-1 -től kezdve, az A-2, A-3, Poseidon és Trident I rakétáig.²⁰ Másodsorban, a Polaris SLBM egy nagy túlélőképességű hadászati rendszert biztosított, ami nagy befolyást gyakorolt az Egyesült Államok védelmi politikájára.

A fentiekkel összefüggésben, a Polaris rendszert hatékonyan és rövid idő alatt fejlesztették ki és állították hadrendbe.

Ha valaki a későbbi Trident SLBM rendszert tekinti, a fejlesztés koncepcióját már a korai 1970-es években jóváhagyták. Az első [ilyen] tengeralattjáró 1981 novemberében készült el – tíz évvel később.²¹ Hovatovább, a Trident messze kevésbé volt innovatív, mint a Polaris – a Trident rendszer legtöbb eleme korábbi SLBM összetevők továbbfejlesztése volt.

A hosszabb vajúdsági időszaknak valószínűleg oka volt: 1.) a hadügyminisztériumi és a haditengerészeti bürokrácia kisebb hatékonysága; 2.) a kiemelt nemzeti prioritások hiánya az SLBM fejlesztés számára; és 3.) Hyman G. Rickover admirálisnak, a Haditengerészet nukleáris hajtómű programja vezetőjének a belekeverése a Trident erőfeszítések irányításába (őt kirekesztették a Polaris projektből).

A történész Harvey Sapolsky arra a következtetésre jutott, hogy a Polaris program "programadói sikere" „a műszaki fejlődés irányvonalával és a széles körben elfogadott politikai igényekkel való egybeesésnek volt köszönhető. Mindezek mellett olyan projekt személyzetre kellett, hogy bízva legyen, akik rendkívüli módon gyakorlottak a hivatalnoki rendszerű politikai mesterkedések művészetében.”²²

Rickover nem akadályozta a Polaris fejlesztését, mert Raborn admirális szorosán a felügyelete alatt tartotta a projektjét, és mert Burke admirális, a Haditengerészeti Műveletek Főparancsnoka úgy

rendelkezett, hogy az új tengeralattjárókba ne egy új nukleáris erőforrás kerüljön, hanem a már meglévő S5W-t használják. Raborn, és a flotta többi, a Polaris projektben résztvevő főparancsnoka attól tartott, hogy Rickover közreműködése „oda vezetett volna, hogy az új projekt feletti hatalom” az ő hivatalához került volna.²³ Következésképpen, ahogy azt az Atomenergia-ügyi Bizottság történetírói, Richard Hawlett és Francis Duncan feltárta: „Burke admirálistól származó írásbeli utasítók alapján [Ranorn és a többi admirális] kirekesztette Rickover-t minden előkészítő tanulmányból.”²⁴

A Polaris kifejlesztésének egyéb okai is voltak. 1974-ben a védelmi miniszter, James Schlesinger felkérte a katonai szolgálatokat, részletezzék, miért került sor a stratégiai fegyvernem felállítására. Az eredmény egy átfogó tanulmány volt, „A stratégiai fegyverkezési verseny története, U.S. – U.S.S.R., 1945-1972.” címmel. Nekem jutott az a megtiszteltetés, hogy a Haditengerészetnek azt a feltárási bizottságát vezethettem, mely az amerikai és a szovjet stratégiai rakétahordozó tengeralattjáró programokat és az amerikai repülőgép-anyahajós légi csapásmérő programokat vizsgálta. Az átfogó jelentés arra a következtetésre jutott, hogy az amerikai stratégiai fegyverek kifejlesztésének okai: 1.) a szovjet fenyegetés; 2.) a műszaki lehetőség; 3.) a szolgálatok közötti versengés.

Ahogy Sapolsky megállapította, a Polaris SLBM rendszer egy „szükséglet” kielégítésére – nevezetesen, a szovjet fenyegetéssel történő szembeszállásra – lett kifejlesztve, és mert adva volt a műszaki lehetőség. Hewlett és Duncan még egy okot hoztátett: a szolgálatok között folyó versengést az erőforrásokért és feladatokért. Attól tartva, hogy a Légierő Thor rakétája 1960-ra működőképes lesz, amit a védelmi pénzalapok csökkentése követ, Burke admirális „most [1957-ben] azt remélte, hogy a Haditengerészet utol tudja érni a Thor-t az első Polaris tengeralattjáró 1959. végéig, vagy 1960. elejéig történő elkészítésével.”²⁵

Egy évtizeddel a Polaris program elkezdése után, a Haditengerészet nekilátott a Poseidonnak, az amerikai SLBM-ek negyedik generációjának. A Poseidon abban tért el a Polaris előző változataitól, hogy ez látta el az Egyesült Államokat az első hadászati [stratégiai] rakétára szerelt MIRV rendszerrel (a Minuteman III 1971. decemberére lett működőképes, egy 3 MIRV-egységes rendszerrel). A kortárs irodalom áttekintése azt sugallja, hogy az amerikai vezetők azért protezsálták a MIRV Poseidont, mert a feltételezett szovjet ballisztikus rakéta-védelem legyőzésének szüksége nyugtalanította őket. Akárhogy is, az emberben az az érzés támad, hogy ez az aggodalom idő előtti volt, ha az akkor rendelkezésre álló hírszerzési információkra gondolunk. Véleményem szerint, a Poseidon irányában tett lépések inkább politikai tényezők által voltak motiváltak, mint katonai szükségszerűségből (azaz, Johnson elnök [siker-] nyilatkozatot akart tenni a stratégiai fegyverek terén).

A Haditengerészet szintén a Légierővel folyó szolgálatok közötti hadászati rivalizálással összefüggésben tekintett a fegyverre. ... De az valószínűleg egy újabb cikket érdemelne, egy újabb konferencián.

”A” melléklet

U.S. Tengeralattjáróról Indított Ballisztikus Rakéták (SLBM)				
(hadrendbe állítva az 1960-1971 években)				
	<u>Polaris A-1</u>	<u>Polaris A-2</u>	<u>Polaris A-3</u>	<u>Poseidon C-3</u>
Bevetésre kész	1960	1962	1964	1971
Súly	12,71 to	14,76 to	16,21 to	29,51 to

Hossz	8,69 m	9,46 m	9,86 m	10,37 m
Átmérő	1,37 m	1,37 m	1,37 m	1,88 m
Hatótávolság	1,200 NM	1,500 NM	2,500 NM	2,500 NM*
Robbanófej	1 RV	1 RV	3 MRV	14 MIRV
*Csökkentett harci teherrel				

Szószedet

ABM	Anti-Ballistic Missile = ballisztikus rakéta elleni ellen-rakéta
AEC	Atomic Energy Commission = Atomenergia-ügyi Bizottság
CEP	Circular Error of Probability = körkörös találati hiba
CNO	Chief of Naval Operations = Haditengerészeti Műveletek Főparancsnoka
FBM	Fleet Ballistic Missile = tengerészeti ballisztikus rakéta
ICBM	Intercontinental Ballistic Missile = interkontinentális ballisztikus rakéta (nagy magasságba fellőtt, majd onnan – ballisztikus röppályán – szabadeséssel célra tartó kontinens-közi rakéta)
IOC	Initial Operational Capability = első bevetésre kész
MIRV	Multiple Independently targeted Re-entry Vehicle = többszörös önálló célravezetésű visszatérő hordozóeszköz
MRV	Multiple Re-entry Vehicle = többszörös visszatérő hordozóeszköz
MT	Megaton = megatonna
NM	Nautical Mile = tengeri mérföld (= 1852,9 m)
PERT	Program Evaluation and Review Technique = program értékelő és áttekintő technika (<i>pert</i> = ügyes / fürge / hetyke)
RV	Re-entry Vehicle = (légkörbe) visszatérő hordozóeszköz
SINS	Ships Inertial Navigation System = hajók belső navigációs rendszere
SLBM	Submarine-Launched Ballistic Missile = tengeralattjáróról indított ballisztikus rakéta
SPO	Special Projects Office = Különleges Projektek Irodája

SSBN

fleet ballistic missile submarine (nuclear-propulsion) = ballisztikus rakéta-hordozó tengeralattjáró (atom-meghajtású)

Jegyzetek, megjegyzések

¹ Ebben a cikkben említett minden szovjet rakéta és hajó jelölése a NATO és az Egyesült Államok által használt jelölés. Ennek a rakétának szovjet jele: R-11FM.

² Az Egyesült Államok Haditengerészete hasonló módon nekilátott az irányított rakéták kifejlesztéséhez (de nem ballisztikusokéhoz, bár egy kísérleti indítást egy repülőgép-hordozó anyahajóról lefolytattak). A U.S. cirkáló rakéta program, amely műszakilag számos átmenetet tartalmazott, az Egyesült Államok flottájánál 1955-től 1964-ig rendszeresített Regulus tengeralattjáróról/hajóról indított fegyvert eredményezte.

³ Az IRBM haditengerészeti változatait Tengerészeti Ballisztikus Rakétaként (FBM) jelölték, azzal a jelöléssel, ami a Polaris program első két évtizedében volt használatos; az FBM azóta átadta helyét az SLBM jelölésnek, amit ezen cikk folyamán a következetesség végett használtunk.

⁴ A szovjet tengeralattjárók elsősorban folyékony hajtóanyagot használtak az SLBM-eikben.

⁵ Míg kezdetben kiegészítő pénzügyi forrásokat biztosítottak a Haditengerészet számára az SLBM fejlesztésekhez, 1959-re, arra készítették a Haditengerészetet, hogy a Polaris program finanszírozásának elősegítése végett, törölje a Regulus II szárazföldi célpontok ellen bevethető cirkáló rakéta és a P6M Seamaster vízre szálló [katamarán] bombázó fejlesztését, valamint halassza későbbre egy repülőgép-hordozó anyahajó építését. Abban az időben mindhárom programra a Haditengerészet úgy tekintett, mint stratégiai csapásmérő fegyverekre.

⁶ David A. Rosenberg, "Arleigh Albert Burke," in Robert William Love, *The Chiefs of Naval Operations* (Annapolis: Naval Institute Press), p. 277. Burke admirális, addig példa nélkül, hat évig volt a Haditengerészeti Műveletek Főparancsnoka, 1955-től 1961-ig.

⁷ Norman Polmar and Thomas B. Allen, *Rickover: Controversy and Genius* (New York: Simon & Schuster, 1981), p. 539. A szerzőknek Burke admirálissal készített interjúja.

⁸ Úgy tűnik, valami „mágikusnak” kell lennie a hármas számban. Az első szovjetek ellen épített Hotel és Golf osztályú SLBM tengeralattjárók mindegyike három rakéta hordozására volt képes.

⁹ Lieutenant Millard A. Cosby, USNR, "Polaris-Deep Deterrent," Nem publikált cikk, p. 7. Hewlett és Duncan egy 0,27 tonnás Polaris robbanófejet említ (egy 0,73 tonnás, azonos pusztító hatású Jupiter robbanófejjel történő összevetésben); p. 309.

¹⁰ A korai 1960-as évek Polaris programja 720 rakétát hordozó 45 darab tengeralattjáró (azaz öt darab kilenc-egységes hajóraj) előállítására készült. A védelmi miniszter [hadügyminiszter] Robert S. McNamara csökkentette a programot 4 hajóegységgel (64 rakétával). Ezek után a Haditengerészet csak négy ballisztikus rakéta-hordozó tengeralattjáró rajt alakított ki.

¹¹ Míg a Polaris körkörös találati hibája (CEP) titkosított adat, a haditengerészeti minisztérium egy titkosság alól feloldott, 1958 január 30-i emlékeztetője az (1200 tengeri mérföldes) Polaris A-1 rakétát három–négy mérföldes, az (1500 tengeri mérföldes) A-2 rakétát pedig két mérföldes CEP-pel minősítette.

¹² Abban az időben a U.S atom-meghajtású, előretolt mozgó radar-állomásként működő TRITON tengeralattjáró befoglaló méretei nagyobbak voltak, de a törzs kialakítása miatt kisebb volt a vízkiszorítása (kisebb, mint a Polaris tengeralattjáróké); a TRITON egy nem túl szerencsés, a maga nemében egyedülálló tengeralattjáró volt.

	<u>Hossz</u>	<u>Szélesség</u>	<u>Vízkiszorítás a felszínen úszva</u>	<u>Vízkiszorítás alámerülve</u>
TRITON	136,5 m	11,3 m	5950 tonna	7780 tonna
G.W.	116,4 m	10,1 m	5900 tonna	6700 tonna

¹³ A korai 1960-as években az amerikai Légierő 3000 db Minuteman rakétára szóló tervet terjesztett elő, jöllehet a programot a védelmi miniszter [hadügyminiszter] McNamara 1000 db-ra redukálta.

¹⁴ Az négy darab angol SLBM tengeralattjáró szintén Polaris A-3 rakétákat hordoz, bár azok a rakéták angol fejlesztésű robbanófejekkel vannak szerelve.

¹⁵ A következő, jelenleg fejlesztés alatt álló, Trident II (D-5) típusú, tengeralattjáróról indított rakéta, melynek hadrendbe állítását 1999. végére ütemezték, állítólag a szárazföldi telepítésű ICBM-ekét meghaladó pontossággal bír majd.

¹⁶ Harvey M. Sapolsky, *The Polaris System Development* (Cambridge: Harvard University Press, 1971), p. 94.

¹⁷ Harold Brown, "Department of Defense Annual Report, Fiscal Year 1979, of 2 Feb 1978, p. 110.

¹⁸ Ibid.

¹⁹ Frank C. Carlucci, "Annual Report to the Congress, Fiscal Year 1989, Feb 1988, p. 234. Technikailag tévedésben volt, mivel a 28 Poseidon tengeralattjáróból 12, valamint a nyolc (*Ohio* osztályú) Trident tengeralattjáró hordozta a Trident I (C-4) rakétákat.

²⁰ A Polaris tengeralattjáróknak valójában három elhatárolható osztálya volt:

5 db SSBN-598 *George Washington* osztályú

5 db SSBN-608 *Ethan Allen* osztályú és

31 db SSBN-616 *Lafayette* osztályú

Minden egymást követő osztálynál, köztük a *Lafayette* két altípusánál, jelentős volt az (elsősorban gépészeti módosításokból adódó) fejlődés. Mindamellet mindhárom osztálynak az alapfelépítése ugyanaz volt, ugyanazzal az S5W reaktorművel, és a hordozott 16 rakétával.

²¹ Az eredeti Trident tengeralattjáró-építési program 1-3-3-3 tengeralattjárót irányzott elő engedélyezésre négy egymást követő évben (vagyis tíz jóváhagyását egy négy-éves időszak alatt); a valószínűségben évi egy darabos ütemben engedélyezték őket.

²² Sapolsky, p. 253.

²³ Ibid., p. 309.

²⁴ Ibid., p. 308.

²⁵ Hewlett and Duncan, p. 314.

Norman Polmar: Elemző, író, az újkori hadászat és modern haditengerészet, ezen belül az Egyesült Államok Haditengerészetének nemzetközileg elismert szaktekintélye. 1980-tól konzulens tanácsadóként dolgozott kormányzók és parlamenti képviselők mellett ugyan úgy, mint a Haditengerészeti Minisztériumban, a Hadügyminisztériumban, a Los Alamos-i Nemzeti Kutató Központban és a Nemzeti Tudományos Akadémiában. Számos cikk és több, mint 25 könyv szerzője, köztük (Thomas B. Allennel közösen) *Rickover: Ellentmondásosság és zsenialitás; Szovjet haditengerészeti kalauz; Az Egyesült Államok Haditengerészeti flottájának hajói és repülő.* Az 1960-as és 1970-es években a *Janes Fighting Ships* amerikai szekciójának szerkesztője. Jelenleg (1997-ben) a közös amerikai-orosz kiadású *A szovjet-orosz haditengerészet története* c. kiadvány angol nyelvű változatának szerkesztőjeként tevékenykedik.

Eredeti cikk: Norman Polmar, „*The Polaris: A Revolutionary Missile System and Concept*”; Seminar 9 (1994) – "More Bang for the Buck:" U.S. Nuclear Strategy and Missile Development, 1945-1965; Colloquium on Contemporary History, January 12 1994; Naval Historical Center; Department of the Navy; USA

Forrás: <http://www.history.navy.mil/colloquia/cch9d.html>

Fordította: Dr. Vattai Zoltán András, 2005. augusztus

KÖNYVISMERTETŐ

- projektmenedzsment, kockázatmenedzsment -

Harvey M. Sapolsky
A POLARIS RENDSZER KIFEJLESZTÉSE
Harvard University Press, 1972

Miért tarthat számot bárminemű érdeklődésre is napjaink szakemberei részéről egy ma már elavultnak számító katonai programot bemutató könyv, 3 évtizeddel megjelenése után? Mert ösztönzőleg hathat minden menedzser számára, aki úgy érzi, hogy lehetetlen kihívással és szinte vállalhatatlan kockázatokkal került szembe. Ez a könyv bemutatja azokat a menedzsmentfogásokat, melyek elérhetővé tették az Egyesült Államok Haditengerészete számára a Polaris tengeralattjárókat, az ötlet felmerülésétől a hadrendbe állításig - ami napjainak elképesztően rövid időkeretek között megvalósult, kiemelkedő műszaki teljesítménye volt.

TÖRTÉNELMI HÁTTÉR:

Az 1950-es években az Egyesült Államok kormánya számára kiemelt nemzeti prioritással bírt egy erőteljes elrettentő hadászati erő kiépítése a potenciális Szovjet fenyegetéssel szemben. A nukleáris fegyverek biztosítani tudták a megfelelő pusztítóerőt, de megfelelő célbajuttató rendszerre is szükség volt. A hagyományos gondolkodásmód azt diktálná, hogy a repülőgépek és irányított rakéták együttese volna a legmegfelelőbb eszköz ezen energiának a nem éppen készséges címzetthez történő szabad eljuttatására. A nemzet stratégiai védelmében meghatározó kulcs-szerep betöltéséért folytatott versengésben az Egyesült Államok három fegyverneme bőszen harcot vívott egymással saját stratégiai fegyverrendszereik továbbviteléért. A Légierő nagyhatótávolságú bombázóinak családja, majd később az interkontinentális ballisztikus rakéták (ICBM-ek) számos generációja mellett kardoskodott – miközben lerakta a 882-es katonai szabványban rögzített Rendszer-Biztonsági Program alapjait. A Szárazföldi Erők saját ICBM-eit vezette elő. A Haditengerészet atom-meghajtású tengeralattjárókból álló haderőt javasolt, melyeket később haditengerészeti ballisztikus rakéták (FBM-ek) néven közismertté vált Polaris típusú rakétákkal szerelnének fel. A Szárazföldi Erők programja pénz hiányában elhalt. A Légierő mindkét programja tovább élt, de nem csekély költség-túllépéssel és számos látványos fiaskövél, mint amilyen a B-36-os bombázó is volt. A Haditengerészet programja jelentős előrelépés volt, különös tekintettel az akkor megoldásra váró feladatok és legyűrendő kockázatok összetettségére. Az a találatkonyság, melyet ezen kihívások legyőzésével a Haditengerészet a menedzsment területén mutatott, eset-tanulmányok ideális témájaként szolgálhat. A Polaris Projekt az Egyesült Államok kormányhivatalnokainak vélhetően legnagyobb diadalmenete volt azelőtt, hogy a NASA embert juttatott a Holdra. A NASA sikereinek jó részét a Polaris-nak köszönheti, sok haditengerészeti megoldás előnyének megragadásával.

AZ EGYESÜLT ÁLLAMOK HADITENGERÉSZETÉNEK MENEDZSMENT FILOZÓFIÁJA ÉS A POLARIS PROJEKT:

Mint a rendszergondolkodás szenvedélyes korai hívei, a Haditengerészet tervezőgárdájának felfogása szerint egy fegyverrendszer bármely összetevőjének önmagában történő fejlesztése csak kis előrelépést eredményez a teljes rendszer teljesítőképessége szempontjából. Ugyanakkor, több összetevő összehangolt fejlesztése öt éven belül egy rendkívül hatékony rendszer ígéretével kecsegtet, és még hatékonyabb rendszerrel tíz év távlatában. A Polaris program menedzserei a kibontakozó technológiai trendeket ismerték fel, szemben a hagyományos, már létező műszaki eredményekre történő támaszkodással. Következésképpen tekintetüket, terveit-

ket jó előre a jövőbe vetítették – csaknem minden területen. Egy tipikus kérdés, amit 1958-ban feltehettek, úgy hangozhatott: „Miért alkalmazunk egy 1958-as nukleáris robbanófejet egy 1965-ös fegyverrendszerben?”

A SZERVEZET

A politikai, pénzügyi karrier és az igen magas nemzetvédelmi pénzügyi keretek okán elképesztő mértékben folyt a rivalizálás a három fegyvernem között, sőt fegyvernemen belül is. Amikor a Kongresszus jóváhagyta a Polaris Programot, a Haditengerészet egy új szervezeti egységet, a Különleges Projektek Irodáját (SPO) hozta létre a projekt menedzselésére. Ez egy tudatos mozzanat volt annak elkerülésére, hogy a projekt akár a Vezérkar hivatalaihoz, akár a Légügyi Hivatalhoz kerüljön. A Haditengerészet – bölcsen – úgy vélte, ha a program akár az egyikhez, akár a másikhoz került volna (bár mindkettőnek lett volna feladata benne), a következőként előálló rivalizálás a projekt szempontjából végzetes lett volna.

A FEJLESZTÉSI CÉL

A felhatalmazás és a kezdéshez szükséges pénzügyi alapok birtokában az SPO hatalmas feladat előtt állt: létre kellett hoznia egy teljesen új fegyverrendszert. Ebbe beletartoztak az atom-meghajtású tengeralattjárók, az akkor még gyermekcipőben járó globális helymeghatározó- és kommunikációs rendszerek, a hordozórakéta rendszerek, az indító rendszerek, a tűzvezérlő rendszerek, a karbantartó- és ellátó rendszerek, valamint a kiképzési programok. Ezen összetevők legtöbbje abban az időben még nem is létezett – sok közülük még csak tervezőasztalon volt látható. Mindezeket meg kellett tervezni, megépíteni, tesztelni és egyetlen működőképes egységbe integrálni, majd hadrendbe állítani - vázlatokból, öt évnél nem hosszabb idő alatt! Egy-két technológiai újdonságra alapozott fegyverrendszer kiépítése nem volt szokatlan dolog, de tucatnyi új technológiával ugyanez, az már igen.

A MENEDZSMENT CÉL

Létrehozásától fogva az SPO-nak két ellentmondásos menedzsment célja volt:

1. Teljes szervezeti függetlenség biztosítása az FBM projekt számára. A tapasztalatok azt mutatták, hogy a program teljeskörű SPO általi irányítása nélkül a sok hivatali és politikai érdek-csoport veszélybe sodorhatja a Polaris projektet. Ezen csoportok egyikétől sem várható, hogy legfőképpen fejben legnagyobb odaadással az FBM érdekeit szolgálja, mindegyik inkább saját érdekeit tartja szem előtt. Az SPO menedzserei tapasztalatból tudták azt is, hogy krízishelyzetben a kormányzati intézkedések sokkal inkább a központosítás, mintsem a decentralizálás irányába mutatnak. Mindezen okokból kifolyólag céljai eléréséhez az SPO-nak szüksége volt arra, hogy a projekt felett csaknem teljeskörű kontrollal rendelkezzen.
2. További közreműködők gyakorlatban is megvalósuló együttműködésének és a költségvetés Kongresszusi jóváhagyásának elérése. A Polaris sikere nagymértékben más civil- és katonai szervezetek, intézmények tényleges műszaki hozzájárulásától és a magas költségvetés Kongresszusi jóváhagyásától függött. Az együttműködés és támogatás sajnos rendszerint csak akkor volt elérhető, ha az SPO lehetőséget biztosított ezen szervezetek számára az ellenőrzésre, a betekintésre, sőt a projektbe történő nyílt beavatkozásra. Mindazonáltal az SPO el akarta kerülni a vizsgálóbizottságok és kongresszusi vizsgálatok közvetlen befolyását. Ennek megfelelően az SPO-nak a lehető legnagyobb külső

támogatást kellett elérnie a külső beavatkozások lehető legalacsonyabb szinten tartása mellett.

A STRATÉGIA

Mindkét, egymással látszólag összeférhetetlen cél elérése érdekében az SPO az alábbiakban jellemezhető négy stratégiát vette át:

1. Megkülönböztetés (Differentiation)
2. Bevonás (Co-optation)
3. Mértéktartás (Moderation)
4. Innováció a menedzsmentben (Managerial Innovation)

1. "Megkülönböztetés"

Az SPO gondosan megkülönböztette saját termékét az egyéb stratégiai fegyverrendszerektől. Az SPO a tengeralattjárók sebezhetetlenségét, taktikai és stratégiai előnyeit reklámozta. Végeredményben sikeresek voltak a Kongresszus meggyőzésében az FBM-ek egyedülállóságát illetően.

Projekt-csapata ösztönzése végett az SPO a Polaris személyi állományát is megkülönböztette a Haditengerészet egyéb alkalmazotti állományától. Különleges egyenruhát viseltek, öt és fél napot dolgoztak egy héten, minden küldeményüket „Elsőbbségi Küldemény” felirattal látták el, azt mondták nekik, hogy „gondolkodj nagyban, vagy kint a helyed”, valamint – szokatlan módon – első osztályon utazhattak és vitán felül álló költségkeretekkel rendelkeztek.

Az SPO komoly energiát fordított az „aranygallérosok” gyakori körutaztatására és szónoklataira, hogy az FBM fontosságának és egyedülállóságának kihangsúlyozásával is motiválják az SPO és az alvállalkozók személyi állományát. Az SPO valójában elrejtette PR költségvetését a közvélemény elől azzal, hogy a projekt reklámozását külső vállalkozókra bízta. Az SPO még személyi állományának családjai számára is tájékoztatót tartott annak magyarázatára, hogy hitvesük miért dolgozik olyan hosszú órákon át, és miért van oly nagy nyomás alatt.

A sajtó változatlanul optimista volt, ha éppen nem kifejezetten túlfűtött. Mindez egyfajta természet feletti aurát generált a programnak és további nyomást gyakorolt a projekt személyzetére annak biztosítására, hogy a technológia és a fejlődés az előre meghirdetettek szerint alakuljon.

2. "Bevonás"

Az SPO tudatosan kezelte a programot potenciálisan fenyegető külső erőket azáltal, hogy a program részesévé tette, valamilyen vezető- illetve politikai tisztségbe vonta őket, még ha az csak névleges jelentőségű is volt. Így az SPO módszeresen bevonta a programba az FBM kritizálóit és olyan pozícióba jutatta őket, hogy maguk is a menetrend részévé váltak. A tudósok és akadémikusok, különösen a kételkedők számára célzott tájékoztatókat tartottak. Az SPO még egyfajta szentimentális alapítványt is létrehozott a külső javaslatok ösztönzésére. Az SPO a mind szélesebb politikai támogatás érdekében hajógyártó magántársaságokat keresett meg (a köztulajdonú hajógyárakkal történő szerződésekkel szemben). Mivel az időkeretek kritikus tényezők voltak, az SPO személyes fogadalmakat kért és kapott az alvállalkozóktól, sőt azok alkalmazottaitól is, hogy munkájukkal időben elkészülnek.

Az SPO céljai eléréséhez gyakran nyúlt az előzékenység eszközehez. Erre egyik példa a tengeralattjárók által hordozandó ballisztikus rakéták száma volt. Pusztán a hajótest megnyújtásával 2, de akár 48 rakétát is el lehetett helyezni. Az SPO eredetileg kompromisszumként 32-t javasolt. Az idősebb, II. Világháborús tengeralattjáró kapitányok ezt elutasították, mondván, hogy így a hajó túl hosszú lesz ahhoz, hogy könnyen lehessen vele manőverezni. A veterán kapitányok kedvében járva az SPO megkérte őket, hogy a szerintük leginkább megfelelő számot írják fel egy darab papírra. Miután e cédulákat egy kalapból rendre kihúzták, összeadták és átlagot számoltak belőle, az SPO a rakéták számát 16-ra(!) csökkentette.

Mellesleg szólva, az SPO soha nem érte el célját, az FBM projekt feletti totális felügyeletet. A Haditengerészet Hyman Rickover admirális által vezetett Nukleáris Meghajtási Igazgatósága és a Hajózási Minisztérium részt követelt – és kapott – a projektből. Mindvégig Rickover állította fel a személyi követelményeket és választotta ki az atomtengeralattjárók személyzetét – de az már egy külön áttekintés témája.

3. "Mértéktartás"

Az SPO hosszútávú támogatást szerzett rövidtávú célok feláldozásával. Az FBM koncepció sikere fontosabb volt a minden egyes részletre kiterjedő teljes ellenőrzés megszerzésénél. Az SPO számos esetben tudatosan nem élt taktikai sikerek elérésének lehetőségével, azért, hogy elsődleges céljaira koncentrálhasson. Ez lehetővé tette az SPO számára, hogy elkerülje, hogy további ellenségeket szerezzen magának. Fegyelmezettségével és igényességével az SPO a Kongresszus előtt is növelte hitelét a támogatások és pénzeszközök igénylésekor. „Ha Lola akar valamit, akkor azt Lola meg is szerzi” – ahogy azt egy SPO hivatalnok fogalmazta meg tömören.

Egy példa a mértéktartásra az FBM parancsnokságok helyének megválasztása volt. Míg más ágazatok saját, helyszíni Projekt Parancsnokságokkal rendelkeztek, az SPO sajátjait Washingtonban, igen szerény épületekben alakította ki. Az SPO mértéktartása nem egyszerűen hitelesnek mutatkozott, de ami lényegesebb, a Kongresszus látta annak.

Az SPO szintén lényeges önuralomról tett tanúbizonyságot azáltal, hogy nem tört minden egyes érdekeltségi körébe tartozó projekt vezetői pozíciójára (példa erre a kommunikációs rendszer). A szolgálat többi ágazatától eltérően az SPO az ellenzők meg nem támadásának politikáját folytatta. Hivatalos tájékoztatások alkalmával és a Kongresszus előtt az SPO mindig tisztelettel utalt a Légierő ICBM rendszerére, kihangsúlyozva, hogy egyetlen valós ellenség van, a Szovjetunió. Érdekes módon ezt a hozzáállást a Légierő nem viszonzta, ehelyett minden alkalmat megragadott az FBM program megtámadására.

4. "Innováció a menedzsmentben"

Egyik nagy kihívás, ami elé az SPO nézett, a program valamennyi alkotóelemének egységbe fogása volt. Az SPO tudta, hogy más fegyverrendszerek a részletekbe menő integráció miatt siklottak ki. Szemléletmódjukban átléptek az SPO előtt álló sok lebilincselő műszaki kihíváson és e helyett a menedzsment feladatokra, úgymint tervezésre, szervezésre és az előrehaladási jelentésekre összpontosítottak. Az SPO úgy ítélte meg, hogy a Haditengerészetnél akkor létező rendszerek inkább koncentráltak a bemenetekre, mint a kimenetekre. Összetett, bonyolult projektjükben ők csak a kimenettel kapcsolatos költségeket akarták szemmel tartani és

minden ténykedésnek, lett légyen az működési, avagy adminisztratív jellegű, a kimenetre kellett irányulnia.

Az SPO nagy hangsúlyt fektetett személyi állománya elhivatottságára is. Több éven át csaknem háborús viszonyokhoz hasonló körülmények között kellett dolgozniuk. Az SPO 1955-ben 45 tisztből és ugyanennyi civilből álló személyi állománnyal indult. Egyiküknek sem volt tapasztalata ballisztikus rakétákkal. Öt évvel később 325 emberük volt, és 1972-re, a következő generációs (értsd: Poseidon) rakéták idejére már 1800.

Az élvonalbeli menedzsment technikák oly sikeressé tették az SPO-t, hogy a Haditengerészet, a Szárazföldi erők és a Légierő elhalványult mellette, minek következtében számottevően csökkent a befolyásuk. Példának okáért műveleti partnerükkel (a Flottával) történő lehető leg-szorosabb együttműködés jegyében az SPO megkapott minden éles őrzárati jelentést. Az SPO tiszteket rotációs rendszerben tengeri szolgálatra vezényelték. Az SPO helyettes vezetői tisztét egy első sorbeli tengeralattjáró parancsnok, akkoriban éppen I. J. Galantin töltötte be. Nem meglepő módon, az SPO hathatós együttműködést tudott kiépíteni a Flottával.

Az köztulajdonú hajógyáraknak elég jó reputációjuk volt ahhoz, hogy egyenrangúságot követeljenek meg a megbízó szervezetektől, és gyakran vonakodtak kompromisszumokba bocsátkozni, avagy alárendelni saját érdekeiket. A magán hajógyárakkal nem voltak ilyen problémák. Valóban, gyakran kötöttek alvállalkozási szerződést más cégekkel, és gyakorolták felettük az ellenőrzést – a projekt-integráció első valós megnyilvánulásaként.

Az SPO átfogó felügyeletet gyakorolt a projekt felett, miközben jeletős mértékben hagyatkozott a vállalkozókra is. Őszinént szólva, a vállalkozók nem tartották túl sokra az SPO csapatát, felismervén, hogy az SPO önmagában nem boldogulhat. Hitele biztosítása végett, ugyanakkor, az SPO mindig egy lépéssel a vállalkozók előtt járt és egy lépéssel előbbre tartott a technológiában is. Mindig olyan helyzetet teremtettek, hogy számos alternatíva közül választhassanak, amit hozzáértő módon meg is tettek. Igen nagy számú, sok-sok előterjesztést produkáló vállalkozóval dolgozván, az SPO felhatalmazása soha nem kérdőjeleződött meg.

Az SPO igen fogékony volt az újító jellegű gondolatokra. Érdekes módon, a magánipar kezdeti „ötletgyűjtő kiruccanása” semmi érdemlegeset nem produkált. Az SPO nagy hangsúlyt fektetett a felajánlásokra és őszinteségre a cél-folyamatok előrehaladási jelentéseinél, a legmagasabb szinttől a legalacsonyabbig. A korai figyelmeztetés és korrekció kiemelt jelentőséggel bírt. Az SPO olyan metodikára törekedett, melynek birtokában mindig tudhatta, hogy mi az, ami éppen rendben (vagy nem a kívánalmak szerint) folyik, végig a teljes szervezetben.

Az SPO mint menedzsment modell a maga idejében végül olyan hírnévre tett szert, hogy teljes munkaidős csapatot kellett foglalkoztatnia az SPO menedzsment technikák kormányzati és ipari tisztviselők előtti bemutatására. Néhány, ezen technikák közül:

a) **Program Értékelő és Áttekintő Technika (PERT)**

Az SPO a PERT-et számítógépesített tervező-, ütemező- és ellenőrző eszközzé fejlesztette. Az SPO menedzserei tudták, hogy a Haditengerészet, vagy a politika magasszintű beavatkozása és vizsgálódásai mindig megakasztották a programokat.

A PERT segítségével az SPO olyan menedzsment kiválósági reputációra tett szert a Hadügyminisztérium és a Kongresszus szemében, hogy azok a Polaris projekt teljes időtartama alatt

nem avatkoztak bele az ügyeibe. Ez lehetővé tette az SPO számára, hogy a program műszaki vonatkozásainak menedzselésére koncentrálhasson, ahelyett, hogy a maga, illetve menedzsmentje létjogosultságát bizonygassa.

A PERT életre hívása hivatalosan egy polgári alkalmazott, Gordon Pehrson 1957. januári, állománynak szóló körlevelével kezdődött, melyben egy a teljes projektre kiterjedő, közös, integrált tervezési és kiértékelő rendszer létrehozását javasolta. A projekt minden szintjén tervekkel kell rendelkezni, és előrehaladási jelentéseket kell készíteni, melyek logikus és világos kapcsolatban állnak a projekttel, mint egészszel. Ez a rendszer gyakori előrehaladási jelentéseket és terveket igényelt a korrekciós intézkedésekhez.

Az SPO jártas volt a du Pont Rt. és a Remington Rand Univac együttműködésében kifejlesztett Kritikus Út Módszerében (CPM) és az ismétlődő feladatoknál alkalmazott Egyensúlyi Diagramok (LOB) módszerében. Az SPO a monitoring rendszert célzó további kutatásokra és fejlesztésekre adott megbízást, melynek eredménye lett a PERT. A PERT egyik előnye a kritikus út beazonosítása, ami lehetővé teszi az erőforrások átcsoportosítását a nem kritikus tevékenységekről a kritikusakra, aminek elsődleges célja időnyereség elérése és nem a költség-takarékosság. Így módon a PERT ideális volt az SPO számára, hiszen az idő, és nem a pénz volt az elsődleges erőforrás.

A PERT alkalmazása során meghatározásra kerül a ténylegesen elért és az előrejelzett készülség. Segítségével történhet a meglévő tervek változtatásának kiértékelése és az ilyen változtatások hatásainak meghatározása. A PERT kapcsolatot létesít az idő-, a költség- és az előrehaladás között, de nehézséget okoz a pontossá tétele. Mérnöki időbecsléseket igényel, melyek többnyire pontatlanok. A legkedvezőbb, a legkedvezőtlenebb és a leginkább valószínű időértékeket veszi alapul, majd szorzótényezőkkel látja el azokat mind a várható időtartam, mind a kritikus út meghatározásához. Egy bonyolultabb projekt esetén számítógép szükséges valamennyi számítás elvégzéséhez.

$$T_C = \frac{b + 4m + w}{6} \quad \text{ahol} \quad \begin{array}{l} T_C = \text{Befejezéshez szükséges idő} \\ b = \text{Legkedvezőbb időérték} \\ w = \text{Legkedvezőtlenebb időérték} \\ m = \text{Legvalószínűbb időérték} \end{array}$$

Abban az időben néhányan már úgy gondolták, hogy a PERT jelentősebb, mint a Polaris maga! Valószínűsíthetőleg két évvel rövidített meg a program végrehajtását. A többi szolgálat eleinte becsmérelte a PERT-et, majd arcátlanul másolni kezdte. Ez konzultánsok és oktatók szabályos PERT háziiparát hívta életre az 1960-as évek során.

A vállalkozók mindazonáltal bizalmatlanok voltak a PERT-tel szemben és nehezteltek a fejük felett átnéző SPO projektmenedzserekre. Az SPO projektmenedzserek viszont nehezteltek az ő fejük felett átnéző PERT számítástechnikusokra. Az egyetlen útja amivel az SPO a vállalkozókra tudta kényszeríteni a PERT használatát, az volt, hogy annak kiterjedt használatát és előnyeit kommunikálta a közvélemény felé. Az SPO nyers PERT alapadatokat várt, egyenesen a tudósok munkaasztaláról. A vállalkozók ellenintézkedésként, némi iróniával, saját PERT részlegeket hoztak létre a PERT adatok „kidolgozására”, mielőtt az SPO-nak továbbították azokat. Bár ez az SPO kezére játszott, csaknem hasznavehetetlenné is tette a PERT-et.

Az SPO igazgatója, William F. Raborn altengernagy kíméletlenül erőltette a PERT-et. A színes PERT diagramok nagy hatással voltak mindenkire, és a projekt jellegével párosulva a

menedzsment „szexepiljeként” sugárzottak. Ez kordában tartotta a Hadügyminisztérium orvadászait és távoltartotta a politikusokat az SPO hátbatámadásától. A többi közszolgálat annyira beleszeretett a PERT-be, hogy rövid időn belül az újabb szerződéseknél követelményként írták elő a használatát.

Tárgyilagosabb megítélés szerint a PERT legnagyobb előnye a hálózatos időmodell és időelemzés. A PERT segítségével csökkenteni lehet az időbeli- és költségbeli keret-túllépéseket, és használóját képzetesebb menedzser színében tünteti fel. A hátrányokat illetően pedig, a projekt teljes költségének 4-5%-át emésztve fel, túl sokba került, és nem kellő menedzselés esetén ez a mérték elérhette a 15%-ot is.

A Királyi Haditengerészet is akkor ismerte meg a PERT túlhangsúlyozott sikerét, mikor az 1960-as években belekezdett saját Polaris programjába. A Királyi Haditengerészet tudatosan, és alapvetően azért vette át a PERT-et, hogy távol tartsa a Fehér Házat, a Parlamentet és más kritikusokat a projektjétől. Ez éppen olyan jól működött náluk, mint az Amerikai Haditengerészetnél.

b) Megbízhatósági Menedzsment Indikátor (RMI)

Az RMI a PERT adatok helytállóságát (értsd: pontosságát és időtállóságát) kísérte figyelemmel. Elméletben azt kellett volna jeleznie, hogy a számítások milyen gyakori ismételt felülvizsgálata mellett lehet biztosítani, hogy az a projekt során érvényben maradjon. A gyakorlatban ez sohasem működött teljes sikerrel.

c) Projektmenedzsment

Az SPO érdemének tekintik azt, hogy pontosította a projektmenedzsment fogalmát úgy, ahogy azt ma ismerjük. A menedzsmentet úgy határozták meg, mint a beosztottak munkamódszereinek figyelemmel kísérését és irányítását. Az SPO azt igényelte és meg is kapta a vállalkozóitól, hogy azok projekt-szervezeteket hozzanak létre. Ezek teljes időben a Polaris munkálataira összpontosították erőforrásaikat, és nem egyszerűen mellékes tevékenységként kezelték azokat. Ez egyben az FBM vak híveivé tette a vállalkozókat, és e vállalkozóktól elválaszthatatlanná tette az FBM projektet.

Klasszikus probléma, amivel a projektmenedzsereknek szembe kell nézniük, a projekt-csapat és szervezeti struktúra feloszlata, ha már a projekt befejeződött. Bár az SPO-t gyakorlatilag feloszlatták, az FBM-ek további két generációját hozta létre: először a Poseidon-t, majd a Trident-et. Némi iróniával szólva, dacára a Polaris sikerének, ezen utódok egyre kevésbé kordában tartottak lettek. A Trident program volt az egyetlen kifejezetten rosszul menedzselte projekt az Egyesült Államok kadtörténetében, a maga idejében.

d) Projektmenedzsment Tervek (PMP)

Minden tevékenységhez tartozott egy egységes megjelenésű tervezet, mely beazonosította a rész-tevékenységeket és rész-határidőket, valamint egységes jelrendszert használt a jóváhagyások, koordinációk, stb. feltüntetésére. Mindennemű előrehaladást ezekhez a tervezetekhez mértek.

Mivel az SPO folyamatosan változtatott az elképzelésein, a PMP-k nem voltak teljesen sikeresek. Ennek eredményeként, gyakran a tervek legalább annyira váltak zavar forrásává, mint

amennyire az iránymutatás eszközévé. A tervek gyakran nem tudtak lépést tartani magával a programmal. A pontatlanul megfogalmazott rész-határidők jelentős értelmezési problémákat és zavarokat okoztak. Például a „Légkondicionáló rendszer átadása” jelenthette azt is, hogy a rendszert faladában a kikötőben adják át, vagy a kikötőben, beépítésre kész állapotban adják át, avagy be is építik a tengeralattjáróba, vagy netalán beépítik és üzemképes állapotban adják át a tengeralattjáróban.

e) **Műszaki Fejlesztési Tervek (TDP)**

Ezek a tervek rögzítették a technikai eszközök kifejlesztéséhez szükséges feladatokat, eljárásokat, elvárt teljesítménymutatókat, valamint az ellenőrzés folyamatait. Ez a minőséggel terjesztette ki a dimenziókat, hiszen a PERT nem kezelte a minőségi kérdéseket.

f) **Program Menedzsment Központ (PMC)**

Ez a védett tárgyalószoba az SPO Washingtoni Központjában volt a teljes menedzsment központja, és mindennemű menedzsment eligazítás helyszíne. Kiterjedt audio-vizuális eszközrendszerrel rendelkezett és körülbelül 110 főre biztosított ülőhelyet. A PMC sikere elsősorban a hetente benne tartott értekezleteknek volt köszönhető, melyeken az SPO igazgatója elnökölt.

g) **Heti Program-áttekintő Értekezletek**

Az SPO igazgatója minden szombat reggelén a Program Menedzsment Központban Program-áttekintő Értekezletet tartott. A forma merev volt. Az első napirendi pont minden alkalommal a fentebb bemutatott PMP-k alapján a „Terv Szerinti Eredmények” kérdése volt. A fejleményeket a projektmenedzserek az alábbi négy változat valamelyikével jelenthették:

"Jól alakul"

Minden a terv szerint, a tervezett irányban halad. Nincs szükség további intézkedésre.

"Kisebb nehézségek"

Kisebb probléma, melyet az SPO érintett részlegének, vagy az érintett vállalkozónak azonnal korrigálnia kell.

"Nagyobb nehézségek"

Súlyosabb problémák, melyek kritikusakká válhatnak, ha nem kellő hatékonysággal kezelik őket. Az SPO azonnali közbeavatkozását igényli.

"Kritikus nehézségek"

Olyan nagy probléma, hogy az a program egészét veszélyezteti és sürgős külső segítséget igényel.

Az SPO menedzserek elvárták, hogy előre értesüljenek a problémákról, és ne az értekezleten. Ez lehetővé tette számukra a megfelelő intézkedés-sor meghatározását és a kapkodó, vagy visszás döntések elkerülését. Az értekezletek a személyi állomány motiválása (értsd: presszionálása) révén segítették a projekt kézbentartását. Raborn admirális látszólag véletlenszerűen

választotta ki és ostromolta kérdésekkel néhányukat. A projekt előrehaladtával, amikor tengerre kerültek az első Polaris tengeralattjárók, az utakról visszatérő hajóparancsnokok tájékoztatták az értekezlet résztvevőit az általuk tapasztalt problémákról.

Ezek a heti értekezletek jól beváltak. Az állomány precízen készült a szombat reggeli találkozásokra. Az SPO programigazgatójával szemben ültek a vállalkozók, a részlegvezetők és a beosztottak. Minden ötödik értekezletről kizárták a vállalkozókat és a látogatókat. Az igen nagy számú jól informált szakember jelenléte és mind a határterületek teremtette egymásrautaltság hatalmas nyomással kényszerítette ki a teljes őszinteséget az előrehaladási jelentéstételkor. Valótlan állítása főbenjáró bűnnek számított és súlyos következményekkel járt.

h) Menedzsment Ábrák

A Polaris projekt tág terepet engedett a csúcs-minőségű – élesen körvonalazott, tiszta, minél színesebb, igen vonzó látványt mutató és lenyűgöző – garfikáknak. Sikerral vetették be őket a Kongresszus meggyőzésekor is.

ÁLTALÁNOS MENEDZSMENT TECHNIKÁK

Minden PERT-körüli felhajtás ellenére a program sokkal inkább köszönhette sikerét

- az alkalmazott menedzsment technikáknak (mint az bemutatásra került)
- a vezetésnek (ami a fentiek alapján nyilvánvaló)
- az állomány találékonyágának (nyilvánvalóan) és a
- a hatékony szervezeti struktúrájának (lásd az alábbiakban).

Az SPO felépítése egyaránt volt decentralizált és versenyképes, ami egyfajta önszabályozó hatást gyakorolt a projekt felett. A hat részleg laza szövetségben állt egymással. Az erős washingtoni központi felügyeletet távol tartották, azért, hogy az abból elkerülhetetlenül adódó hivatali papírmunka a vállalkozó szellemet és képességet minél kevésbé forgácsolhassa szét. Hasonlóképpen, a decentralizáció a Washington megvezetésére irányuló kísérletek csökkentését is szolgálta, ami egyben a projekt integritását is védte. Így határozott döntés született a decentralizálásról és a vállalkozó szellem ösztönzéséről. A szervezeti egységeknek nem csak hogy együttműködniük kellett egymással, de gyakran egymás versenytársaivá is váltak. Ez üdvös hatékonysággal ruházta fel a programot, a személyi állomány számlájára.

A részlegvezetőket 24 órán belül felmenthették, ha hibáztak, és hiba esetén a polgári alkalmazottaknak is lehetlenné tették, hogy korábbi pozíciójukba visszatérhessenek. A hosszú órák, utazások, elszakadás a családtól és a teljesítmény-elvárások súlyos nyomásként nehezedtek a személyi állományra. Ennek kompenzálására Raborn bátorította a katonai/vállalati fraternizálást. Mindenki számára, aki a programban közreműködött az első osztályon történő utazás lehetőségét biztosította, és nem kicsinyeskedett a költség-számlákat illetően sem. Ugyancsak, előléptetéssel, illetve személyreszóló dícséretekkel és jutalmakkal díjazta a kiváló műszaki eredményeket, a határidőben történő, illetve határidő előtti teljesítéseket. (Érdeemes megjegyezni, hogy soha senki nem kapott kitüntetést pénzügyi megtakarításért.) Amit cserében kapott, az az elkötelezett fanatikusok hada volt.

A projekt hatalmas szinergikus kockázattal volt terhes, hiszen egy működőképes FBM tengeralattjáró előállítását messze nehezebb feladat volt, mint valamennyi al-rendszer önmagában történő elkészítése.

Négy nagy nehézség volt a Polaris menedzselésében:

1. A funkcionális összhang biztosítása: Összetettségéből adódóan, a projektet al-rendszerekre bontották. Ugyanakkor, ezen al-rendszerek esetleges elégtelensége negatív hatású lehetett a teljes rendszerre nézve. Az al-rendszerek közötti kapcsolódási pontok („interfészek”) menedzselése elsődleges fontosságú menedzsment feladattá vált.
2. Nehézségek a célok felismerésében: Lépést tartani olyan tervekkel, melyek mindegyike még feltatálásra váró dolgokra irányul, csaknem lehetetlen feladat.
3. Szervezeti átalakítás: Az SPO-t felkérték, hogy a Haditengerészet sikertelen Jupiter projektjétől fogadjon be embereket az FBM programba.
4. Folyamatosan bővülő, erőltetett ütemtervek: Az SPO léterhozását követő első évben az SPO-t és az Egyesült Államok kormányát életük szakmai sokkja érte: a Szputnyik. Az első hajóegységek elkészítésének határidejét előbbre hozták, 1963-ról 1960-ra; és az elkészítendő egységek számát a 3-6 darabról 27-re, a teljes darabszámot pedig 41-re emelték.

William Levering Smith admirális, aki Raborn admirálist az SPO igazgatói posztján követte, az alábbiakban fejtette ki az SPO „Menedzsment Maximumait”:

1. Teljesítmény-elvárások: A tudatos határozatlanságokat tartalmazó teljesítményelvárásokat műszakilag hozzáértő gárdának kell meghatározni.
2. Háttér-csapatok: A feladatok minden kritikus elemének kidolgozására kettő, vagy három csapatot kell kijelölni. Ha valamennyien sikerrel járnak, az SPO a legjobbat tudja választani. Ha valamelyik nem boldogul, még mindig van két másik. Sőt, ha kettő is sekertelen marad, az SPO-nak még mindig marad egy tartaléka.
3. Tartalék-stratégia: Amennyiben valamennyi háttér-csapat kudarcot vall, a tapasztalt vén róka SPO-nak még mindig rendelkeznie kell olyan alternatívával, mely nem épít a problémás összetevőre.
4. Alkalmazás kontra technológiai tökéletesítés: Az eredeti ütemterv tartása fontosabb volt, mint késlekedni, reménykedve egy ígéretes technológia jövőbeli előnyeinek kiaknázásában.
5. Cél fegyelem: Minden tevékenységet, mely nem vitte kifejezetten előbbre a projektet, töröltek (pl.: felszíni hajókra és szárazföldre telepített Polaris).
6. Tengerészeti Kutatóintézetek távoltartása: Azok mindennemű keret-csökkentésre, avagy más prioritásokra túl érzékenyek voltak.
7. Kapcsolódási pontok: Azt tudni, hogy mit kell felügyelni, legalább olyan fontos, mint felügyeleti hatalommal bírni. A menedzsereknek inkább a kapcsolódási pontokkal, mint az al-rendszerek részleteivel kell törődniük. A kapcsolódási pontokat („interfészeket”) jól előre rögzítették, és szigorúan figyelemmel kísérték. Ez segítette az SPO-t annak elkerülésében, hogy elmerüljön a műszaki részletekben, valamint bátorította a kezdeményezést és a dinamizmust a vállalkozók és a hat SPO részleg között.

8. Erőforrások: Az erőforrások felett a Műszaki Igazgató és az Igazgató Tanács rendelkezett.

KONKLÚZIÓ: A POLARIS SIKERÉNEK TITKAI

11 milliárd (1967-es) amerikai dolláros keretével a Polaris a maga korában az Egyesült Államok Kormányának legnagyobb vállalkozása volt. A legmagasabb nemzeti prioritással bírt, és ellenvetés nélkül kapta meg a Kongresszustól a költségvetési támogatásokat is. Sikere számos tényezőnek volt köszönhető:

1. Ésszerű projekt volt, jól definiált célokkal.
2. Mint hatalmas költségvetési támogatással bíró nemzeti prioritás, igényelte, és legfőképp hozzá is jutott az akkor rendelkezésre álló technikákhoz.
3. Egyedülálló módon esett egybe a technológiai fejlődés és a kiemelt nemzetbiztonsági szükséglet (lásd: Szputnyik).
4. Az SPO vezetők menedzsmentbeli-, hadtudományi és politikai jártassággal egyaránt rendelkeztek, és így ki tudták taktikázni az ellenzőiket.
5. Az SPO személyi állománya a hivatali ügymenetekben jártas, magabiztos, agresszív, vállalkozó szellemű, saját műszaki területén tájékozott, és a program iránt teljes mértékben elkötelezett volt.
6. Hatékony szervezési megoldásokkal bírt, mely a decentralizáció és a választási lehetőségek versenyztetése útján értelemes, de erős versenyhelyzetet teremtett. Minden egységnek volt egy tényleges, vagy potenciális riválisa, senkinek sem volt monopóliuma semmiiben. Mindenki arra volt ösztönözve, hogy saját tányérjára koncentráljon, de a többi fickót is szemmel tartsa. Ez a munkamegosztást menedzselhetővé tette és mindenkit derekas munkára készítetett.
7. Kimagaslóan jó koordinációval bírt a teljesítmény-elvárások, az egységek és összetevők tökéletes kapcsolódási pontjai, valamint a tartalék és vész-megoldások között, és azáltal, hogy nem késleltették a projektet fejlettebb műszaki megoldásokra várva. Az SPO a tökéletesítést későbbi továbbfejlesztési fázisokra bízta.
8. Végezetül: A Polaris-nak volt egy trükkje, a PERT. Ahogy Sapolsky fanyalogva megjegyezte, a PERT nem volt olyan hatékony, mint ahogy azt reklámozták, inkább olyan volt, mint az esőtánc. De mint olyan, a célnak megfelelt.

A sors fintora, hogy az FBM program saját sikerének áldozata lett. Ezt tanúsítja a Poseidon állami támogatásának hiánya az 1970-es, és a Trident körüli botrány az 1980-as években. Sapolsky majdhogynem megjósolta ezeket, sőt a hadügyminisztériumbeli lényeges változásokat is leírta, ami a menedzsment dicsfény esetén hanyatlását kiválthatja. Sapolsky a következő prófétikus okokat jelölte meg:

- a Hadügyminisztérium feladatának eltolódása a hadműveletekről a beszerzésekre
- versenyben tartottak helyett kizárólagos beszállítókkal történő szerződés-kötés
- projekt státuszról program státuszba történő átmenet

- a válaszcspás helyett az első csapásmérés előtérbe kerülése

STÍLUS:

Sapolsky gördülékeny stílusban ír, prózája könnyen olvasható, ami nem minden esetben jellemző egy akadémikusra. Abban az időben Sapolsky a politikatudomány területén volt docens az M.I.T.-n, egyikén annak a sok intézményeknek, melyre az SPO támaszkodott. A szerző tárgyilagos és hiteles, annak ellenére, hogy a Haditengerésztől kapta a támogatást. Minden lényegi állítása és előrejelzése kiállta az idők próbáját.

KRITIKA:

Sapolsky, szavai hitelével, már a legelső oldalakon leplezetlenül szembeállítja az érdekek potenciálisan egyre halványuló ellentétét a szakmai kompromisszumokkal. Visszautasította az SPO ajánlatát, hogy a projekt történetírója legyen, de elfogadta a Haditengerészet felkérését a módszerek dokumentálására, azzal a kitételrel, hogy könyvét legfeljebb biztonsági szempontokból lektorálhatják.

...

Sokat tanulhatunk a hivatalnoki kiválóság e lebilincselő leírásából.

Harvey Sapolsky, professzor

A közérdek és organizáció tanára, Politikatudományi Tanszék; Igazgató, M.I.T. Védelmi és Fegyvernem Irányítási Tanulmányok Program, Cambridge, Massachusetts

Eredeti szöveg: The Polaris System Development, Management Book Review #1, Book Summaries and Reviews, CADMUS Home Page

Forrás: <http://www.cadmus.ca/bookreviewpolaris.htm>

Fordította: Dr. Vattai Zoltán András, 2006. január

A SZPUTNYIK KRÍZIS

A “Szputnyik Krízis” a Hidegháború egyik fordulópontja volt, ami 1957. október 4-ével kezdődött, mikor is a Szovjetunió Föld körüli pályájára indította a Szputnyik-1 műholdat. Az Egyesült Államok azt hitte magáról, hogy ő az űr-technológia éllovasa és így ő az éllovasa a hadászati rakéta-fejlesztéseknek is. A Szputnyik meglepetésszerű fellövése és az Egyesült Államok első két kudarcba fulladt rakétaindítási kísérlete bebizonyította, hogy ez nem így van. Ezt követően megkezdődött a világűr meghódításáért folyó verseny, mely az Apollo Projekthez és a Szputnyik Krízist lényegében lezáró, 1969-es Holdra-szálláshoz vezetett.

A Szputnyik Krízis a kisebb programoktól a nagyobbakig kezdeményezések egész láncolatára sarkallta az Egyesült Államokat, melyek közül sokat a Hadügyminisztérium szorgalmazott.

- Az UIUC Astronomy Department és a Digital Computer Laboratories együttműködésével két napon belül kiszámították a Szputnyik pálya-paramétereit.
- Mint már említést nyert, megkezdődött a világűr meghódításáért folytatott verseny, melynek 1958-ban a NASA létrehozása, és a Mercury Projekt is a részét képezte.
- Mérnökök új generációjának felnevelését célzó oktatási programokat indítottak el. Ezen programok egyik legfigyelemreméltóbb és legemlékezetesebb eredménye az „Új Matematika” koncepciójának megjelenése volt.
- Drámaian megnőtt a tudományos kutatások támogatása. 1959-ben a Kongresszus 134 millió dollárra emelte a Nemzeti Tudományos Alap (NSF) költségvetési támogatását, csaknem 100 millió dollárral többre, mint az azt megelőző évben. 1968-ra az NSF költségvetése megközelített az 500 millió dollárt.
- A Polaris hadászati rakéta program.
- A projektmenedzsment, mint tudományterület, és mint kutatási cél-terület megjelenése, mely a projektmenedzsment modern koncepciójához és standardizált projektmodellekhez vezetett, olyanokhoz, mint a Hadügyminisztérium Program Értékelő és Áttekintő Technikája (PERT), amit a Polaris program számára találtak ki.
- Az 1960-ban a rakéta-hátrány felszámolásának ígéretével kampányoló Kenedy elnök döntése 1000 darab Minuteman rakéta hadrendbe állításáról, ami messze több interkontinentális ballisztikus rakétát (ICBM) jelentett, mint amennyivel a Szovjetek rendelkeztek abban az időben.
- A Pentagon-beli Defence Advanced Research Projects Agency (Kiemelt Védelmi Projektek Ügyosztálya) 1969-ben ARPANET elnevezéssel útjára indított egy számítógépes hálózat létrehozását célzó projektet, ami – később – az Internet-hez vezetett.

Forrás: Wikipedia – the free encyclopedia
http://en.wikipedia.org/wiki/Sputnik_crisis

Fordította: Dr. Vattai Zoltán András, 2006. január

OLVASÓI LEVELEK az ENR magazin 2003.06.23-i példányához ...

» A CPM ütemezés állapotáról

Az önök „A kritikusok nem látnak logikát napjaink sok CPM ütemtervében” c. vezércikke¹ lehangoló képet fest a CPM időütemtervek jelen állapotairól (ENR 5/26 p.30). Már 46 éve, hogy Morgan Walker és én elsőként kidolgoztuk a CPM-et a du Pont számára, és a projekt szakemberek még mindig beleesnek néhány olyan ütemezési csapdába, amelyre már a CPM kezdeti időszakában felhívtuk a figyelmet. Az olyan különlegességek, mint a „késleltetési- és előbbre hozási idők”, „többféle naptár” és „egyedi naptári korlátozások”, valóban egyfajta rugalmasságot visznek az ütemtervbe. A gyakorlatban, alkalmazásuk sokszor vezet összefüggéstelen ütemtervhez és a projekt állapotának félrevezető tükörképéhez.

A CPM korai időszakában a számítástechnikai kapacitások korlátozottak voltak. Az összeegyeztethetetlen ütemezési adatok kiküszöbölését teljes egészében a tervezőre kellett hagyni. A gyakorlatban ez a „rugalmas” jellemzők tudatos korlátozását jelentette. Ma, az az asztali számítógép, amelyet e levél megírásához használok, messze nagyobb kapacitással bír, mint az UNIVAC, amit első CPM számításainkhoz használtunk. Így nincs ok arra, hogy a számítógépet ne lehessen úgy programozni, hogy megmondja, ha bemenő ütemezési adataim összeegyeztethetetlenek, és hogy miért.

Az önök cikkéből úgy sejlik, hogy a Primavera szoftveréből hiányzik egy fontos „zavarszűrő” összetevő. Mivel olybá tűnik, hogy a szoftver gyakorlatilag egyfajta monopólium napjainkban, a kritizálóknak talán a Primavera bemenő adat-állományainak ellenőrzésére szolgáló önálló „debugging” programba történő investíciót kellene megvizsgálniuk. Egy ilyen program léte talán rábírja a Primaverát sajátja kifejlesztésére. Valamit tenni kell napjaink projekt ütemterveinek általános szakmai színvonala emeléséhez.

JAMES E. KELLEY JR.
Elkins Park, Pa «

Eredeti szöveg: The State of CPM Schedules
opinions, LETTERS – (6/23/2003 Issue)
ENR McGraw Hill Construction

Forrás: <http://www.enr.construction.com/opinions>

Fordította: Dr. Vattai Zoltán András, 2006. január

¹ Utalt cikk: Richard Korman – Stephen H. Daniels, *Critics Can't Find the Logic in Many of Today's CPM Schedules*, ENR 26-May-2003.

... Négy, a projektek hálós idő-diagramjának előállításához matematikai módszereket alkalmazó Kritikus Út Módszerében (CPM) nagy jártassággal rendelkező időtervező szakember egy Philadelphia melletti étteremben ült össze. Találkoztuk célja egy megbeszélés volt a Project Management Institute egy Newtown Square-i új egységét illetően. Az általuk útjára indított Időtervezési Kollégium szándékuk szerint elősegítené ...

/ Forrás u.o. - a fordító /

MAGYAR – ANGOL SZÓSZERET

algoritmus	algorithm
allokáció (mint elhelyezés, - időben is)	allocation
áramlat (mint elemi áramlat a folyamatban)	stream
arányos	proportional
átad, átadás (mint záró aktus)	hand-over
átlag, átlagos, középérték	average, mean value
átlapolt (időben is)	overlapped
átló	diagonal
átvivő, átadó, átjárható, továbbító (mint jelző)	transitive
becslés (mint előzetes számítás)	estimate
becsült (mint előzetesen számított)	estimated
befejez (készre hoz, elkészít)	complete
befejez, befejezés, vég (-e vminek)	finish, end
befejezés (mint elkészítés, elkészülés)	completion
befejezett (kész)	finished
cél-függvény	target function
cella, mező (táblázatban)	cell, field
címke	label
címkézés	labelling
csomópont (gráfon)	node, wedge
csomóponti tartalékidő (PERT)	slack
csoport (mint halmaz)	group
determinisztikus	deterministic
egység (mint mértékegység)	unit
él (mint csomópont-pár a gráfon)	edge, arch
elemzés	analysis
eloszlás (mint valószínűség-számítási fogalom)	distribution
előrefelé	forward
előrehaladás (mint fejlődés)	progression
eltérés (a tervezettől)	variency
eltérés (mint valószínűség-számítási fogalom)	deviance
erőforrás	resource
erőforrás-vezérelt (pl. tevékenység-időtartam)	resource-driven
érték	value
esemény	event
fa (mint gráf-struktúra)	tree
feladat (matematikai)	problem
feladat (mint kirótt-, kiszignált teendő)	assignment
feladat (mint végrehajtandó munka)	task, job
felfüggeszt (időben is)	hang-up
feltétel (mint megszorítás, avagy szükségesség)	condition
feltételes	conditional
feltételes tartalékidő (CPM,MPM)	conditional float
folyam	flow
folyamat (időtervben, mint tevékenység)	process
folyamat (mint eljárás)	procedure
folyamatos (mint folytatólagos)	continuous
folyamatos (mint megszakítás nélküli)	with no break
folyamatos vonal	solid line
folytat (továbbvisz)	go-on, continue
fordított (~irányú)	reversed
forrás (irányított gráfon)	source
független tartalékidő (CPM,MPM)	independent float
gráf	graph

grafika, rajz	graphics
haladás, elhaladás, áthaladás, menés	pass
halmozott valószínűség	cummulated probability
halmozott/görgetett összeg	cummulated/rolled sum
hálózat	network
határ (mint határérték)	limit
határidő	deadline
hossz	length
hurok (gráfon)	loop, cycle
idő (mint időtartam)	time
idő-potenciál	time-potential
időszak	(time-) period
időtartam	duration, time-span, period
idő-tengely (mint idő-skála)	time-scale
időterv	schedule
irányított él, nyíl	directed edge, arrow
irányított gráf ("DiGráf")	directed graph ("DiGraph")
jel, előjel	sign
jelzett, előjeles	signed
kapacitás (mint limit)	capacity
kapcsolat (hálótechnikai)	relation
kényszer-követés (idő-modellben)	forced succession
késedelem	delay
késleltetés (mint halasztás)	delay
késleltetési (követési) idő-paraméter (PDM)	lag-time
késői	late
kezdés	start, begin
kezdet (mint eredet, kiindulás)	origin
kijelölés (hozzárendelés)	assignment
kijelölt, hozzárendelt (pl. erőforrás)	assigned, allocated
korai	early
költség	cost
követés (időben)	succession
követési idő	succession-time, follow-up time
követő (mint sorrendiség)	successor, succeeding
Kritikus Út Módszere (CPM)	Critical Path Method (CPM)
kutatás, kutatási (tudományos értelemben)	research
kutatás-fejlesztés (K+F)	Research and Development (R&D)
lánc, láncolat (mint él-láncolat a gráfon)	chain / string (- of edges)
látszat-tevékenység (CPM)	dummy activity
leállítás, leállítás	stop, break
leghosszabb	longest
legrövidebb	shortest
lépés (előrelépés, továbblépés)	step
lineáris programozás (LP)	linear programming (LP)
mátrix	matrix
Megelőzés-Ábrázolási Módszer (PDM)	Precedence Diagramming Method (PDM)
megelőző (mint sorrendiség)	predecessor, preceeding
megjegyzés (általában)	remark
megjegyzés (mint feljegyzés, odafirkantás)	jot
megkezd, elindít (folyamatot)	start, launch
megszakítás, megszakadás, törés (időben)	break
megszorítás (kitétel)	restriction
megvalósítási idő	execution time
menedzsment tudomány (MS)	Management Science (MS)
mennyiség (mint mérték)	quantity
mennyiség (mint tömeg, térfogat)	volume

mérföldkő (mint rész-határidő)	mile-stone
METRA Potenciálok Módszere (MPM)	METRA Potentials' Method (MPM)
mind, összes	all
modell	model
módszer, metódus	method
munka, munka-mennyiség	work
munkanap	work-day
munkaszüneti nap	non-working day
műszak	shift
nap	day
naptár, naptári	calendar
nem naptári (pl. mint a "folyamatos" időtengely)	non-calendar
norma, normatíva	standard
nyelő (irányított gráfon)	sink
nyíl (mint iránymutató)	arrow
nyíl-hegy	arrow-head
nyílirányban	by-arrow
nyíllal ellátétesen	counter-arrow
nyíl-vég	arrow-tail
operáció kutatás (OR)	Operations' Research (OR)
oszlop (táblázatban)	column
osztás, skála	scale
összeg, összegez	sum
összeg, végösszeg (pl. számlán)	total
összeköt, kapcsolatot létesít	connect
pajzs (itt kicsi táblázat)	shield
pár (kettő db)	pair
paraméter	parameter
párhuzamos (időben is)	parallel
potenciál	potential
Program Értékelő és Áttekintő Technika (PERT)	Program Evaluation and Review Technique (PERT)
rész-összeg (pl. számlán)	sub-total
rögzített, fix (pl. időtartam)	fix
rövid	short
siettetési (előrehozási) idő-paraméter (PDM)	lead-time
sor (táblázatban)	row
soros (mint egymást követő)	consecutive
súly (mint paraméter)	weight
súlyozott gráf	weighted graph
szabad tartalékidő (CPM,MPM)	free float
szaggatott vonal	broken line
számítás, számolás	calculation
számított	calculated
szimmetrikus	symmetric
szomszédsági-/struktúra- mátrix	adjacency-/structure- matrix
szoros követés (időben)	close succession
sztochasztikus	stochastic
szünet, leállás	beark
tábla, táblázat	table
tartalékidő (CPM,MPM)	float
tartalékidő (PERT)	slack
távolság	distance
technika	technique
teljes átfutási/kivitelezési/megvalósítási idő	total execution time
teljes tartalékidő (CPM,MPM)	total float
teljesítmény (mint munka-teljesítmény)	performance
tényleges (mint megvalósult)	actual

tervezett (mint előirányzott)	planned
tevékenység (mint munkafolyamat)	activity
tevékenység-csomópontú (~ hálós időmodell)	Activity On Node (AON)
tevékenység-élű (~ hálós időmodell)	Activity On Arrow (AOA)
tevékenység-idő, tevékenység-időtartam	duration
újrakezd, újraindít	re-start
út (gráfon)	path
út-hossz (gráfon)	length of path, distance
ütemezett (mint tervezett)	scheduled
ütemterv	schedule
valószínű (mint valószínűsíthető)	likely
valószínűség	probability
valószínűségi (pl. ~ változó)	probabilistic
várt (elvárt)	expected
vég (mint cél, befejezés)	termin
végez, végrehajt (folyamatában)	perform
végrehajtás (megvalósítás)	execution
vektor	vector
visszafelé	backward
zárás, lezárás (ügyé, aktusé)	closure