

Méthodes multicritères d'aide à la décision : méthodes de surclassement

S. Ben Mena¹

RESUME

Cette note présente, de façon illustrée, les principes des méthodes multicritères de surclassement.

SUMMARY

This note presents in an illustrated way, the principles of the most widely used multicriteria outranking methods.

1. Introduction

Ce document a pour objectif de présenter, de façon synthétique, les méthodes multicritères d'aide à la décision les plus répandues parmi les méthodes dites de surclassement. Il constitue un prolongement à la note présentant les *éléments de la méthodologie multicritère d'aide à la décision* [Ben Mena, 2001]. C'est pourquoi certaines notions, abordées dans le texte qui suit, seront supposées connues et donc non détaillées.

Dans le chapitre qui suit, le paragraphe 2.1 justifie le choix de l'approche, le paragraphe 2.2 expose les bases de l'agrégation partielle. Le paragraphe 2.3 présente, de façon illustrée, le fonctionnement des diverses méthodes, en les classant selon la problématique à laquelle elles se rattachent.

En conclusion, le lecteur trouvera quelques conseils afin de le guider dans le choix de l'une ou l'autre méthode.

2. L'agrégation partielle

2.1. Justification du choix de l'approche

Ce document est essentiellement destiné à des personnes dont le principal intérêt est la gestion environnementale. Or dans ce domaine, de nombreux aspects présentent un caractère qualitatif et incommensurable. Il importe donc d'utiliser des méthodes qui tiennent compte de cette caractéristique. C'est là une première raison du choix de l'agrégation partielle.

¹ Assistant à la Faculté Universitaire des Sciences Agronomiques de Gembloux (Unité de Mathématique)

La seconde raison découle de la première. Les exemples de gestion environnementale traités par les méthodes de surclassement sont plus nombreux. Il semble donc plus intéressant d'exposer le fonctionnement de ces méthodes plutôt que les méthodes d'agrégation locale ou totale.

Enfin, les méthodes les plus complexes faisant partie des deux autres approches nécessitent des logiciels appropriés, souvent coûteux ou dont la reconstruction du code de programmation nécessiterait beaucoup trop de temps. Par conséquent, donner le détail des calculs pour le moindre exemple (construit ou repris d'une publication) nécessiterait une dépense plutôt désagréable.

2.2. Bases

On procède en deux temps :

- comparaisons deux à deux d'actions potentielles ou de classements d'actions ;
- synthèse de ce qu'on a constaté précédemment.

Les méthodes d'agrégation partielle vont donc se différencier par leur façon de réaliser ces deux étapes².

La comparaison au sein d'un couple³ d'actions se fait en utilisant la notion de surclassement. Une action a en surclasse une autre b si :

- a est au moins aussi bonne que b relativement à une majorité de critères,
- sans être trop nettement plus mauvaise relativement aux autres critères.

Ces deux conditions sont appelées conditions de concordance et de non discordance des données (du tableau des performances) **avec la proposition « a surclasse b »**.

Pour chaque critère, ces deux notions peuvent, chacune, être portées sur un graphe dont l'axe horizontal reprend les différences de performances entre actions selon un critère et l'axe vertical reprend soit la concordance soit la discordance (Figure 1).

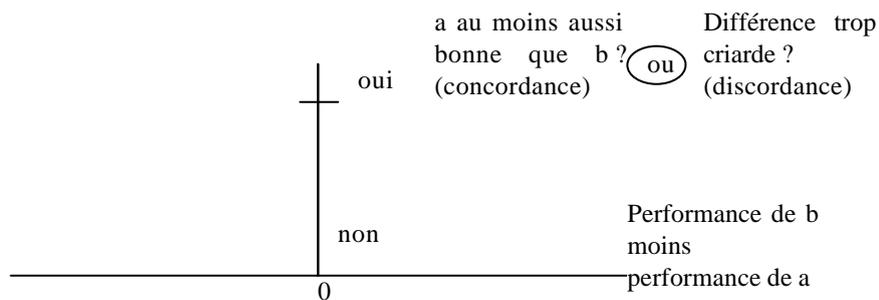


Figure 1. Notions de concordance et de discordance

Pour quantifier concordance et discordance, il suffit alors d'accorder la valeur 1 au «oui» du graphe et 0 au «non». Cela va permettre de calculer des indices de concordance (locaux $c_j(a,b)$ puis global $c(a,b)$) et des indices de discordance ($d_j(a,b)$).

² Dans ce chapitre, ne seront décrites que les méthodes les plus répandues telles qu'Electre et Prométhée voire Qualiflex et Oreste. Le lecteur désirant connaître « toutes » les méthodes de cette approche trouvera 167 références dans la brochure de Siskos, Wäscher et Winkels [1983].

³ Rappelons qu'un couple est une paire orientée. Par conséquent la paire « ab », sans autre précision, désigne l'un ou l'autre couple (a,b) ou (b,a), différents.

Pragmatiquement, voici ce que cela donne pour le calcul de l'indice de concordance dans le cas, le plus complet, d'un pseudo-critère (Figure 2).

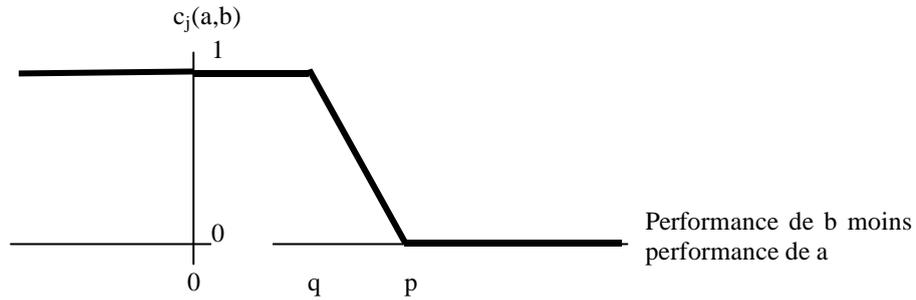


Figure 2. Calcul de l'indice de concordance local

Si la différence de performances est inférieure à q , l'indice de concordance est égal à 1, signifiant que les deux actions sont indifférentes. Si la performance de b est très nettement supérieure à celle de a , c'est-à-dire si la différence des performances est supérieure à p , l'indice de concordance est égal à 0. En effet, b est strictement préférée à a et donc a ne peut, sur le critère considéré, surclasser b . Enfin, si b est faiblement supérieure à a , autrement dit si la différence de performance est comprise entre p et q , b est faiblement préférée à a . Cette situation ne concorde pas tout à fait avec la proposition « a surclasse b » mais, comme on n'en est pas loin, on se contente de prendre un indice de concordance compris entre 0 et 1, calculé par interpolation. Cette façon de faire permet de tenir compte du flou ou de l'imprécision des données. L'interpolation à effectuer respecte la formule suivante :

$$c_j(a,b) = \frac{p-d}{p-q}$$

où d est la différence «performance de b – performance de a » ou encore, pour reprendre les notations de la note *Eléments de la méthodologie multicritère d'aide à la décision*, « $g_j(b) - g_j(a)$ ».

Une fois tous les indices locaux calculés, la moyenne pondérée de ces indices par les poids des critères donne l'indice de concordance global.

Les indices de discordances peuvent prendre diverses formes :

- mesure de la plus grande différence discordante de performances pour chaque couple d'action (cfr paragraphe 2.3.1.1) ;
- utilisation d'un seuil de veto net, valeur (supérieure à p) au delà de laquelle une différence de performances impliquant déjà bPa ($g(b) - g(a) > p$), donne un indice de discordance $d_j(a,b)$ égal à 1, et en deçà de laquelle cet indice vaut 0 ;
- utilisation d'un seuil de veto flou : le mécanisme est le même que celui du veto net si ce n'est que la valeur 0 est attribuée à l'indice de discordance seulement pour des différences de performances impliquant au pire bQa . Si on a bPa et que la différence de performances reste inférieure au seuil de veto, on effectue encore une interpolation (cfr Figure 3).
- absence d'indice de discordance via utilisation de la préférence large ($a > b$ aPb ou aQb) plutôt que du surclassement (cfr Prométhée).

L'indice de discordance intervient aussi différemment selon les méthodes. A titre d'exemple voici le graphe d'un pseudo-critère à seuil de veto flou (Figure 3).

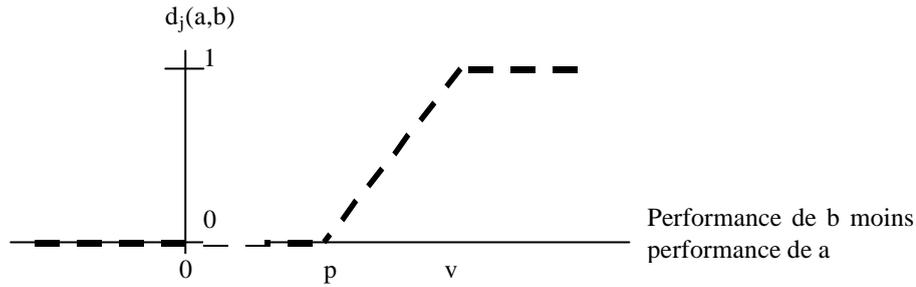


Figure 3 : Utilisation du veto flou dans un pseudo-critère

Lorsque la différence des performances se trouve entre p et v , l'indice de discordance local se calcule comme suit :

$$d_j(a,b) = \frac{v-d}{v-p}$$

où d est encore égal à « $g(b)-g(a)$ ».

Indices de concordance et de discordance peuvent éventuellement mener au calcul d'un indice de crédibilité, mesurant l'intensité avec laquelle une action en surclasse une autre. Voici comment cet indice peut être calculé :

$$\delta(a,b) = c(a,b) \prod_{j \text{ restants}} \frac{1-d_j(a,b)}{1-c(a,b)}$$

On notera que, pour un calcul correct et afin d'éliminer les d_j qui ne pèsent pas valablement, il faut éliminer les d_j inférieurs à l'indice de concordance (d'où la notation « j restants »). L'examen de la formule ci-dessus révèle ainsi que l'indice de concordance est multiplié par des fractions inférieures à l'unité. Ces fractions sont d'autant plus proches de 0 que les d_j sont proches de l'unité (donc que la discordance est grande) et que l'indice de concordance s'éloigne de 1 (donc que la concordance est plus discutable).

Remarques

On n'a pris ici que des critères où on recherche la plus grande performance, c'est-à-dire où on procède à une maximisation. Si on doit effectuer une minimisation, il suffit d'opérer à tous les schémas ci-avant une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées.

Toujours dans un souci de simplicité, on n'a utilisé ici que des seuils fixes. Or il est aisément concevable que ces seuils puissent varier en fonction des performances des actions à comparer, surtout si l'amplitude de variation des performances est grande. Par conséquent, un seuil peut avoir la forme d'une fonction affine « $\hat{\alpha} \cdot g(a) + \hat{\alpha}$ ». Si a est la plus mauvaise des deux actions au sein d'un couple, on parle de seuil direct, sinon, il s'agit d'un seuil inverse. Il est à noter que la façon d'opérer les comparaisons va alors varier. Dans le cas de seuils directs, avec a considérée comme la moins préférée et q comme une fonction affine ($\hat{\alpha} g + \hat{\alpha}$), on a bQa si et seulement si $g(b) \geq g(a) + (\hat{\alpha} g(a) + \hat{\alpha})$. Dans le cas de seuils inverses, bQa si et seulement si $g(b) - (\hat{\alpha} g(b) + \hat{\alpha}) \geq g(a)$. Le lecteur vérifiera sans peine que les conclusions ne sont pas forcément identiques dans les deux cas.

2.3. Méthodes

Autant que faire se peut, on va tenter ici de classer les méthodes selon les trois grandes problématiques : choix, tri, classement.

2.3.1. Choix

Rappelons brièvement qu'en problématique α , le but est de déterminer au sein de A , un sous-ensemble N ou noyau, contenant les actions les plus adéquates.

2.3.1.1. Electre I [Roy 1968]

Du fait des techniques de calcul utilisées dans cette méthode, il faut transformer toutes les performances des actions en notes. Celles-ci varieront sur des échelles dont la longueur évoluera de la même façon que les poids accordés aux critères.

Cela étant fait, on peut calculer l'indice de concordance en considérant chaque critère comme un critère vrai ($p=q=0$). L'indice de discordance sera établi en mesurant, pour chaque critère dans chaque couple d'actions, l'éventuelle différence discordante entre les deux actions, en n'en retenant que la plus grande pour ce couple, et en la divisant par la plus grande longueur d'échelle. Cela garantit un indice de discordance compris entre 0 et 1.

En plaçant chaque action à la fois en ligne et en colonne, on établit les matrices de concordance et de discordance, dont la diagonale ne présente aucune valeur.

Il faut alors définir un seuil de concordance et un seuil de discordance. Ces seuils permettront de réaliser les tests de concordance et de discordance (Figure 4). Le premier indique une valeur minimale à dépasser (souvent supérieure à 0,5), le second une valeur maximale à ne pas dépasser (souvent inférieure à 0,5)

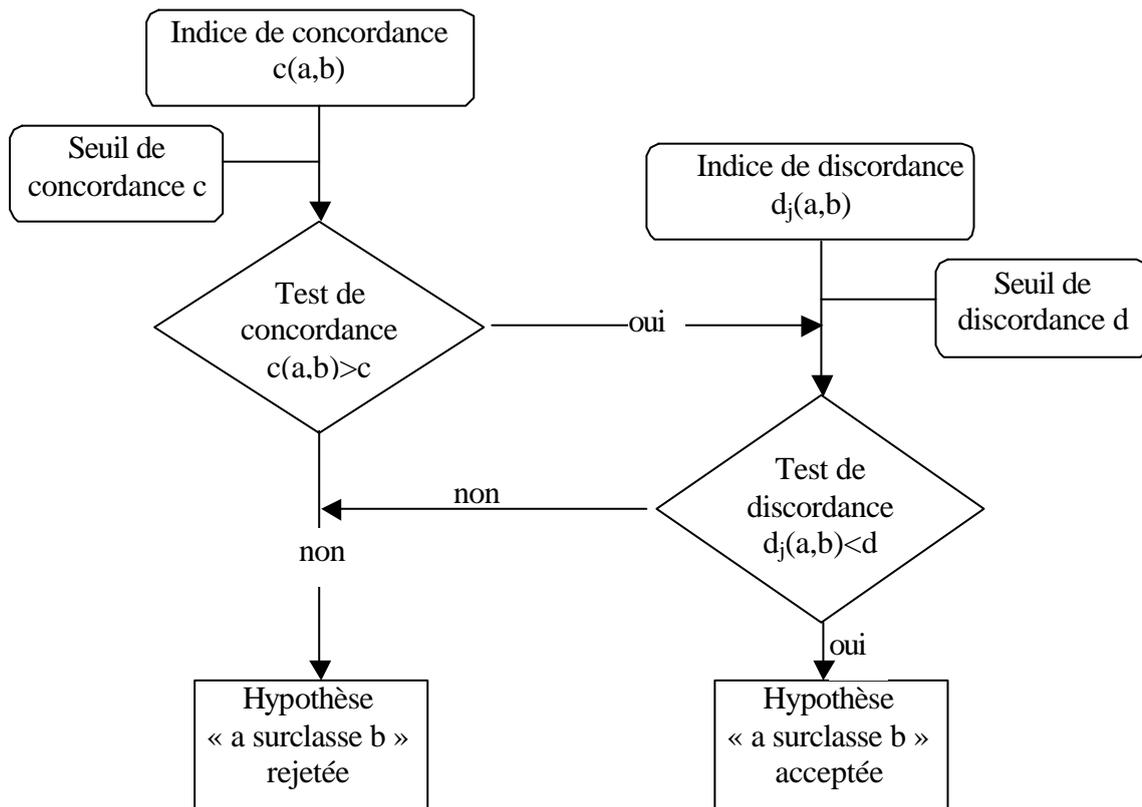


Figure 4 : Algorithme établissant les surclassements [Maystre et al. , 1994]

On peut ainsi établir le graphe de surclassement, dont les actions sont les sommets. Si l'une de ces actions (a_i) surclasse une autre action (a_k), une flèche partant de a_i et aboutissant à a_k , unit les deux sommets. Cela permet de définir le noyau comme l'ensemble des actions

auxquelles n'aboutit aucune flèche... du noyau lui-même. Cette définition laisse entrevoir les problèmes de circuit et d'intransitivité qui peuvent surgir.

Les habitués de programmation linéaire pensent déjà certainement à une analyse de robustesse. Ici, les paramètres à tester seront évidemment les amplitudes d'échelles des critères, les poids et les seuils de concordance et de discordance.

Exemple 2.3.1

Reprenons l'exemple de la note « *Eléments de méthodologie multicritère d'aide à la décision* ». Cet exemple traite de l'aménagement d'un peuplement forestier selon 8 scénarios de gestion évalués sur 5 critères reflétant la fonction de production de la forêt. Le tableau des performances, auquel on a ajouté les seuils d'indifférence, de préférence et de veto, est repris au Tableau 1.

Tableau 1. Tableau des performances

	<i>Critère 1</i>	<i>Critère 2</i>	<i>Critère 3</i>	<i>Critère 4</i>	<i>Critère 5</i>
Action 1	0,72	3,560	1,340	0,62	44,340
Action 2	0,8	3,940	1,430	0,74	36,360
Action 3	0,76	3,630	1,380	0,89	48,750
Action 4	0,78	3,740	1,450	0,72	42,130
Action 5	0,74	3,540	1,370	0,73	36,990
Action 6	0,69	3,740	1,450	0,84	42,430
Action 7	0,7	3,280	1,280	0,83	47,430
Action 8	0,86	3,370	1,150	0,8	80,790
Poids	30	30	20	10	10
Seuil d'indifférence	0,02	0,05	0,02	0,05	2
Seuil de préférence	0,05	0,1	0,05	0,1	8
Seuil de veto	0,15	0,6	0,25	0,25	15
Sens du critère	max.	max.	max.	max.	max.

En ce qui concerne Electre I, les 4 dernières lignes de ce tableau sont inutiles. La raison de leur apparition dans ce paragraphe réside en la volonté d'énoncer les données du problème une fois pour toutes, car cet exemple servira tout au long de ce document.

Avant d'utiliser le tableau, Electre I impose de retraduire les performances en notes variant sur des échelles dont la longueur est proportionnelle aux poids des critères. Si on pose la performance la plus basse égale à 0 et la plus haute égale au poids du critère considéré, on obtient le Tableau 2

Tableau 2. Tableau des performances modifié pour Electre I

	<i>Critère 1</i>	<i>Critère 2</i>	<i>Critère 3</i>	<i>Critère 4</i>	<i>Critère 5</i>
Action 1	5,294	12,727	12,667	0,000	1,796
Action 2	19,412	30,000	18,667	4,444	0,000
Action 3	12,353	15,909	15,333	10,000	2,789
Action 4	15,882	20,909	20,000	3,704	1,299
Action 5	8,824	11,818	14,667	4,074	0,142
Action 6	0,000	20,909	20,000	8,148	1,366
Action 7	1,765	0,000	8,667	7,778	2,492
Action 8	30,000	4,091	0,000	6,667	10,000

Les critères sont considérés comme des vrais critères ($q=p=0$). Pour chacun, on peut alors calculer un indice de concordance $c_j(a,b)$ de l'action a sur l'action b (Tableau 3).

Tableau 3. Indices de concordance Electre I pour le critère 1

<i>Action «b»\Action «a»</i>	<i>Action 1</i>	<i>Action 2</i>	<i>Action 3</i>	<i>Action 4</i>	<i>Action 5</i>	<i>Action 6</i>	<i>Action 7</i>	<i>Action 8</i>
Action 1	1	1	1	1	1	0	0	1
Action 2	0	1	0	0	0	0	0	1
Action 3	0	1	1	1	0	0	0	1
Action 4	0	1	0	1	0	0	0	1
Action 5	0	1	1	1	1	0	0	1
Action 6	1	1	1	1	1	1	1	1
Action 7	1	1	1	1	1	0	1	1
Action 8	0	0	0	0	0	0	0	1

Tous ces indices de concordances permettent de calculer l'indice de concordance global $C(a,b)$ (Tableau 4).

Tableau 4. Indice de concordance global Electre I

<i>Action «b»\Action «a»</i>	<i>Action 1</i>	<i>Action 2</i>	<i>Action 3</i>	<i>Action 4</i>	<i>Action 5</i>	<i>Action 6</i>	<i>Action 7</i>	<i>Action 8</i>
Action 1	0	0,9	1	0,9	0,6	0,6	0,2	0,5
Action 2	0,1	0	0,2	0,3	0,1	0,4	0,2	0,5
Action 3	0	0,8	0	0,8	0	0,5	0	0,4
Action 4	0,1	0,7	0,2	0	0,1	0,7	0,2	0,5
Action 5	0,4	0,9	1	0,9	0	0,7	0,2	0,5
Action 6	0,4	0,6	0,5	0,8	0,3	0	0,4	0,4
Action 7	0,8	0,8	1	0,8	0,8	0,6	0	0,7
Action 8	0,5	0,5	0,6	0,5	0,5	0,6	0,3	0

La méthode impose aussi de calculer un indice de discordance. Pour ce faire, pour chaque couple d'action (a,b), on calcule les différences de performances $g(b)-g(a)$ pour tous les critères. On en retient la plus grande, que l'on divise par la plus grande longueur d'échelle, en l'occurrence, 30. Par exemple, pour le couple (a2, a1), la plus grande différence $g(a1)-g(a2)$ est 1,796 sur le critère 5. Cette valeur, divisée par 30, devient 0,06 (Tableau 5).

Tableau 5. Indice de discordance Electre I

Action «b»\Action «a»	Action 1	Action 2	Action 3	Action 4	Action 5	Action 6	Action 7	Action 8
Action 1	0,000	0,060	0,000	0,017	0,055	0,176	0,424	0,422
Action 2	0,576	0,000	0,470	0,303	0,606	0,647	1,000	0,864
Action 3	0,333	0,185	0,000	0,210	0,198	0,412	0,530	0,511
Action 4	0,353	0,044	0,167	0,000	0,303	0,529	0,697	0,667
Action 5	0,136	0,005	0,000	0,012	0,000	0,294	0,394	0,489
Action 6	0,273	0,123	0,167	0,148	0,303	0,000	0,697	0,667
Action 7	0,259	0,111	0,000	0,136	0,123	0,059	0,000	0,289
Action 8	0,824	0,353	0,588	0,471	0,706	1,000	0,941	0,000

Tous ces indices doivent être comparés à des seuils. Le seuil de concordance sera fixé à 0,7, le seuil de discordance à 0,3. L'algorithme établissant les surclassements (Figure 4) permet de construire le graphe des surclassements. Celui-ci reste relativement simple dans l'exemple traité car il ne présente que peu de sommets. Toutefois, on ne donnera ici que le tableau des surclassements (Tableau 6), affichant la valeur 1 lorsque l'action de la colonne étudiée surclasse l'action de la ligne étudiée. Il suffit alors d'observer les sommes conditionnelles selon les lignes pour déterminer au moins une première partie du noyau : si une action présente une somme nulle, elle n'est surclassée par aucune autre action. Ensuite, au sein des autres actions, il faut vérifier qu'aucune n'est surclassée par une action du noyau précédemment établi.

Cette façon de travailler par tableau plutôt que par graphe permet, via un tableur, de travailler sur des exemples plus imposants. De plus, comme on va le voir, certaines méthodes affectent des valeurs aux arcs du graphe, ce qui en complique encore la lecture.

Tableau 6. Tableau des surclassements Electre I

	Action 1	Action 2	Action 3	Action 4	Action 5	Action 6	Action 7	Action 8	Som. Cond.
Action 1	0	1	1	1	0	0	0	0	3
Action 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 3	0	1	0	1	0	0	0	0	2
Action 4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 5	0	1	1	1	0	0	0	0	3
Action 6	0	0	0	1	0	0	0	0	1
Action 7	1	1	1	1	1	0	0	0	5
Action 8	0	0	0	0	0	0	0	0	0

On voit que les actions 2, 4 et 8 sont non surclassées et constituent donc le noyau recherché. Au sein des autres actions, il n'en est aucune qui ne soit pas surclassée par au moins l'une des trois actions du noyau. Par conséquent, aucune autre ne rentre dans ce dernier. Si les calculs avaient amené un surclassement de l'action 6 par l'action 7 et non par l'action 4, par exemple, l'action 6 serait rentrée dans le noyau car non surclassée par une action de ce dernier.

2.3.1.2. Electre Iv

Cette variante utilise les vraies valeurs des performances, sans les traduire au préalable en notes avec échelles variables. Elle fait toujours appel au critère vrai mais cette fois muni d'un veto net, d'où le « v » dans « Electre Iv ».

Il faut alors choisir un seuil de veto pour chaque critère et préciser s'il s'agit de minimiser ou maximiser ces critères (ce qui était inutile avec des notes).

Pour chaque hypothèse de surclassement, on calcule l'indice de concordance et on arrête le processus si l'on tombe sur une différence de performances qui déclenche le veto. L'indice de concordance est alors posé nul pour cette hypothèse. Il n'est donc plus question de seuil de discordance, l'action de celui-ci étant remplacée par le seuil de veto.

Du fait du mode de calcul différent utilisé ici, par rapport à Electre I, on peut trouver des matrices de concordance différentes.

Pour tester la robustesse vis-à-vis de la discordance, on fait varier l'un après l'autre les seuils de veto, ce qui est évidemment moins pratique que de travailler sur le seuil de discordance.

Exemple 2.3.2

Pour cet exemple, on peut reprendre le tableau des performances initial en laissant toutefois tomber les lignes des seuils d'indifférence et de préférence (ici encore, $p=q=0$). Le tableau des indices de concordance sans effet de veto est évidemment le même que celui d'Electre I. Le Tableau 7 donne les indices de concordance pour chaque couple d'actions, lorsque le seuil de veto est intervenu.

Tableau 7. Indice de concordance Electre Iv

Action «b»\Action «a»	Action 1	Action 2	Action 3	Action 4	Action 5	Action 6	Action 7	Action 8
Action 1	0	0,9	1	0,9	0,6	0,6	0,2	0,5
Action 2	0,1	0	0,2	0,3	0,1	0,4	0,2	0,5
Action 3	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 4	0,1	0,7	0,2	0	0,1	0,7	0,2	0,5
Action 5	0,4	0,9	1	0,9	0	0,7	0,2	0,5
Action 6	0,4	0,6	0,5	0,8	0,3	0	0,4	0,4
Action 7	0,8	0,8	1	0,8	0,8	0,6	0	0,7
Action 8	0	0	0	0	0	0	0	0

Le Tableau 8 présente les surclassements avec un seuil de concordance de 0,7.

Tableau 8. Surclassements Electre Iv

	Action 1	Action 2	Action 3	Action 4	Action 5	Action 6	Action 7	Action 8	Som. Cond.
Action 1	0	1	1	1	0	0	0	0	3
Action 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 5	0	1	1	1	0	0	0	0	3
Action 6	0	0	0	1	0	0	0	0	1
Action 7	1	1	1	1	1	0	0	0	5
Action 8	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Par rapport à Electre I, l'action 3 se joint au noyau.

2.3.1.3. Electre Is [Roy et Skalka 1985]

On emploie toujours un indice de concordance mais cette fois appliqué à un critère à seuil, ce qui permet d'évincer la « brutalité » de la concordance d'Electre Iv. Néanmoins, on recourt encore au veto net.

De par l'utilisation de pseudo-critère, il faut préciser en outre, par rapport à Electre Iv, les seuils de préférence et d'indifférence de chaque critère. La technique de calcul de l'indice de concordance (avec éventuelle interpolation) a été exposée au § 2.2.

Le reste de la méthode est analogue aux deux précédentes : matrice de concordance, tableau de surclassement, conclusion et analyse de robustesse.

Exemple 2.3.3

Pour Electre Is, toutes les lignes du tableau initial des performances sont nécessaires. Cela a pour conséquence de modifier légèrement les indices de concordance par rapport à Electre Iv (Tableau 9).

Tableau 9. Indice de concordance Electre Is

Action «b»\Action «a»	Action 1	Action 2	Action 3	Action 4	Action 5	Action 6	Action 7	Action 8
Action 1	0,000	0,900	0,593	0,900	0,167	0,600	0,118	0,000
Action 2	0,100	0,000	0,200	0,063	0,000	0,168	0,180	0,100
Action 3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Action 4	0,004	0,300	0,177	0,000	0,000	0,100	0,155	0,004
Action 5	0,089	0,800	0,440	0,752	0,000	0,657	0,200	0,089
Action 6	0,100	0,600	0,372	0,300	0,300	0,000	0,050	0,100
Action 7	0,500	0,800	0,820	0,800	0,700	0,500	0,000	0,500
Action 8	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Muni d'un seuil de concordance toujours égal à 0,7, on peut alors remplir le tableau des surclassements (Tableau 10).

Tableau 10. Surclassements Electre Is

	Action 1	Action 2	Action 3	Action 4	Action 5	Action 6	Action 7	Action 8	Som. Cond.
Action 1	0	1	0	1	0	0	0	0	2
Action 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 5	0	1	0	1	0	0	0	0	2
Action 6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 7	0	1	1	1	0	0	0	0	3
Action 8	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Le noyau est encore plus riche que pour Electre Iv, car il contient l'action 6.

Les résultats, on vient de le voir, sont différents pour les différentes méthodes, alors qu'elles sont sensées extraire chacune les meilleures actions. Ces divergences trouvent évidemment leurs causes dans la forme de critère utilisée et dans le type d'intervention de la notion de discordance.

2.3.1.4. Les autres variantes d'Electre I

Il existe évidemment encore d'autres variantes d'Electre I [Rochat 1980 *in* Maystre, Pictet et Simos, 1994 ;Vansnick, 1979 et 1986].

A titre d'information, on citera Tactic, qui ne teste plus l'hypothèse «a surclasse b» mais « a est strictement préférée à b ». Pour ce faire, on somme tous les poids des critères en accord avec cette hypothèse, c1, et tous les poids des critères en accord avec l'hypothèse opposée, c2. c2 est multipliée par un facteur ρ égal au rapport de la somme des poids de tous

les critères de F, au plus petit de tous ces poids, moins 1. Il y a concordance si $c_1 > c_2 \rho$. La condition de non veto est identique à celle d'Electre I.

Remarque

Le noyau des méthodes Electre I ne renferme pas les meilleures actions *sensu stricto* mais des actions les plus difficiles à comparer entre elles et parmi lesquelles se trouve la « meilleure ». Cela pose d'ailleurs le problème de la « seconde meilleure action » : si la meilleure action, pour une raison ou une autre, n'est plus disponible, alors il ne faut en aucun cas choisir celle qui semblerait être la « seconde » dans le noyau ! Il faut reprendre toute la procédure à zéro. [Maystre *et al.*, 1994 ; Schärliig, 1996].

2.3.2. Tri

Dans cette problématique (\hat{a}), on cherche à scinder l'ensemble A en un certain nombre de classes définies à l'avance. C'est justement là que réside la difficulté : définir les frontières entre classes. En méthodologie multicritère, chaque action est qualifiée par plusieurs valeurs correspondant chacune à un critère. On risque donc de tomber sur des problèmes de chevauchement de frontières. En outre, plusieurs actions peuvent définir une même frontière.

2.3.2.1. Trichotomie de Moscarola et Roy [1976]

Comme son nom l'indique, cette procédure va trier les actions en 3 classes (« bon », « douteux », « mauvais »), plusieurs actions pouvant définir une frontière. Ainsi, il faut construire un ensemble B, constitué de toutes les actions-étalons « bonnes » et un ensemble M, comprenant toutes les actions-étalons « mauvaises ».

On étudie ensuite les surclassements qui existent entre les actions à classer et les actions-étalons⁴. Ces surclassements peuvent résulter de diverses procédures : algorithmes de surclassement d'Electre I, Iv ou Is. Cela permet de définir 4 nombres pour chaque action a_i :

- B^+ ou nombre de fois que l'action à classer surclasse une action de B ;
- B^- ou nombre de fois qu'une action de B surclasse l'action à classer ;
- M^+ ou nombre de fois que l'action à classer surclasse une action de M ;
- M^- ou nombre de fois qu'une action de M surclasse l'action à classer.

Ces nombres sont utilisés dans l'organigramme repris à la Figure 5 [Vansnick 1979].

⁴ Pour conserver une certaine cohérence, il est bon de vérifier aussi qu'aucune action-étalon mauvaise ne surclasse une action étalon bonne.

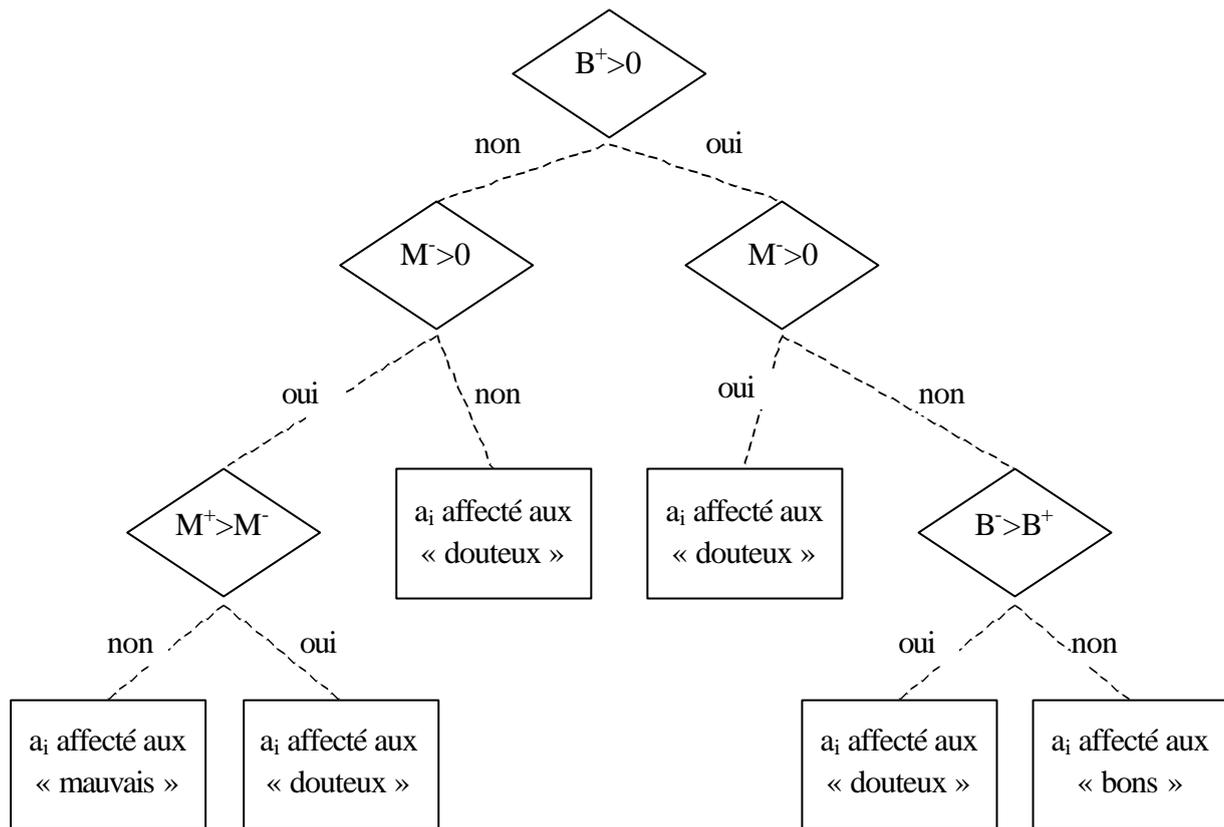


Figure 5 : Organigramme de la trichotomie de Moscarola et Roy

Les actions classées douteuses ne sont pas «entre bonne et mauvaise ». Elles sont placées dans cette catégorie parce que, sur base des données disponibles on ne peut les mettre ailleurs.

On peut également utiliser des surclassements par indice de crédibilité, repris dans la procédure mise au point par Roy [1981]. Il faut alors choisir 4 seuils S_1 , S_2 , S_3 et S_4 , tous assez élevés. S_2 sera un peu plus faible que S_1 et S_4 un peu plus faible que S_3 (Par exemple $S_1=0,9$, $S_2=0,8$, $S_3=0,8$, $S_4=0,7$). Pour chaque action à classer, on inventorie ensuite les indices de crédibilité des quatre familles constituées des surclassements où :

- l'action en question surclasse une action-étalon bonne ;
- l'action en question est surclassée par une action-étalon bonne ;
- l'action en question surclasse une action-étalon mauvaise ;
- l'action en question est surclassée par une action-étalon mauvaise.

Au sein de ces quatre familles, on retient l'indice de crédibilité maximal, soit, respectivement M_1 , M_2 , M_3 , M_4 . On repère toutefois l'action-étalon bonne qui a donné lieu à M_1 et on l'exclut de la recherche de M_2 . De même, on repère l'action-étalon mauvaise qui a donné lieu à M_3 et on l'exclut de la recherche de M_4 . L'action à classer est alors affectée aux bonnes actions si $M_1 \geq S_1$ et $M_2 < S_2$. Elle est affectée aux mauvaises actions si $M_1 < S_1$ et $M_3 \geq S_3$ et $M_4 < S_4$. Dans tous les autres cas, elle est classée douteuse.

Dans la procédure de Moscarola et Roy, l'analyse de robustesse porte sur les seuils de concordance, de discordance ou de veto. Dans la méthode de Roy, elle porte, en outre, sur les seuils S .

Exemple 2.3.4

Les données restent les mêmes par rapport aux exemples précédents mais il faut ajouter au moins deux actions étalons : une action étalon « mauvaise » m et une action étalon « bonne » b. Ces étalons doivent être déterminés avec le décideur car c'est lui qui délimite les catégories auxquelles on va affecter les actions.

Tableau 11. Actions étalons

	<i>Critère 1</i>	<i>Critère 2</i>	<i>Critère 3</i>	<i>Critère 4</i>	<i>Critère 5</i>
Action étalon « mauvaise »	0,75	3,5	1,3	0,73	42
Action étalon « bonne »	0,8	3,7	1,37	0,79	43

Disposant de ces données supplémentaires, on va utiliser ici un surclassement de type Electre Iv, qui ne s'applique donc plus qu'entre actions à affecter et actions étalons. On peut ainsi commencer par calculer des indices de concordance locaux (Tableau 12).

Tableau 12. Indice de concordance trichotomique pour le critère 1

	<i>Action 1</i>	<i>Action 2</i>	<i>Action 3</i>	<i>Action 4</i>	<i>Action 5</i>	<i>Action 6</i>	<i>Action 7</i>	<i>Action 8</i>
$C_1(a_i, b)$	0	1	0	0	0	0	0	1
$C_1(b, a_i)$	1	1	1	1	1	1	1	0
$C_1(a_i, m)$	0	1	1	1	0	0	0	1
$C_1(m, a_i)$	1	0	0	0	1	1	1	0

Les indices de concordance locaux mènent à l'indice de concordance global qu'il faut moduler par le veto (cfr Electre Iv). Ces indices sont repris au Tableau 13.

Tableau 13. Indice de concordance global modulé par le veto

	<i>Action 1</i>	<i>Action 2</i>	<i>Action 3</i>	<i>Action 4</i>	<i>Action 5</i>	<i>Action 6</i>	<i>Action 7</i>	<i>Action 8</i>
$C_1(a_i, b)$	0,1	0,8	0,4	0,5	0,2	0,6	0,2	0,5
$C_1(b, a_i)$	0,9	0,5	0,6	0,5	1	0,4	0,8	0
$C_1(a_i, m)$	0,6	0,9	1	0,9	0,6	0,7	0,2	0,5
$C_1(m, a_i)$	0,4	0,1	0	0,1	0,5	0,3	0,8	0

Il suffit maintenant de se fixer un seuil de concordance (ici, toujours 0,7) pour pouvoir remplir le tableau des surclassements (Tableau 14).

Tableau 14. Surclassements relatifs à la trichotomie

	<i>Action 1</i>	<i>Action 2</i>	<i>Action 3</i>	<i>Action 4</i>	<i>Action 5</i>	<i>Action 6</i>	<i>Action 7</i>	<i>Action 8</i>
(a _i , b)	0	1	0	0	0	0	0	0
(b, a _i)	1	0	0	0	1	0	1	0
(a _i , m)	0	1	1	1	0	1	0	0
(m, a _i)	0	0	0	0	0	0	1	0

Grâce à l'arbre reproduit à la Figure 5, on peut alors affecter chaque action à l'une des trois catégories : bon, mauvais ou douteux. Il est à noter que les valeurs B^+ , B^- , M^+ , M^- ne peuvent prendre comme valeurs que 0 ou 1. Il n'y a, en effet, qu'une action étalon bonne et une action étalon mauvaise. Les résultats sont repris dans le Tableau 15.

Tableau 15. Résultat de la trichotomie

<i>Catégories</i>	<i>N° d'action</i>
Bons	2
Douteux	1, 2, 4, 5, 6, 8
Mauvais	7

2.3.2.2. Electre TRI [Yu, 1992a]

Cette méthode s'attaque aux problèmes à plus de trois classes. Mais dans ce cas, il n'y a plus, entre chaque classe, qu'une action-étalon, du moins pour la procédure actuellement opérationnelle. Yu [1992b] explique en effet comment, en théorie, on pourrait faire pour tenir compte de plus d'une action définissant une même frontière (ce que l'on appelle segmentation multicritère généralisée, par opposition à la segmentation multicritère simple).

La procédure Electre TRI appelle plusieurs exigences dont la plus importante est la monotonie : chaque action-étalon doit être meilleure que l'action-étalon juste en dessous d'elle dans au moins un critère et au moins égale dans les autres critères. Maystre *et al.* [1994] mentionnent en outre l'unicité, l'indépendance, la conformité, l'homogénéité et la stabilité. L'explication de ces exigences sort du cadre de cet exposé.

Les surclassements retenus ici sont pourvus d'un indice de crédibilité et d'un seuil de crédibilité que l'indice doit dépasser pour que le surclassement soit considéré comme effectif. Yu imagine alors une règle d'affectation pessimiste et une optimiste.

Dans la première, on compare chaque action a_i à chaque étalon, en commençant par la plus haut placée. Les indices de crédibilité du surclassement « a_i surclasse l'étalon » vont donc croissant. Dès que cet indice dépasse le seuil de crédibilité, a_i est affectée à la classe dont l'étalon est la frontière basse.

Dans la règle optimiste, on commence par le bas, avec le surclassement «étalon surclasse a_i ». Les indices vont aussi croissant. Dès qu'ils dépassent le seuil de crédibilité, et à condition que le surclassement en sens contraire ait un indice inférieur à ce même seuil, a_i est affectée à la classe dont l'étalon est la frontière haute.

La règle pessimiste tend donc à pousser les actions vers le bas du tableau, tandis que la règle optimiste les pousse vers le haut. Dans un cas réel, on choisit alors l'une ou l'autre règle selon qu'on doit être respectivement exigeant ou laxiste. Cependant, un détail fâcheux est la variabilité de l'ordre dans lequel les actions peuvent apparaître dans les deux procédures. Cela est souvent dû au manque de comparabilité des actions vis-à-vis des étalons.

En ce qui concerne l'analyse de robustesse, c'est le seuil de crédibilité qui joue le rôle de « bouton de réglage » dans Electre TRI.

Exemple 2.3.5

Comme elles ne présentent qu'une seule action étalon par catégorie, on reprendra ici les données de la trichotomie. Alors que cette dernière utilisait des surclassements de type Electre Iv, Electre TRI va employer des pseudo-critères à veto flou et donc calculer des indices de crédibilité.

A titre d'information, voici ce que donne l'indice de discordance pour le critère 1 (Tableau 16).

Tableau 16. Indice de discordance Electre TRI pour le critère 1

	Action 1	Action 2	Action 3	Action 4	Action 5	Action 6	Action 7	Action 8
$d_1(a_i, b)$	0,3	0,0	0,0	0,0	0,1	0,6	0,5	0,0
$d_1(b, a_i)$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1
$d_1(a_i, m)$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0
$d_1(m, a_i)$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,6

Indice de concordance global et indices de discordances locaux permettent alors de calculer l'indice de crédibilité de chaque surclassement (Tableau 17).

Tableau 17: Indices de crédibilité Electre TRI

	Action 1	Action 2	Action 3	Action 4	Action 5	Action 6	Action 7	Action 8
$c_1(a_i, b)$	0,000	0,500	0,163	0,200	0,000	0,125	0,002	0,083
$c_1(b, a_i)$	0,767	0,018	0,320	0,240	0,387	0,300	0,800	1,000
$c_1(a_i, m)$	0,199	0,800	0,679	0,600	0,200	0,600	0,018	0,084
$c_1(m, a_i)$	0,200	0,016	0,000	0,000	0,003	0,122	0,600	0,400

Pour pouvoir effectuer l'affectation, il faut se munir de trois éléments supplémentaires :

- un seuil de crédibilité (toujours 0, 7),
- une action étalon fictive b^* surclassant toutes les autres (autrement dit, $c_j(b^*, a_i) = 1 \forall i, j$ et $c_j(a_i, b^*) = 0 \forall i, j$),
- une action étalon fictive m^* surclassée par toutes les autres (autrement dit, $c_j(m^*, a_i) = 0 \forall i, j$ et $c_j(a_i, m^*) = 1 \forall i, j$).

Les deux règles d'affectation donnent alors les résultats du Tableau 18 :

Tableau 18. Affectations d'Electre TRI

Catégories	Affectation Optimiste	Affectation pessimiste
1	2, 3, 4, 5, 6	
2	1, 7, 8	2
3		1, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Bien que les deux résultats soient évidemment différents, on note quand même une certaine cohérence. L'action 2 est toujours la mieux classée et les actions 1, 7, 8 sont toujours reléguées dans la catégorie suivante. On remarquera que ces résultats recoupent aussi ceux de la trichotomie.

2.3.3. Rangement

La problématique à chercher à regrouper les actions en classes d'équivalence, c'est -à-dire en groupes de presque ex aequo, mais, contrairement à la problématique \hat{a} , les classes ne sont plus préalablement définies. L'idée est donc de classer les actions de la meilleure à la pire pour sélectionner ensuite la ou les action(s) qui semble(nt) la ou les plus adéquates.

2.3.3.1. Electre II [Roy et Bertier, 1971]

Electre II utilise des surclassements basés sur des critères vrais munis de veto net. Ces surclassements permettront d'établir un préordre final partiel, voire un préordre médian complet.

Pour commencer, on fixe trois seuils de concordance (généraux) et deux seuils de veto (pour chaque critère). Le seuil de concordance le plus exigeant, combiné avec le seuil de veto le plus laxiste, tout comme le seuil de concordance médian, combiné avec le seuil de veto le plus exigeant, déterminent des surclassements forts. Le seuil de concordance le plus laxiste, combiné avec le seuil de veto le plus laxiste détermine des surclassements faibles. Pour éviter l'apparition de circuits dans les graphes de surclassement ainsi obtenus, une précaution supplémentaire est prise : la somme des poids des critères en accord strict avec l'une des hypothèses de surclassement doit être supérieure ou égale à la somme des poids des critères en désaccord strict avec cette même hypothèse. Si cette condition n'est pas remplie, l'indice de concordance est annulé, comme si un veto était intervenu.

Le graphe reprenant *tous* les surclassements forts permet d'obtenir deux préordres totaux différents :

- le classement direct, à chaque étape duquel on repère les actions auxquelles n'aboutit aucune flèche, ces actions étant retirées du graphe à l'étape suivante ;
- le classement inverse, à chaque étape duquel on repère les actions desquelles ne part aucune flèche, ces actions étant retirées du graphe à l'étape suivante.

Le graphe des surclassements faibles n'est utilisé que pour départager les éventuels ex aequo, si possible !

Il est à noter que ce qui vient d'être exprimé en six lignes se traduit par un algorithme mathématique nettement moins digeste et non reproduit ici. Le lecteur intéressé consultera avec fruit Maystre *et al.*[1994].

Dans les deux classements qui viennent d'être établis, il est normal de voir apparaître des actions « baladeuses » : le classement direct les pousse en fin de classement et le classement inverse les pousse en début de classement. C'est tout simplement dû à leur incomparabilité vis-à-vis des autres actions.

On peut alors construire par tâtonnements, un classement final, respectant les incomparabilités. Ce classement est l'intersection (au sens mathématique du terme) des deux préordres totaux :

- une action du classement final ne peut être placée devant une autre que si elle est située devant celle-ci dans un des deux classements et devant elle ou ex aequo avec elle dans l'autre ;
- deux actions ne peuvent être ex aequo dans le classement final que si elles appartiennent à la même classe dans les deux classements ;
- deux actions sont incomparables si l'une est devant l'autre dans l'un des deux classements et l'autre devant la première dans l'autre classement (Roy et Bouyssou [1993]).

Si on désire un classement médian, sans incomparabilité, on s'inspire du classement final : on départage les actions incomparables d'un même rang en fonction de la différence de leurs positions dans les deux premiers classements, en privilégiant les actions plutôt stables.

Une fois de plus, d'après les conventions utilisées pour établir le classement final, le résultat peut différer. Une analyse de robustesse, faisant varier les seuils de concordance et de discordance ainsi que les poids des critères, devrait indiquer la solution la plus sévante.

Exemple 2.3.6

Le calcul des indices de concordance est le même que celui d'Electre Iv. Toutefois, ce calcul doit être effectué deux fois (seuils de veto laxistes (Tableau 19) et seuils de veto forts (Tableau 20)).

Tableau 19. Indices de concordance associés aux seuils de veto laxistes

Action «b»\Action «a»	Action 1	Action 2	Action 3	Action 4	Action 5	Action 6	Action 7	Action 8
Action 1	0	0,9	1	0,9	0,6	0,6	0,2	0,5
Action 2	0,1	0	0,2	0,3	0,1	0,4	0,2	0,5
Action 3	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 4	0,1	0,7	0,2	0	0,1	0,7	0,2	0,5
Action 5	0,4	0,9	1	0,9	0	0,7	0,2	0,5
Action 6	0,4	0,6	0,5	0,8	0,3	0	0,4	0,4
Action 7	0,8	0,8	1	0,8	0,8	0,6	0	0,7
Action 8	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 20: Indices de concordance associés aux seuils de veto forts

Action «b»\Action «a»	Action 1	Action 2	Action 3	Action 4	Action 5	Action 6	Action 7	Action 8
Action 1	0	0,9	1	0,9	0,6	0,6	0,2	0,5
Action 2	0,1	0	0,2	0,3	0,1	0,4	0,2	0,5
Action 3	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 4	0,1	0,7	0,2	0	0,1	0,7	0,2	0,5
Action 5	0,4	0,9	1	0,9	0	0,7	0,2	0,5
Action 6	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 7	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 8	0	0	0	0	0	0	0	0

Avec des vetos forts, les indices de concordances sont évidemment plus souvent nuls.

La correction à y apporter maintenant consisterait à annuler les indices de concordance pour les couples (a,b) desquels la somme des poids des critères en accord strict avec la proposition aSb n'est pas supérieure ou égale à la somme des poids des critères en désaccord strict avec cette même proposition. L'autre façon de faire, celle qui est utilisée ici, passe directement à l'élaboration des trois tableaux de surclassements (2 forts et 1 faible) en y annulant la valeur affectée aux couples ne répondant pas à la condition de comparaison des poids énoncée ci-dessus. Avec des seuils de concordance de, respectivement, 0,75, 0,7 et 0,65, on obtient les tableaux 21, 22 et 23.

Tableau 21. Surclassements (très) forts Electre II

	Action 1	Action 2	Action 3	Action 4	Action 5	Action 6	Action 7	Action 8
Action 1	0	1	1	1	0	0	0	0
Action 2	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 3	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 4	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 5	0	1	1	1	0	0	0	0
Action 6	0	0	0	1	0	0	0	0
Action 7	1	1	1	1	1	0	0	0
Action 8	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 22. Surclassements forts Electre II

	Action 1	Action 2	Action 3	Action 4	Action 5	Action 6	Action 7	Action 8
Action 1	0	1	1	1	0	0	0	0
Action 2	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 3	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 4	0	1	0	0	0	0	0	0
Action 5	0	1	1	1	0	1	0	0
Action 6	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 7	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 8	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 23. Surclassements faibles Electre II

	Action 1	Action 2	Action 3	Action 4	Action 5	Action 6	Action 7	Action 8
Action 1	0	1	1	1	0	0	0	0
Action 2	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 3	0	0	0	0	0	0	0	0
Action 4	0	1	0	0	0	0	0	0
Action 5	0	1	1	1	0	1	0	0
Action 6	0	0	0	1	0	0	0	0
Action 7	1	1	1	1	1	0	0	1
Action 8	0	0	0	0	0	0	0	0

Le classement direct s'obtient comme suit. En réunissant les deux tableaux des surclassements forts et en calculant les sommes marginales selon les colonnes du tableau ainsi obtenu, on détermine la première classe en retenant les actions de somme marginale nulle. On vérifie avec les surclassements faibles que ces actions restent bien ex æquo en étudiant le tableau des surclassements faibles. Ensuite, on supprime les colonnes correspondant aux actions déjà classées et on observe alors les nouvelles sommes marginales. Et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus aucune action à classer !

Le classement inverse s'établit de la même façon mais en observant cette fois les sommes marginales selon les lignes et en retirant, à chaque étape, les lignes des actions déjà classées.

Tableau 24. Classements Electre II

	<i>Classement direct</i>	<i>Classement inverse</i>	<i>Préordre final</i>	<i>N° des actions incomparables</i>	<i>Préordre médian</i>
Action 1	3	3	4	8	5
Action 2	1	1	1		1
Action 3	1	2	2	4	2
Action 4	2	1	2	3;8	2
Action 5	4	3	5	8	6
Action 6	3	2	3	8	3
Action 7	5	5	6		7
Action 8	1	4	3	1;4;5;6	4

Le Tableau 24 donne, avec les incomparabilités, le préordre final. Celui-ci a été construit par simple observation des rangs dans les classements direct et inverse, et application des règles énoncées au sein de ce paragraphe. Si le lecteur se donne la peine de vérifier les rangs de ce préordre, il constatera qu'un calcul manuel n'est ici permis que grâce à la taille réduite du problème. Il existe bien entendu des logiciels qui permettent de réaliser les calculs en deux temps, trois mouvements.

Pour le classement médian, deux paires d'actions méritent un commentaire : a3-a4 et a6-a8. En effet, ces actions ont le même rang mais sont incomparables. Pour départager a3 et a4 dans le classement médian, on observe les classements direct et inverses. a3 est première au classement direct et seconde au classement inverse. C'est exactement l'inverse pour a4. Autrement dit les deux actions sont aussi baladeuses l'une que l'autre dans les deux classements (leur différence de rang est de 1). Il n'y a donc pas moyen de les départager. Maintenant, a6 est en troisième position dans le classement direct et en deuxième position dans le classement inverse alors que a8 est en première position dans le classement direct et en quatrième position dans le classement inverse. a6 est donc moins baladeuse (différence de rangs = 1) que a8 (différence de rang = 3); elle est donc mieux classée dans le classement médian. Encore une fois, l'utilisation de logiciel rend nettement moins fastidieux l'établissement du classement médian, surtout pour des problèmes plus volumineux.

2.3.3.2. Electre III [Roy, 1977]

Cette méthode est celle qui recourt le plus à la notion de flou. En effet, elle utilise des surclassements pourvus d'un indice de crédibilité, calculé sur base d'un indice de concordance flou et d'un veto flou. Cela entraîne une certaine complexité, notamment au niveau du graphe des surclassements. Entre chaque paire de sommets se trouve une paire d'arcs de sens opposés, affectés chacun d'un degré de crédibilité. Pour en retirer le classement recherché, il faut donc procéder à ce que l'on appelle des distillations : une distillation descendante et une ascendante. En fait on devrait dire « série de distillations descendantes » et « série de distillations ascendantes ».

La distillation descendante consiste en ceci. On extrait de A un sous-ensemble des meilleures actions potentielles en appliquant une règle de sélection relativement sévère. Dans ce sous-ensemble, on cherche à nouveau les meilleures actions, en appliquant cette fois une règle de sélection un peu moins sévère. Et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on n'ait plus dans le dernier sous-ensemble, qu'une seule action ou des actions ne pouvant plus être départagées. Cette action ou ces actions constitue(nt) la première classe. En retirant de A la ou les actions de la première classe, on recommence une distillation qui fournira la deuxième classe. On procède de la même façon jusqu'à ce que l'on ait traité toutes les actions de A.

La distillation ascendante progresse évidemment dans l'autre sens : on détermine la dernière classe d'abord et on remonte dans le classement.

En pratique, comment cela se passe-t-il ? Comme on l'a dit au début de ce paragraphe, la méthode est très complexe et nécessite l'utilisation du logiciel élaboré pour pallier ce défaut. Aussi, on ne détaillera que les fondements des techniques de distillation. Le lecteur intéressé consultera avec fruit l'ouvrage de Maystre *et al.* [1994] où il trouvera le schéma de l'algorithme mathématique à utiliser.

Tout d'abord, on se fixe une valeur $\bar{\epsilon} \in [0; 1]$. Ce $\bar{\epsilon}$ permettra de calculer ce que l'on appelle un seuil de discrimination $s(\bar{\epsilon}) = \bar{\alpha} + \hat{\alpha} \bar{\epsilon}$. Ce seuil permet à son tour d'établir les relations de surclassement :

« Si $\delta(a,b) = \bar{\epsilon}$ et $\delta(b,a) = \bar{\epsilon} - \zeta$ avec $\zeta > s(\bar{\epsilon})$, alors le surclassement de b par a est strictement plus crédible que le surclassement de a par b »

En fait, le premier $\bar{\epsilon}$ utilisé ($\bar{\epsilon}_0$) correspond à l'indice de crédibilité calculé le plus élevé. Le second $\bar{\epsilon}$ ($\bar{\epsilon}_1$) est le plus haut indice de crédibilité inférieur ou égal à la première valeur diminuée du seuil de discrimination $s(\bar{\epsilon}_0)$. Le troisième $\bar{\epsilon}$ utilise la deuxième valeur ($\bar{\epsilon}_1$) diminuée du seuil de discrimination appliqué à $\bar{\epsilon}_1$. Et ainsi de suite jusqu'à ce que, éventuellement, $\bar{\epsilon}_n = 0$.

Donc, pour chaque distillation, on ne retient, dans le graphe des surclassements, que les arcs dont le degré de crédibilité est supérieur ou égal à $\bar{\epsilon}_0$ et respectant la règle énoncée ci-dessus. Pour chaque action on calcule alors :

- sa puissance : nombre d’actions auxquelles elle est préférée ;
- sa faiblesse : nombre d’actions qui lui sont préférées ;
- sa qualification : différence entre puissance et faiblesse.

On extrait alors les actions ayant la plus haute qualification. Parmi elles, mais avec des valeurs de $\bar{\epsilon}$ de plus en plus faibles ($\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \dots, \bar{\epsilon}_n$), on recommence l’opération. On s’arrête lorsqu’on ne trouve plus qu’une action à qualification maximale ou lorsque $\bar{\epsilon}$ est nul.

Cela concernait la distillation descendante. Pour la distillation ascendante, on cherche évidemment à chaque fois l’action de qualification minimale.

Les deux types de distillations donnent, 99 fois sur 100, deux classements différents. En effet, tout comme dans Electre II, il y a des actions baladeuses qui, pour rappel, sont difficilement comparables aux autres. Du fait même de cette incomparabilité, leur qualification est proche de 0, ce qui implique qu’elles échappent aux différentes extractions lors des distillations. La distillation descendante les repousse dans le bas du classement alors que la distillation ascendante les fait grimper dans le haut du classement.

Toujours comme dans Electre II, on peut dès lors extraire un classement final acceptant l’incomparabilité et un classement médian rejetant toute incomparabilité.

Une autre façon de représenter les choses est le diagramme de l’IGE⁵. Celui-ci présente en abscisse la position de l’action dans le classement descendant et en ordonnée la position dans le classement ascendant. Les meilleures actions sont par conséquent, celles qui se trouvent près du coin inférieur gauche. Celles qui se trouvent sur la diagonale sont celles qui peuvent faire l’objet d’un jugement solide. Enfin, les actions baladeuses se trouvent à proximité des coins supérieur gauche et inférieur droit.

L’analyse de robustesse portera ici sur les poids des critères, les seuils d’indifférence, de préférence stricte et de veto.

En conclusion, Electre III est une méthode très complète et élégante, qui a le mérite d’exploiter l’information en sauvant un maximum de nuances et d’avancer des conclusions bien fondées. En contrepartie, elle offre un maniement délicat et elle est pénalisée par sa propre complexité concernant la compréhension de la méthode par le décideur.

Exemple 2.3.7

Pour réaliser les calculs, tests et classements relatifs à cette méthode, on a utilisé une macro d’Excel 2000®, dont les fondements ont été mis sur pied par P. Lejeune et la mise au point réalisée par S. Ben Mena. A partir d’un tableau des performances tel que le Tableau 1, cette macro donne directement les indices de crédibilité et les différents classements (Tableau 25 et Tableau 26).

⁵ Institut de Génie de l’Environnement de l’Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.

Tableau 25. Indice de crédibilité Electre III

Action «b»\Action «a»	Action 1	Action 2	Action 3	Action 4	Action 5	Action 6	Action 7	Action 8
Action 1	1,000	0,032	0,000	0,073	0,833	0,133	0,882	0,000
Action 2	0,900	1,000	0,800	0,937	1,000	0,832	0,820	0,000
Action 3	1,000	0,249	1,000	0,500	1,000	0,500	1,000	0,000
Action 4	0,997	0,700	0,823	1,000	1,000	0,900	0,845	0,000
Action 5	0,911	0,100	0,560	0,248	1,000	0,343	0,800	0,000
Action 6	0,900	0,267	0,628	0,700	0,700	1,000	0,950	0,000
Action 7	0,500	0,000	0,100	0,031	0,291	0,224	1,000	0,000
Action 8	0,300	0,000	0,072	0,000	0,150	0,000	0,800	1,000

Tableau 26. Classements Electre III

	<i>Distillation descendante</i>	<i>Distillation ascendante</i>	<i>Préordre final</i>	<i>N° des actions incomparables</i>	<i>Préordre médian</i>
Action 1	6	5	6		7
Action 2	1	1	1		1
Action 3	3	3	3	!8	4
Action 4	2	2	2	!8	2
Action 5	6	4	5		6
Action 6	4	3	4	!8	5
Action 7	7	6	7		8
Action 8	5	1	2	!3!4!6	3

Le résultat s'affichant sur une feuille Excel®, il est alors tout à fait facile de réaliser un graphe IGE. A titre d'information, la Figure 6 illustre ce à quoi le graphe ressemble dans ce cas-ci.

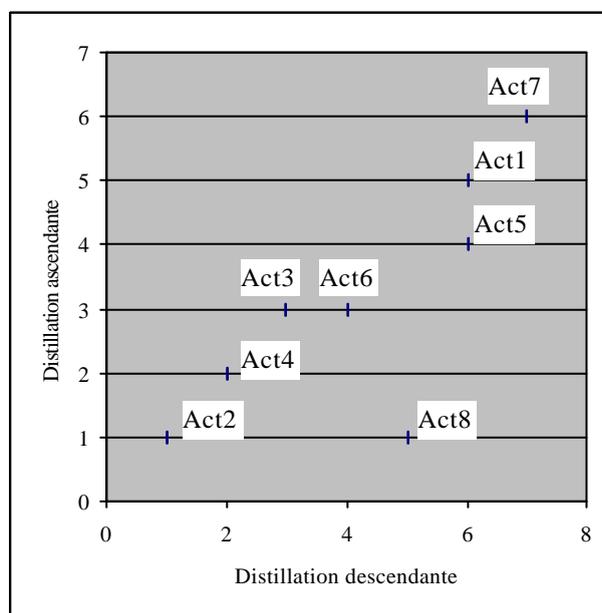


Figure 6 : Diagramme IGE illustrant les résultats Electre III

On constate évidemment que l'action 8 est la plus incomparable qui soit puisqu'elle se trouve fortement décalée vers le coin inférieur droit. L'action 2 est indubitablement la meilleure et la 7, la pire.

2.3.3.3. Electre IV [Roy et Hugonnard 1982]

Cette méthode s'applique aux problèmes dans lesquels il n'est pas possible d'attribuer des poids aux critères. Néanmoins, ceux-ci doivent respecter ce qu'on appelle l'hypothèse de disparité limitée [Roy et Bouyssou, 1993] :

« Aucun critère n'a, à lui seul, une importance supérieure ou égale à celle d'une coalition rassemblant au moins la moitié des critères »

Puisqu'il n'y a plus de poids il n'est donc plus possible de calculer un indice de concordance. Ainsi, on ne conserve du schéma des critères à seuil que l'axe horizontal (cfr 2.2).

Il faut aussi mentionner qu'on ne considère plus le couple (a,b) mais la paire a-b. On examine donc les deux hypothèses de surclassement, «a surclasse b» et «b surclasse a», en même temps.

Ayant tous ces éléments en main, on peut alors établir des relations de surclassement. Il existe différentes versions d'Electre IV avec des nombres variables de types de surclassements. Nous ne présenterons que la version comportant 6 types [Roy et Bouyssou, 1993]. Les auteurs ont introduit pour cela une nouvelle relation : « meilleur que ». Elle se schématise comme à la Figure 7 :

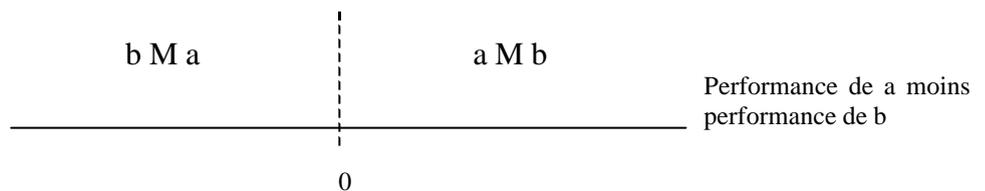


Figure 7 : Relation « meilleur que »

On se demande alors quel est le degré de crédibilité que l'on peut assigner (et non plus calculer !) pour l'hypothèse « a surclasse b ». Via les règles suivantes, on définit six niveaux de crédibilité :

- **aS¹b** si aucun critère ne donne bPa ni bQa,
et si le nombre de critères donnant aMb est strictement supérieur à celui des critères donnant bMa.
- **aS²b** si aucun critère ne donne bPa
et si le nombre de critères donnant aPb est supérieur ou égal à celui des critères donnant bQa
et si le nombre des critères donnant aMb est strictement supérieur à celui des critères donnant bMa.
- **aS³b** si aucun critère ne donne bPa
et si le nombre de critères donnant aPb ou aQb est supérieur ou égal à celui des critères donnant bQa.
- **aS⁴b** si aucun critère ne donne bPa.
- **aS⁵b** si aucun critère ne donne bPa,
ou si un seul critère donne bPa
et si ce critère discordant n'oppose pas un veto,

et si le nombre de critères donnant aPb est supérieur ou égal à la moitié du nombre des critères.

- aS⁶b dans tous les autres cas.

On notera au passage que ces règles sont « emboîtées » les unes aux autres⁶. Les fondements de ces règles dépassent le cadre de cet exposé mais le lecteur intéressé pourra se référer à Roy et Hugonnard [1981].

A partir du graphe des surclassements obtenu, les distillations se déroulent comme dans Electre III. Toutefois, il faut au préalable affecter à chaque type de surclassement une valeur de crédibilité arbitraire comme, par exemple, 1, 0,8, 0,6, 0,4, 0,2 (et 0). En fait, ces valeurs correspondent aux ϵ d'Electre III.

Electre IV est donc une simplification d'Electre III, adaptée aux problèmes où il est difficile d'appliquer des poids aux critères.

Exemple 2.3.8

Reprenons une fois de plus le Tableau 1 mais, cette fois, sans la ligne des poids. Une première façon de procéder est d'observer toutes les différences de performances qui s'imposent et d'affecter, selon la règle énoncée ci-avant, un indice de crédibilité à chaque paire d'action. Cela peut évidemment s'avérer fastidieux. Une autre technique consiste (avant de recourir à un logiciel approprié) à établir trois tableaux : l'un affiche le nombre de critères donnant aMb pour tout couple (a ;b), le second affiche le nombre de critères donnant aQb et le troisième affiche le nombre de critère donnant aPb. Cela permet d'avoir une vue plus synthétique des différentes situations entre actions. A titre d'exemple voici le tableau « aMb » (Tableau 27).

Tableau 27. Nombre de critères donnant aMb

Action «b»\Action «a»	Action 1	Action 2	Action 3	Action 4	Action 5	Action 6	Action 7	Action 8
Action 1	0	4	5	4	3	3	2	3
Action 2	1	0	2	2	1	3	2	3
Action 3	0	3	0	3	0	2	0	2
Action 4	1	3	2	0	1	2	2	3
Action 5	2	4	5	4	0	4	2	3
Action 6	2	2	3	1	1	0	2	2
Action 7	3	3	5	3	3	3	0	3
Action 8	2	2	3	2	2	3	2	0

A partir de cela, on peut procéder à l'affectation des indices de crédibilité à chaque couple (Tableau 28).

⁶ L'emboîtement est automatique pour les règles 2, 3 et 4. Pour la règle 5, le souci de rigueur mathématique a imposé de répéter la condition de la règle précédente. Il n'en reste pas moins que si aucun critère ne donne bPa, le surclassement est du type S⁴ [Schärlig, 1996].

Tableau 28: Indice de crédibilité Electre IV

Action «b»\Action «a»	Action 1	Action 2	Action 3	Action 4	Action 5	Action 6	Action 7	Action 8
Action 1	1	0,8	1	0,8	0,8	0,8	0	0
Action 2	0	1	0	0	0	0	0	0
Action 3	0	0	1	0	0	0	0	0
Action 4	0	0,6	0	1	0	0	0	0
Action 5	0	1	1	1	1	0,2	0	0
Action 6	0	0	0	0	0	1	0	0
Action 7	0	0,2	1	0,2	0	0,8	1	0,8
Action 8	0	0	0	0	0	0	0	1

L'utilisation d'une procédure de la macro citée au 2.3.3.2 permet d'éviter le caractère fastidieux des distillations et classements d'Electre III, puisque, à partir des indices de crédibilités, Electre IV et Electre III sont identiques. Les résultats sont présentés au Tableau 29.

Tableau 29. Résultats Electre IV

	<i>Distillation descendante</i>	<i>Distillation ascendante</i>	<i>Préordre final</i>	<i>N° des actions incomparables</i>	<i>Préordre médian</i>
Action 1	4	2	5		5
Action 2	2	1	2		2
Action 3	1	1	1		1
Action 4	2	1	2		2
Action 5	4	3	6		6
Action 6	3	1	3		3
Action 7	4	2	5		5
Action 8	4	1	4		4

L'observation de ces résultats appelle une première constatation, étonnante : l'absence d'incomparabilité. En outre, on remarquera que l'action 2, souvent très bien classée, est ici en deuxième position (position toutefois toujours très honorable !). Ces divergences par rapport à Electre III sont le produit de la non intervention des poids, de l'interprétation plus brutale des différences de performances et de l'intervention toute relative du veto. On notera également que l'absence de poids n'est pas forcément l'équivalent de poids égaux.

2.3.3.4. Prométhée [Brans, Mareschal, Vincke, 1984]

Cette méthode utilise non plus la notion de surclassement, mais la préférence large. Cela a pour conséquence de déplacer latéralement vers la droite la courbe en trait plein de la Figure 2. Comme les $\zeta(a,b)$ seront beaucoup plus souvent nuls que dans Electre, les auteurs de cette méthode ont estimé qu'il n'était plus nécessaire d'introduire la notion de discordance dans les calculs. On peut alors réaliser un graphe de surclassement tel qu'on l'obtiendrait avec Electre III, à la différence que les indices de crédibilité sont remplacés par de simples indices de concordance. Ce graphe permet de calculer, pour chaque action a :

- sa puissance, $\ddot{O}^+(a)$, qui est la somme des indices des flèches issues de cette action divisée par le nombre d'actions moins 1 ;
- sa faiblesse, $\ddot{O}^-(a)$, qui est la somme des indices des flèches arrivant à cette action, divisée par le nombre d'actions moins 1.

Il existe alors différentes versions de Prométhée.

Prométhée I établit un classement acceptant l'incomparabilité (préordre partiel), basé sur les règles suivantes :

- aPb si $\ddot{O}^+(a) > \ddot{O}^+(b)$ et si $\ddot{O}^-(a) < \ddot{O}^-(b)$
 ou si $\ddot{O}^+(a) > \ddot{O}^+(b)$ et si $\ddot{O}^-(a) = \ddot{O}^-(b)$
 ou si $\ddot{O}^+(a) = \ddot{O}^+(b)$ et si $\ddot{O}^-(a) < \ddot{O}^-(b)$
- aIb si $\ddot{O}^+(a) = \ddot{O}^+(b)$ et si $\ddot{O}^-(a) = \ddot{O}^-(b)$
- aRb sinon.

Prométhée II établit un classement sans incomparabilité (préordre total) en calculant les qualifications des actions. Cette qualification $\ddot{O}(a)$ est le résultat de la différence entre la puissance et la faiblesse de l'action. L'ordre est donc facilement établi :

$$\begin{aligned} & \text{aPb si } \ddot{O}(a) > \ddot{O}(b) \\ & \text{aIb si } \ddot{O}(a) = \ddot{O}(b) \end{aligned}$$

A ce stade, il est utile de mentionner l'existence du logiciel Promcalc mis au point dans le cadre de cette méthode. Ce logiciel fournit, outre les classements de Prométhée I et II, une représentation graphique du problème, appelée plan GAIA.

On montre que la qualification $\ddot{O}(a)$ d'une action a peut-être obtenue par le produit scalaire de deux vecteurs dont la dimension est égale au nombre de critères. Le premier vecteur comprend tous les poids des critères comme composantes, le second vecteur comprend les qualifications de a aux yeux de chaque critère. Chaque action peut donc être représentée par ce deuxième vecteur dans un espace dont les axes correspondent aux critères. Par une technique d'analyse en composantes principales, on projette cet espace sur un plan (nommé GAIA). Les détails du processus se trouvent dans Brans et Mareschal [1993, 1994, 1997] et Brans, Macharis et Mareschal [1997]. On peut aisément démontrer les propriétés suivantes :

- plus l'axe d'un critère dans ce plan, est grand et mieux il permet de différencier les actions ;
- des critères exprimant les mêmes préférences (ou des préférences opposées) seront orientés dans plus ou moins la même direction (ou des directions opposées) ;
- des critères indépendants seront représentés par des axes orthogonaux ;
- des actions bien cotées pour un critère seront représentées par des points situés dans le sens de l'axe du critère ;

En outre, la projection sur le plan GAIA du «vecteur poids», appelée axe de décision de Prométhée et notée δ , fournit le classement obtenu selon Prométhée II. Si cette projection est grande par rapport aux axes des critères, l'axe de décision a un fort pouvoir de décision et il est alors conseillé de choisir des actions le plus loin possible (de l'origine !) dans le sens de cet axe. Si l'axe est court, cela signifie que les critères sont en conflit et qu'il est préférable de choisir une action proche de l'origine.

On notera que le logiciel est d'autant plus indispensable que la méthode suggère un choix de six types de fonction critère qui, tout en respectant la notion de préférence large, peuvent prendre l'allure d'une courbe gaussienne (Figure 8).

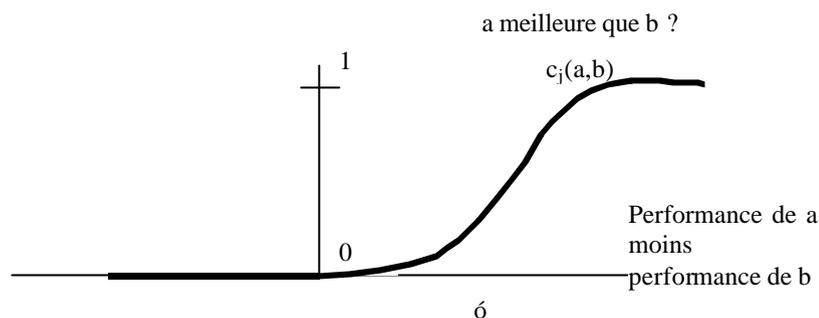


Figure 8 : Exemple de courbe de fonction critère dans Prométhée

On remarquera que, dans ses fondements, Prométhée est nettement plus simple qu'Electre III. Cette simplification peut parfois être trouvée excessive [Schärlig, 1996]. Ainsi par exemple, deux actions peuvent avoir un même \ddot{O}^+ , provenant dans un cas d'indices proches de 1 pour une part et proche de zéro pour le reste, et dans l'autre cas d'indices tous proches de $\frac{1}{2}$. Dans la procédure, ces deux actions seront traitées comme équivalentes alors que l'une se compare solidement avec plusieurs autres actions et que l'autre est typiquement une baladeuse.

Exemple 2.3.9

Une dernière fois, reprenons le Tableau 1, en en retirant la ligne des seuils de veto. On peut alors calculer, pour chaque critère et chaque couple d'actions, un indice de concordance (avec l'hypothèse $a \succ b$!). En découle l'indice de concordance global (Tableau 30).

Tableau 30. Indice de concordance Prométhée

Action «b»\Action «a»	Action 1	Action 2	Action 3	Action 4	Action 5	Action 6	Action 7	Action 8
Action 1	0,000	0,900	0,593	0,900	0,167	0,600	0,118	0,500
Action 2	0,100	0,000	0,200	0,063	0,000	0,168	0,180	0,420
Action 3	0,000	0,700	0,000	0,500	0,000	0,500	0,000	0,400
Action 4	0,004	0,300	0,177	0,000	0,000	0,100	0,155	0,460
Action 5	0,089	0,800	0,440	0,752	0,000	0,657	0,200	0,440
Action 6	0,100	0,600	0,372	0,300	0,300	0,000	0,050	0,400
Action 7	0,500	0,800	0,820	0,800	0,700	0,500	0,000	0,640
Action 8	0,500	0,500	0,580	0,500	0,500	0,500	0,200	0,000

Les sommes marginales selon les lignes et selon les colonnes, divisées par $(8-1)=7$ sont respectivement les puissances et faiblesses des actions. Ces valeurs permettent d'établir deux préordres totaux, desquels on extrait un préordre final de la même façon que pour Electre III (Tableau 31).

Tableau 31: Classements Prométhée I et II

	<i>Puissance</i>	<i>Rang</i>	<i>Faiblesse</i>	<i>Rang</i>	<i>Classement final</i>	<i>N° d'actions incomparables</i>	<i>Qualification</i>	<i>Classement médian</i>
Action 1	0,185	7	0,540	7	6		-0,355	7
Action 2	0,657	1	0,161	1	1		0,496	1
Action 3	0,455	4	0,300	3	3	i8	0,155	3
Action 4	0,545	2	0,171	2	2		0,374	2
Action 5	0,238	6	0,483	6	5		-0,245	6
Action 6	0,432	5	0,303	4	4	i8	0,129	4
Action 7	0,129	8	0,680	8	7		-0,551	8
Action 8	0,466	3	0,469	5	3	i3i6	-0,003	5

La qualification donne enfin le classement médian. On voit alors que Prométhée est à peine moins nuancée qu'Electre III.

Remarque

De par la taille réduite de l'exemple utilisé tout au long de ces pages, les données on pu être traitées par le tableur Excel®. En fait, un tableau des performances plus conséquent n'aurait constitué un obstacle qu'à l'application de l'algorithme de certaines méthodes. Le calcul des divers indices ne pose, en général, aucun problème. Néanmoins, Excel® reste un outil très performant lorsqu'on dispose de certaines aptitudes en programmation informatique. Il permet, en effet, de construire des macros destinées à réaliser toutes les tâches répétitives et fastidieuses de n'importe quelle méthode (cfr Electre III). Si la programmation pose problème, on peut alors déboursier de fortes sommes d'argent dans l'achat des logiciels appropriés...

2.3.3.5. Qualiflex [Paelinck, 1976, 1978, 1979]

Cette méthode tient compte du fait qu'il est davantage dans la nature humaine de donner un rang à des objets que de leur attribuer des cotes.

Tout d'abord, on classe les critères par ordre d'importance. On attribue alors à chaque critère un poids qui variera dans les limites imposées par ce classement (en fait, on prend des valeurs finies à l'intérieur de cet intervalle). On obtient donc un jeu de poids souple, auquel on impose que la somme des poids reste constante. En d'autres termes, on définit un espace de poids.

Ensuite, pour chaque critère, on établit le classement des actions. Si on porte les actions en lignes et les critères (classés) en colonnes, on obtient donc une sorte de tableau des performances dans lequel on observe les rangs des actions.

Cela étant fait, on recherche tous les classements théoriques possibles d'actions. S'il y a n actions, cela fait n! classements possibles. Pour chacun de ceux-ci, selon chaque critère, on cote la concordance entre le classement théorique et le classement de la matrice des rangs :

- si les actions d'une paire ont la même position relative dans les deux classements, le classement théorique reçoit un point ;

- si les deux actions sont ex aequo dans la matrice des rangs, le classement théorique ne reçoit aucun point ;
- si les positions relatives sont inversées dans un classement par rapport à l'autre, le classement théorique se voit retirer un point ;

On obtient ainsi une matrice de notes pour les différents classements aux yeux des différents critères. Si l'un des classements est dominé par un autre, c'est-à-dire s'il reçoit dans chaque critère une cote inférieure ou égale à celle obtenue par cet autre, il est éliminé.

Toujours pour chaque classement théorique possible, on va calculer un indice qui sera la somme des produits des cotes qu'il a obtenues par un jeu de poids possible. On retient le classement dont l'indice est le plus élevé. Et on répète l'opération pour tous les jeux de poids faisant partie de l'espace des poids. En général, cet espace se divise en régions qui soutiennent chacune un classement différent. Paelinck propose alors des méthodes mathématiques assez élaborées pour tenter d'identifier malgré tout le classement désiré. A défaut, une discussion avec les demandeurs d'étude fera peut-être émerger les relations existant entre poids et classements.

On aura noté au passage que Qualiflex est une méthode « explosive » (cfr n!).

2.3.3.6. Oreste [Roubens, 1979, 1980, 1982b]

Cette méthode est aussi une méthode ordinale (basée sur les rangs) qui permet en outre d'éviter d'attribuer des poids aux critères.

Au départ d'une matrice des rangs semblable à celle de Qualiflex, on établit une représentation graphique : en ordonnée, on superpose les critères en commençant par le mieux classé, et sur les demi-droites horizontales correspondantes, on représente les actions dans l'ordre que leur confère le critère correspondant, la moins performante étant située vers la droite. Par exemple, pour trois actions classées selon trois critères, on obtient la Figure 9.

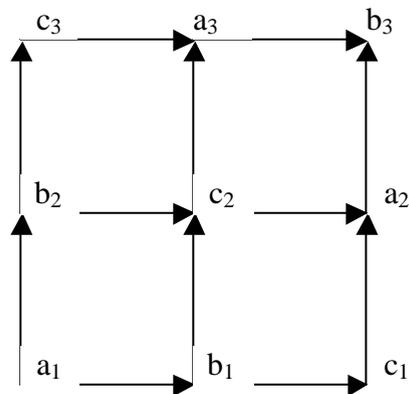


Figure 9 : Treillis d'Oreste

Pour obtenir un classement unique, on opère une projection (Figure 10).

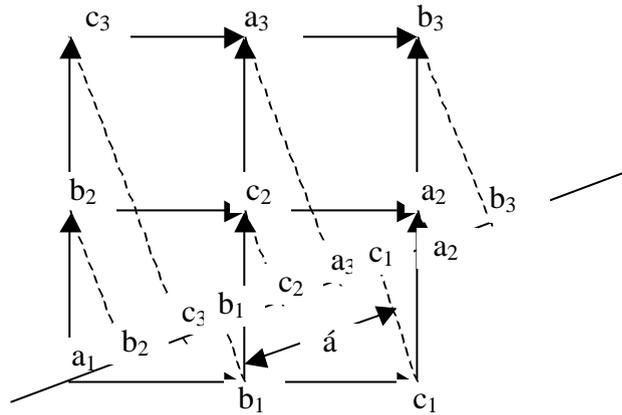


Figure 10 : Projection permettant d'obtenir un classement unique

Le coefficient angulaire de la pente est libre et est donc un paramètre sur lequel on pourra jouer. Dans la méthode, ce paramètre est mesuré par \acute{a} , projection d'un côté sur la droite. On mesure alors les positions des actions sur l'axe. Si on fixe arbitrairement le coin inférieur droit comme étant à une distance de 1, on peut vérifier que les distances suivent une loi précise :

$$D = \acute{a} (\text{rang de l'action au sein du critère}) + (1 - \acute{a}) (\text{rang du critère correspondant})$$

Grâce à cela, on peut se passer de la représentation graphique. Ces distances, lorsqu'elles sont rangées par ordre croissant, permettent d'affecter un rang à chaque action. Une action se retrouvera donc autant de fois qu'il y a de critères. On calcule dès lors un premier type de valeur, $R(a_i)$, égal à la somme des rangs obtenus pour chaque action a_i . Ces $R(a_i)$ donnent un classement médian des actions. Ensuite, un deuxième type de valeurs est calculé : pour chaque paire d'actions, prise dans l'ordre des valeurs R , on calcule un $C(a_i, a_k)$ égal à la somme des différences de rang dans les critères donnant la première action mieux classée que la deuxième. Si on a $R(a_i) > R(a_k)$, pour trancher entre $a_i a_k$, $a_i P a_k$ ou $a_i R a_k$, on suit l'algorithme suivant, où $\hat{\alpha}$ et $\tilde{\alpha}$ sont des paramètres que l'on peut faire varier, K le nombre de critères et m le nombre d'actions (Figure 11).

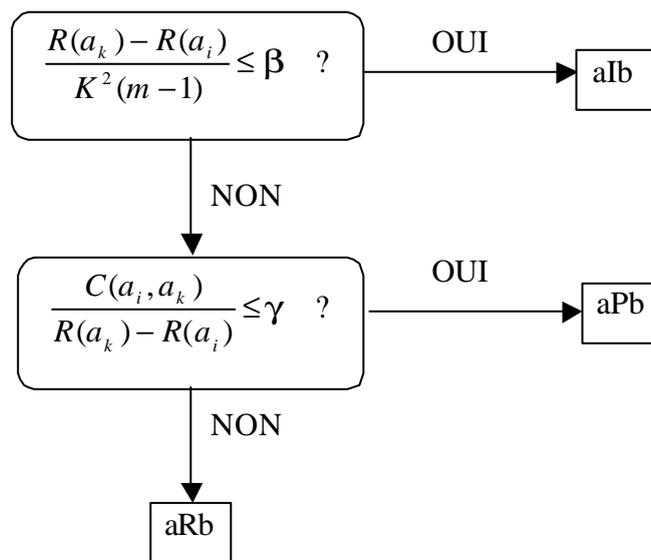


Figure 11 : Algorithme d'établissement des surclassements d'Oreste

On pourrait être choqué dans Oreste, de l'addition de rangs d'actions et de rangs de critères. L'auteur rappelle qu'il faut se référer au graphe, et qu'on constate que l'opération n'est qu'un passage de 2 à 1 dimension.

2.3.3.7. Méthode de surclassement dans l'incertain [D'Avignon et Vincke, 1988]

Cette méthode a été proposée dans le but de traiter des situations où les évaluations des actions pour chaque critère se présentent sous forme de distribution de probabilité (conséquences aléatoires) ou de distributions de fréquences (évaluations par plusieurs experts). En effet, elle garde le plus longtemps possible le caractère non ponctuel des évaluations des actions et ne les remplace pas dès le début par un nombre unique (moyenne, médiane,...) comme dans d'autres méthodes.

Tout comme dans les méthodes Electre III-IV et Prométhée, puissance et faiblesse, cette fois en tant que variables aléatoires, sont calculées pour chaque action. C'est seulement alors qu'on ne considère plus que les médianes des distributions de ces deux caractéristiques pour obtenir deux préordres complets. Néanmoins, il est proposé d'associer à ces préordres des indices tenant compte du plus ou moins grand chevauchement des distributions de probabilité.

3. Conclusion-Recommandations

Au terme de la lecture de cette synthèse, le lecteur ne peut ignorer la richesse et les potentialités de l'aide multicritère à la décision. En effet, celle-ci foisonne de nuances qui, contrairement au monopole du simplexe en programmation linéaire, permettent l'élaboration de nombreuses méthodes voire de variantes de méthodes. Mais face à cette abondance, comment choisir ?

Cela dépend du problème qui se pose. Tout d'abord, rappelons que, pour n'importe quel problème, l'important est, premièrement, de bien le comprendre pour ensuite le décrire correctement. Cela peut sembler évident mais ce n'est pas toujours facile à faire. La compréhension dépendra essentiellement de la communication des informations entre acteurs de la décision. La complexité de la description proviendra surtout des types d'actions potentielles, de leurs conséquences et du type d'évaluations auxquelles elles mènent. Et c'est seulement lorsque le tableau des performances est rempli qu'entre en scène la « résolution » du problème et donc le choix d'une méthode. Il faut alors se poser les bonnes questions. Voici quelques exemples.

- Quel est le matériel de calcul dont on dispose ? S'il ne s'agit que d'une machine à calculer, une feuille de papier et un crayon, mieux vaut s'orienter vers des méthodes relativement simples. Un ordinateur programmable satisfera amplement l'appétit de mémoire et de calcul des autres méthodes.
- Quelles sont les informations dont on dispose au terme de l'étude préliminaire à la mise en œuvre proprement dite d'une méthode ? La forme du système relationnel de préférences du décideur peut déjà permettre d'éliminer certaines méthodes. De même, l'information intercritère (poids, veto éventuel) sélectionnera, du moins grossièrement, les méthodes adéquates.
- Quelle est la problématique de la question ? Le texte qui précède a réparti les méthodes selon les trois problématiques.
- De façon plus culturelle, quelles sont les affinités du décideur vis-à-vis des différentes méthodes ? Pour autant que le décideur ait des notions de base et à défaut, de la part de l'homme d'étude, de convaincre le décideur de changer de

méthode, cette dernière peut être fixée dès le début de l'étude... L'Homme a souvent des raisons que la raison ne connaît pas !

Ces questions sont les premières qui doivent venir à l'esprit mais l'expérience et la pratique peuvent en ajouter d'autres, sans doute plus précises, permettant d'affiner davantage le choix de la méthode à utiliser. Mais une fois cette option fixée, rien n'interdit d'appliquer d'autres méthodes afin de comparer les résultats, voire leur robustesse.

De plus, il faut savoir qu'il n'y a pas forcément qu'une seule méthode applicable au cas considéré. Roy [1985] indique même, dans son ouvrage «*Méthodologie multicritère d'aide à la décision*», qu'un même problème peut être analysé par plusieurs combinaisons approche-problématique, que ce soit pour l'entièreté du problème ou l'une de ses phases. Du reste, il n'est pas interdit non plus de « bricoler » afin de mettre au point une méthode hybride ou intermédiaire entre deux autres préexistantes. En outre, une fois que le choix est fait, une argumentation de ce dernier face à un détracteur s'avère, dans bien des cas, plutôt difficile.

Bref, pour désigner la méthode *ad hoc*, il faudrait effectuer une analyse multicritère. Mais, pour ce faire,... quelle méthode choisir ?

En ce qui concerne le champ d'application de l'aide multicritère à la décision, il se révèle très vaste : production, marketing, économie, sécurité, environnement, finance, sciences de l'ingénieur, énergie, transports, ... [Vincke, 1989] Vincke [1989], Maystre *et al.* [1994], Schärliig [1985, 1996] et, de façon plus théorique, Roy [1985] et Roy et Bouyssou [1993] en présentent de nombreux exemples. Cependant, certaines méthodes peuvent avoir des « domaines de prédilection ». Ainsi, par exemple, l'approche par agrégation partielle se répandrait surtout dans la finance et, on vient de le voir, la gestion de l'environnement. En finance, même si on peut ne se baser que sur des critères quantitatifs, ceux-ci ne sont, en général, pas tous *commensurables*. Quant à la gestion environnementale, elle comprend de nombreux aspects qualitatifs et donc non commensurables [Schärliig, 1996]. D'où, dans les deux cas, on a recours à l'agrégation partielle. Mais, comme mentionné ci-dessus, le choix de l'approche dépend encore du type de problème. Ainsi, en gestion de l'environnement, lorsqu'on relève les travaux déjà réalisés dans le domaine, différents cas de figure peuvent être distingués⁷ :

- gestion de la qualité de l'environnement : lutte contre la pollution de l'air et/ou de l'eau, gestion de déchets,...
- localisation : industrie polluante, décharge, aéroport,...
- affectation⁸ : aménagement de bassin versant, de forêt, de réserve naturelle, sectorialisation assistée par SIG, où, dans chaque cas, on affecte différentes « occupations du sol » à différentes parcelles,
- approvisionnement : irrigation, lignes à haute tension,...
- tracés de voies de grande circulation : autoroutes, lignes de chemin de fer,...

Cela doit attirer l'attention sur le fait que les méthodes multicritères s'appliquent aussi aux situations dans lesquelles, outre la multiplicité des critères, interviennent plusieurs systèmes

⁷ Cette classification se veut uniquement suggestive. Certains problèmes peuvent en effet se retrouver dans plusieurs classes à la fois. On pourrait par exemple penser que l'installation de lignes à haute tension relève d'un problème de pollution visuelle de l'environnement...

⁸ Les problèmes de localisations sont distingués des problèmes d'affectation car contrairement à ces derniers, des contraintes spatiales (par exemple, la surface d'un seul tenant suffisamment importante) imposent un nombre nettement restreint d'emplacements possibles pour une même occupation du sol.

de valeurs, c'est-à-dire plusieurs acteurs influents dont il faut tenir compte des préférences et entre lesquels il faut réaliser une sorte de négociation. A cette multiplicité de points de vue, peut se substituer ou s'ajouter la multiplicité de scénarios. Cela veut dire que chaque action est évaluée différemment selon le scénario auquel elle appartient. Ainsi, par exemple, dans un aménagement forestier, à la multiplicité des critères à prendre en considération peuvent « s'ajouter » les multiplicités d'acteurs (propriétaires, mouvements politico-sociaux, chasseurs,...) et de scénarios de gestion. Pour résoudre ces problèmes, on peut utiliser une technique proposée par Roy [1985] : traiter autant de problèmes qu'il y a de systèmes de valeurs ou de scénarios puis réaliser une synthèse par une seconde application des méthodes multicritère, en associant un critère à chacun de ces systèmes ou scénarios. La chose n'est pas forcément aisée mais la difficulté n'est pas insurmontable. Elle semble imposer, en tout cas, l'utilisation de méthodes qui permettent de considérer plusieurs critères simultanément et non un seul à la fois.

4. Références bibliographiques

- BRANS J.P. et MARESCHAL B. [1993], How to differentiate Hard from Soft Multicriteria Problems in the Discrete Case (The Promethee VI procedure), *Cahier du "Centrum voor Statistiek en Operational Onderzoek"*, ULB
- BRANS J.P. et MARESCHAL B. [1994], The Promcalc and Gaia decision system for multicriteria decision aid, *Decision Support Systems*, **12** : 297-310
- BRANS J.P. et MARESCHAL B. [1997], Multicriteria decision aid - The Promethe-Gaia solution, *Cahier du "Centrum voor Statistiek en Operational Onderzoek"*, ULB
- BRANS J.P., MACHARIS et MARESCHAL B. [1997], The GDSS Promethee procedure, *Cahier du "Centrum voor Statistiek en Operational Onderzoek"*, ULB
- BRANS J.P., MARESCHAL B., VINCKE P. [1984], PROMETHEE : A new family of outranking methods in multicriteria analysis, in Brans (ed.), *Operational Research '84*, Elsevier Science Publishers B.V. (North Holland), 408-421
- D'AVIGNON G. et VINCKE P. [1988], An outranking method under uncertainty, *European Journal of Operational Research*, **36** :311-321
- GRAUX G. [1997], *Contribution à l'aménagement de peuplements feuillus hétérogènes : description et évaluation de la fonction de production*, Fusagx, Travail de fin d'études, 81 p.
- MAYSTRE L.Y., PICTET J., SIMOS J. [1994], *Méthodes multicritères Electre. Description, conseils pratiques et cas d'application à la gestion environnementale*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 323 p.
- MOSCAROLLA J. et ROY B. [1976], *Procédure automatique d'examen de dossiers fondée sur un classement trichotomique en présence de critères multiples*, Cahiers du Lamsade, Université Dauphine, Paris, Janvier 1976, 32 p. et RAIRO Recherche opérationnelle, **11(2)** : 145-173
- PAELINCK J. [1976], Qualitative multiple criteria analysis, environmental protection and multiregional development, *Papers of the Regional Science Association*, **36** : 59-74
- PAELINCK J. [1978], Qualiflex, a flexible multiple criteria method, *Economic letters*, **3** : 193-197
- PAELINCK J. [1979], *The multi-criteria method QUALIFLEX : past experiences and recent developments*, working paper 1979/15, Netherlands Economic Institute, Rotterdam, 24 p
- ROCHAT J.C. [1980], *Mathématiques pour la gestion de l'environnement*, Birkhäuser, Bâle, 413 p.
- ROUBENS M. [1979], *Agrégation des préférences en présence de préordres totaux sur l'ensemble des actions et d'une relation de préférence du type (I, P, Q) sur les points de vue*, Réunion EURO-MULTI, Liège, 9 p.
- ROUBENS M. [1980], Ajustement de relations binaires et méthode multicritère, in Hansen et de Werra : *Regards sur la théorie des graphes*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, pp. 291-296.
- ROUBENS M. [1982], Preference relations on actions and criteria in multicriteria decision making, *European Journal of Operations Research*, **10(1)** : 51-55

- ROY B. [1968], Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode Electre), *Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle*, **2 (8 ou V1)** : 57-75
- ROY B. [1977], *Electre III, un algorithme de classement fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples*, rapport de recherche 81, Sema, Paris, 32 p. ; publié ensuite dans les *Cahiers du Centre d'études de recherche opérationnelle*, **20 (1)** : 3-24
- ROY B. [1981], A multicriteria analysis for trichotomic segmentation problems, in Peter Nijkamp et Jaap Spronk (eds), *Multiple Criteria Analysis*, Gower, pp. 245-257
- ROY B. [1985], *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*, Economica, Paris, 1985, XXII + 423 p.
- ROY B. et BERTIER P. [1971], *La méthode Electre II, une méthode de classement en présence de critères multiples*, note de travail 142, Direction scientifique, Sema, Paris, 25 p.
- ROY B. et BOUYSSOU D. [1993], *Aide multicritère à la décision : Méthodes et cas*, Economica, Paris, 1993, 695 p.
- ROY B. et HUGONNARD J.C. [1981], *Classement des prolongements de lignes de métro en banlieue parisienne*, Lamsade (Université Dauphine) et RATP, Paris, 34 p.
- ROY B. et HUGONNARD J.C. [1982], Classement des prolongements de lignes de métro en banlieue parisienne, *Cahiers du Centre d'études de recherche opérationnelle*, **23** : 153-171
- ROY B. et SKALKA J.M. [1985], *Electre Is, aspects méthodologiques et guide d'utilisation*, Document 30, Lamsade, Université de Paris Dauphine, 2^e édition 1987, 119p.
- SCHÄRLIG A. [1985], *Décider sur plusieurs critères, panorama de l'aide à la décision multicritère*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 304 p.
- SCHÄRLIG A. [1996], *Pratiquer Electre et Prométhée, Un complément à décider sur plusieurs critères*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 173 p.
- SISKOS J., WÄSCHER G. et WINKELS H.M. [1983], *A bibliography of outranking approaches*, Cahiers du Lamsade, Université Dauphine, **45**, 15p.
- VANSNICK J.C. [1979], *Une approche nouvelle des problèmes de décision : l'aide à la décision*, faculté des Sciences économiques et sociales, Université de l'Etat, Mons, 45p.
- VANSNICK J.C. [1986], On the problems of weights in MCDM (the noncompensatory approach), *European Journal of Operational Research*, **24**, 288-294
- VINCKE P. [1989], *L'aide multicritère à la décision*, Editions de l'Université de Bruxelles, Bruxelles, 179 p
- YU W. [1992a], *Electre TRI, aspects méthodologiques et guide d'utilisation*, Document 74, Lamsade, Université de Paris Dauphine, 80p.
- YU W. [1992b], *Aide multicritère à la décision dans le cadre de la problématique de tri. Concepts, méthodes et applications*, thèse de doctorat, Université de Paris Dauphine, 201 p.