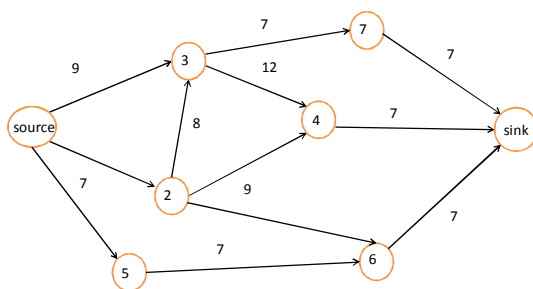


Hálózati Folyamok

Mályusz Levente
BME Építéskivitelezési és Szervezési
Tanszék

Maximális folyam



Maximális folyam feladat

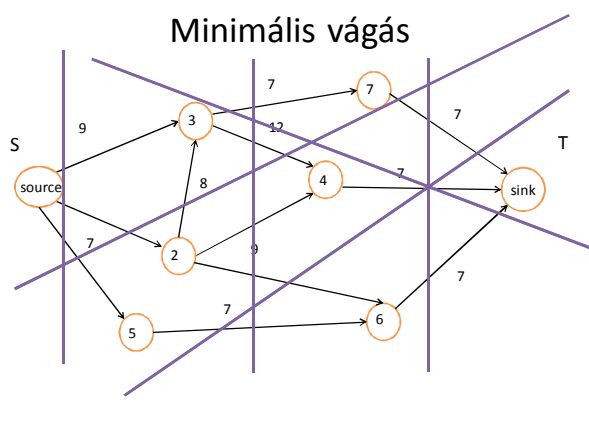
- Adott $[N, A]$ digráf (irányított élhalmaz), és egy élein értelmezett egész szám.
- Nevezzeük ezt a számot kapacitásnak
- Keressünk maximális folyamot egy kijelölt forrás és nyelő között.

Maximális folyam feladat

Keresendő olyan v folyam érték, hogy

$$\begin{aligned} & 'v' \text{ maximális, feltéve, hogy} \\ & \sum_{ij \in A} f_{ij} - \sum_{ji \in A} f_{ji} = \begin{cases} v, & \text{ha } i = s \\ 0, & \text{ha } i \in N \setminus \{s, t\} \\ -v, & \text{ha } i = t \end{cases} \\ & 0 \leq f_{ij} \leq k_{ij}, \quad \forall ij \in A \end{aligned}$$

Minimális vágás



Definíció: Az $[N, A, k]$ hálózatban legyen (S, T) egy vágás. A $k(S, T) = \sum_{ij \in S, T} k_{ij}$ értéket a vágás kapacitásának nevezzük. Az összes s, t pontokat elválasztó vágások közül a legkisebb kapacitásút az s, t pontokra vonatkozó minimális vágásnak nevezzük.

Definíció: Szabad kapacitás hálózat (residual capacity)

Az éleken értelmezett olyan többlet folyam, amely azt fejezi ki, hogy – feltéve, hogy $\forall ij \in A$ - a digráf i -edik csomópontjából j -be mennyi folyamat tudunk még átküldeni az (i, j) (j, i) élek felhasználásával.

$$r_{ij} = k_{ij} - f_{ij} + f_{ji}$$

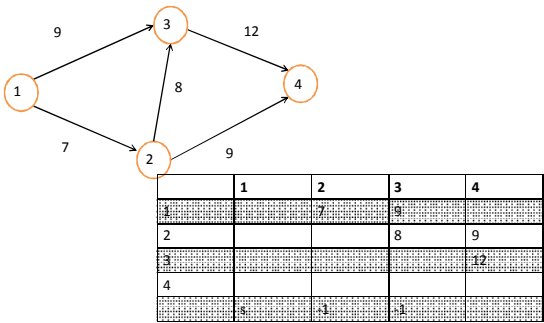
$$r_{ij} = 0 \text{ akkor és csak akkor ha } k_{ij} = f_{ij} \text{ és } f_{ji} = 0.$$

a., egy $[N, A, k]$ hálózaton létezik olyan f folyam, amelyre v maximális és amelyre v egyenlő a hálózatban lévő minimális kapacitású vágással.

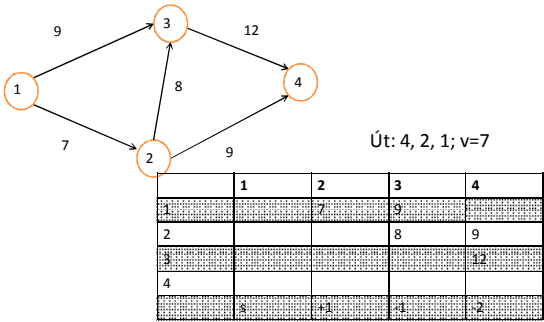
b., egy f folyam akkor és csak akkor maximális v értékű, ha a szabad kapacitású hálózatban nincs növelő út s -ből t -be.

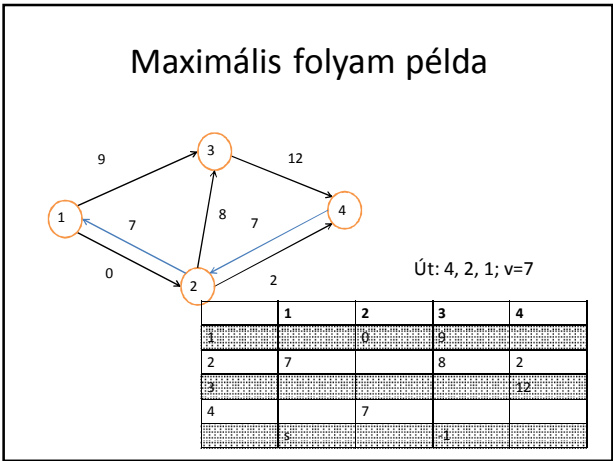
c., a feladatnak mindig létezik egészértékű (f) optimális megoldása.

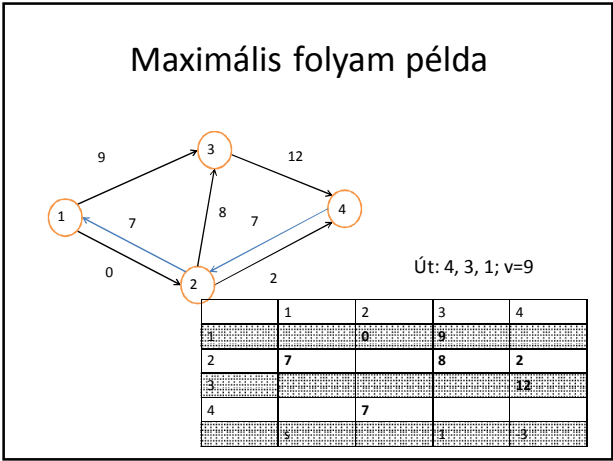
Maximális folyam példa

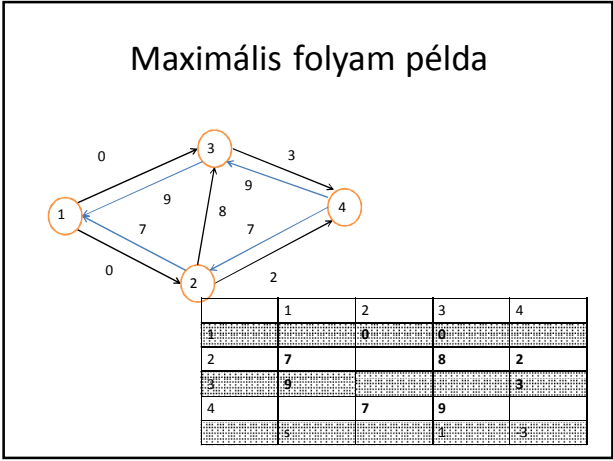


Maximális folyam példa

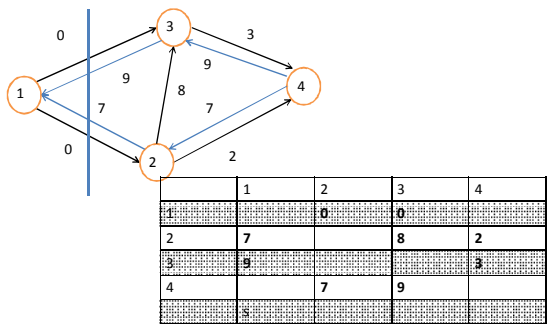




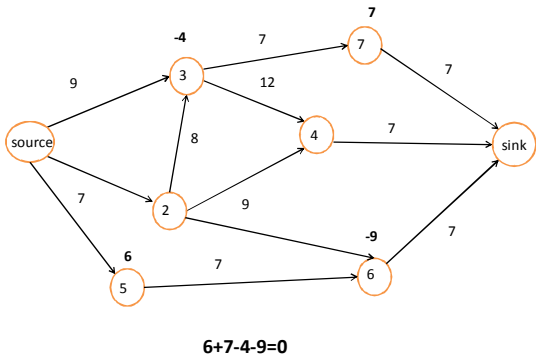




Maximális folyam péld



Több forrás, több nyelő



Több forrás, több nyelő

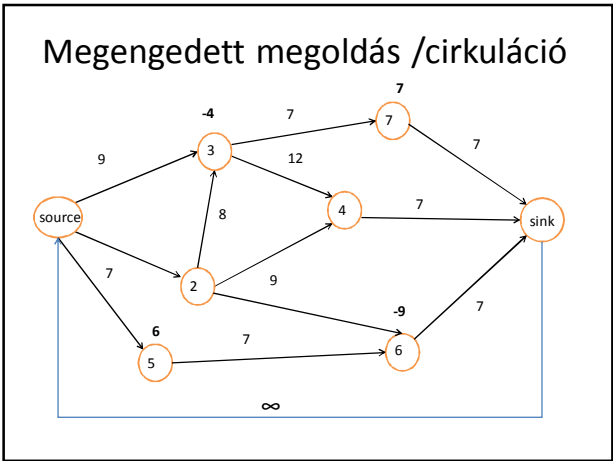
Adott N, A, k hálózatot egészítsük ki egy minden csomópontoz adott b_i értékkel, feltéve, hogy

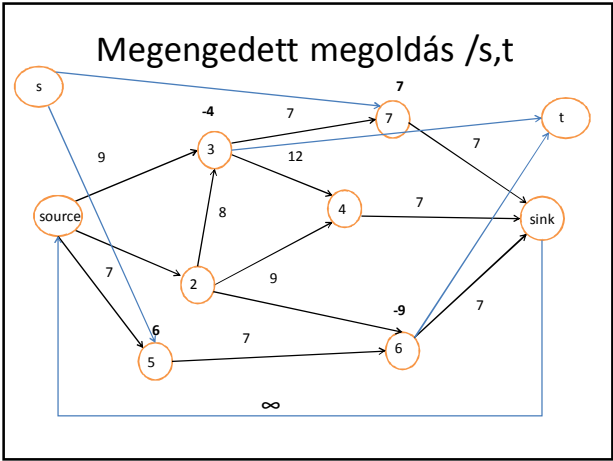
$$\sum_{i \in N} b_i = 0$$

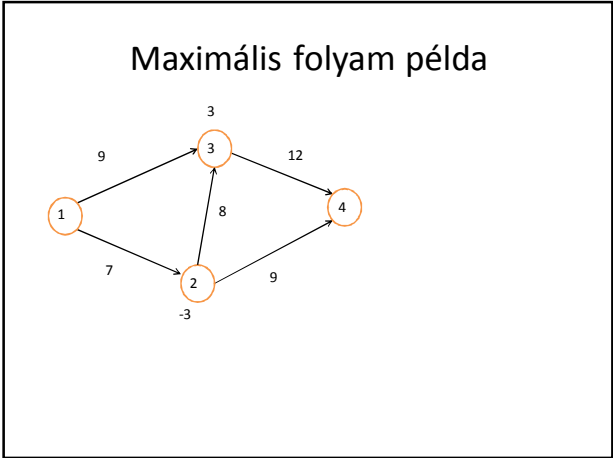
Feladat: keresendő olyan v folyam érték, hogy

' v ' maximális, feltéve, hogy

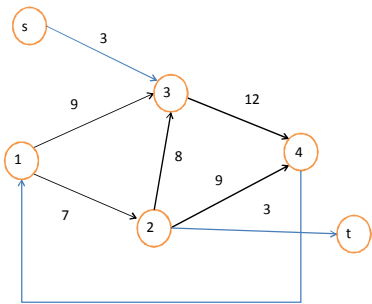
$$\sum_{j \in I} f_{ij} - \sum_{j \in A} f_{ji} = \begin{cases} v, & \text{ha } i = s \\ b_i, & \text{ha } i \in N \setminus \{s, t\} \\ -v, & \text{ha } i = t \end{cases}$$
$$0 \leq f_{ij} \leq k_{ij}, \quad \forall ij \in A$$







Maximális folyam péld



Megengedett megoldás keresése 1

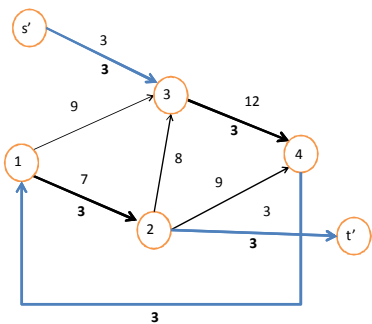
	s'	1	2	3	4	t
s'				3		
1			7	9		
2				8	9	3
3					12	
4						
t	s'			s'		

Megengedett megoldás keresése 2

	s'	1	2	3	4	t
s'				3		
1			7	9		
2				8	9	3
3					12	
4						
t	s'	4	1	s'	3	2

Út: t,2,1,4,3,s'; folyam =3

Maximális folyam péld



Megengedett megoldás keresése 2

	s'	1	2	3	4	t
s'				0		
1			4	9		
2		3		8	9	0
3	3				9	
4		∞		3		
t			3			

Út: t,2,1,4,3,s'; folyam =3

Megengedett megoldás keresése 2

	1	2	3	4
s'				
1		4	9	
2	3		8	9
3				9
4	∞		3	
t		3		

Út: t,2,1,4,3,s'; folyam =3

Optimális megoldás keresése

út: 4,2,1; folyam=4

	1	2	3	4
1			4	9
2	3		8	9
3				9
4			3	
	5	-1	-1	-2

Optimális megoldás keresése

út: 4,3,1; folyam=9

	1	2	3	4
1			0	9
2	7		8	5
3				9
4		4	3	
	5		-1	-3

Optimális megoldás keresése

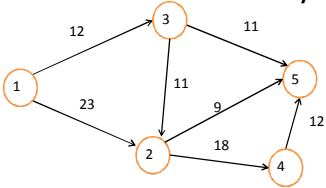
Vágás: 1 és 2,3,4
S={1}
T={2,3,4}

	1	2	3	4
1		0	0	
2	7		8	5
3	9			0
4		4	12	
	5			

Kidolgozott példák a maximális folyam algoritmusra

példa 1

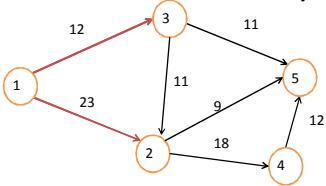
Max folyam 1-5



Keressünk maximális
folyamot 1-ből 5-be

	1	2	3	4	5
1		23	12		
2				18	9
3		11			11
4					12
5					
	-5				

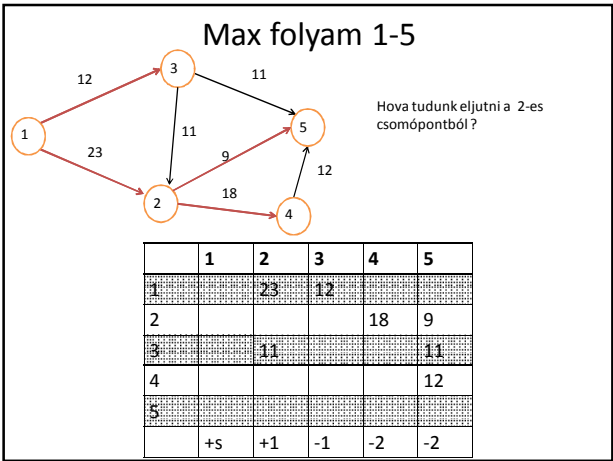
Max folyam 1-5

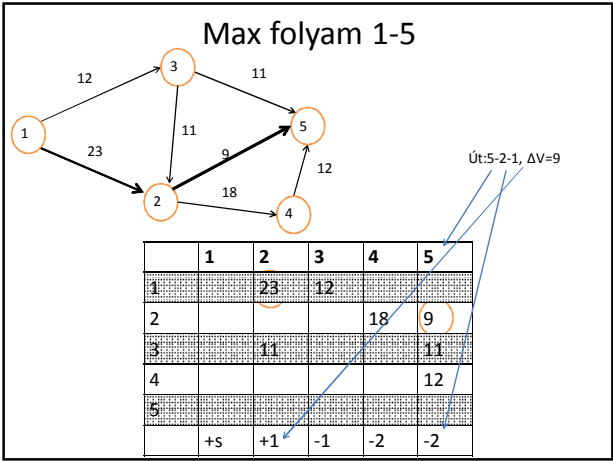


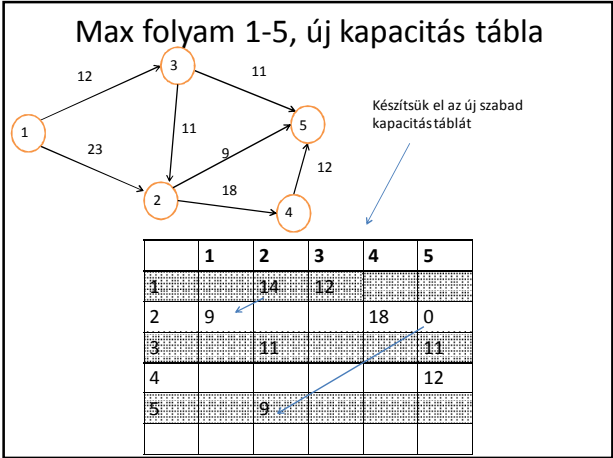
Első lépésként vizsgáljuk
meg, hogy hova tudunk
eljutni az 1-es
csomópontból?
+ már vizsgáltuk a
csomópontból való eljutást
- Még nem vizsgáltuk meg,
hogy hova tudunk eljutni az
adott csomópontból

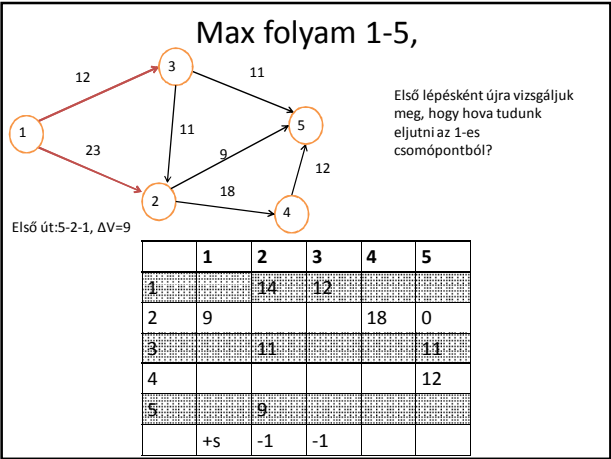
A 2. és a 3.
csomópontba
tudunk eljutni
szabad
kapacitásokon
keresztül az 1-es
csomópontból

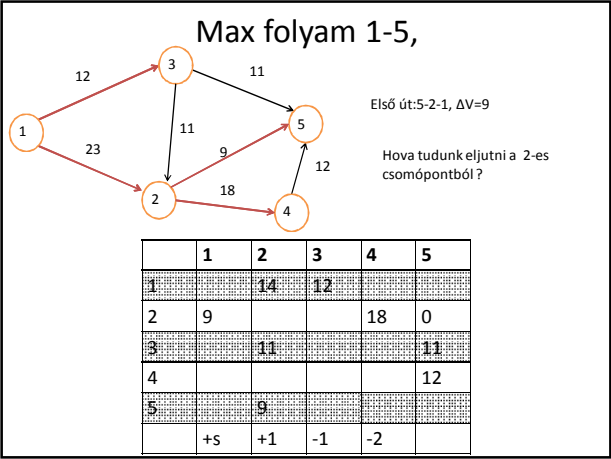
	1	2	3	4	5
1		23	12		
2				18	9
3		11			11
4					12
5					
		+5	-1		

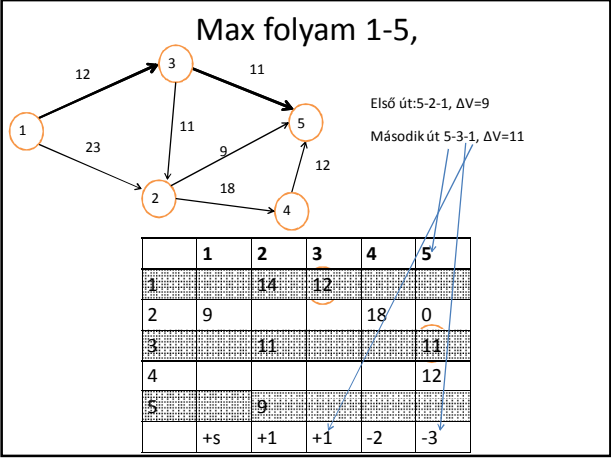


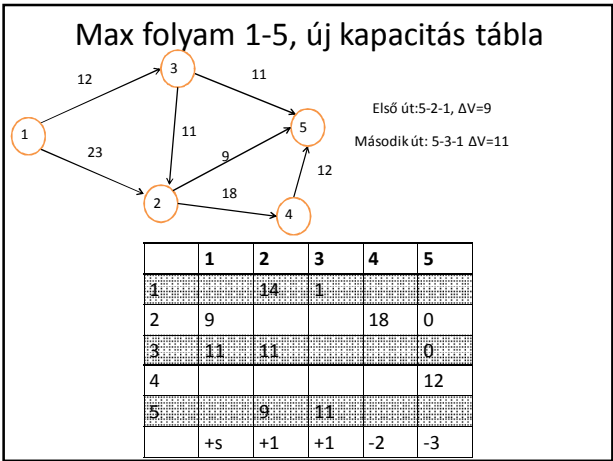


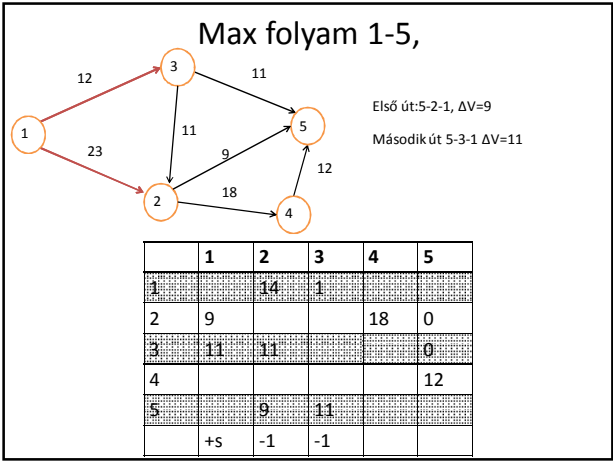


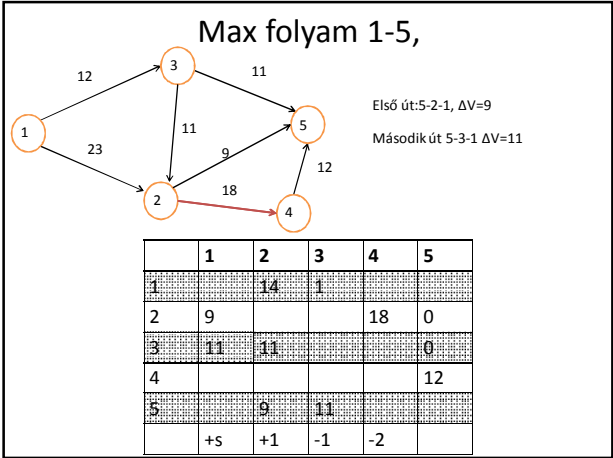


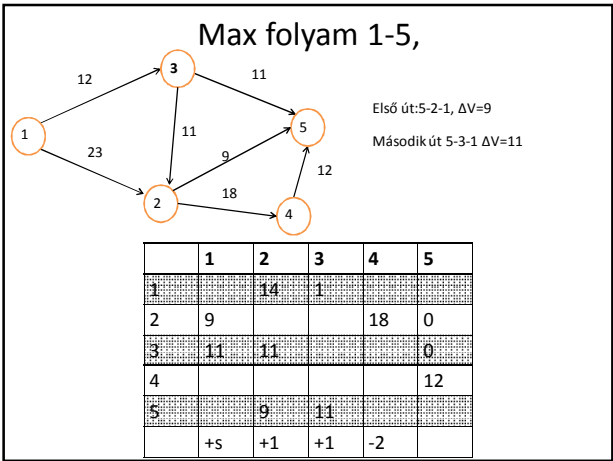


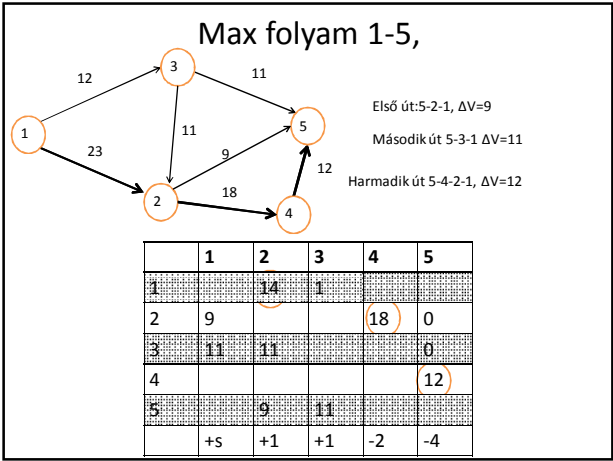


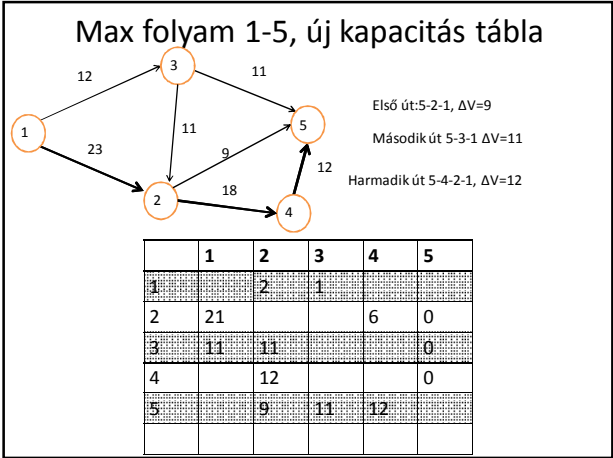


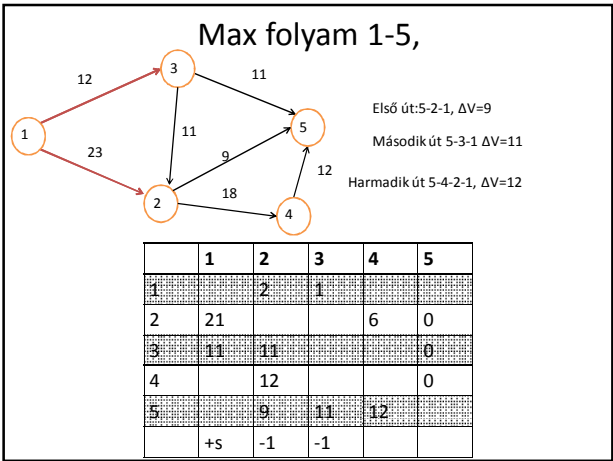


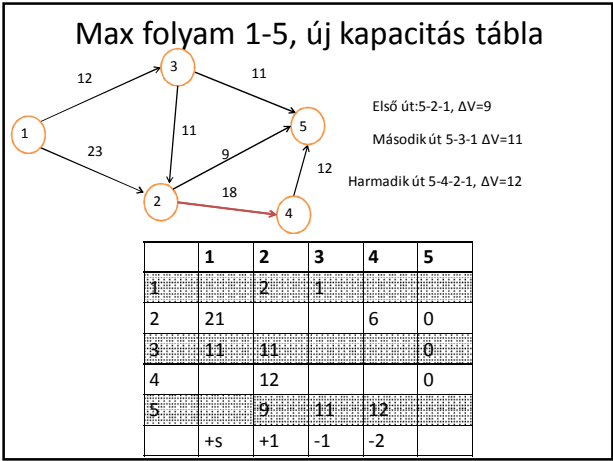


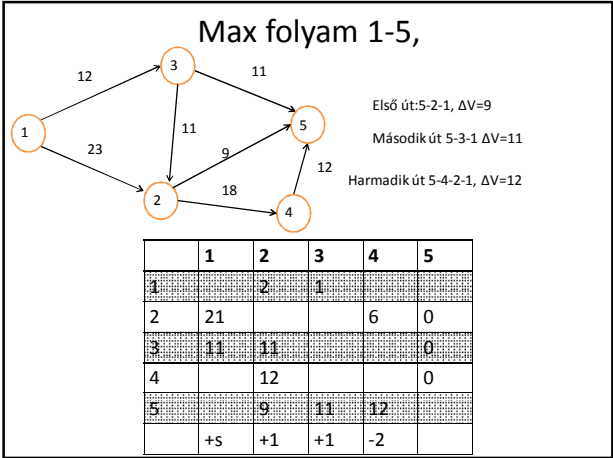


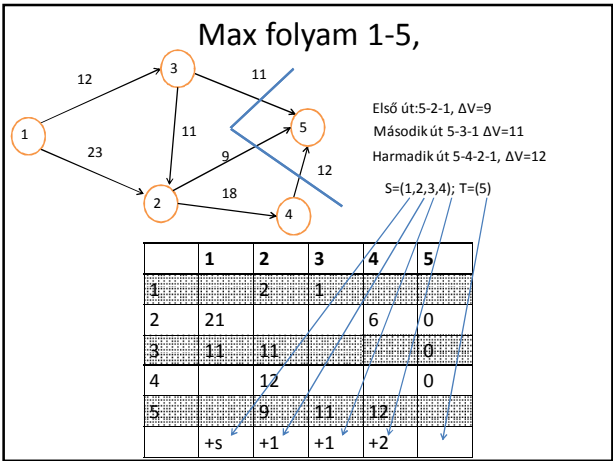


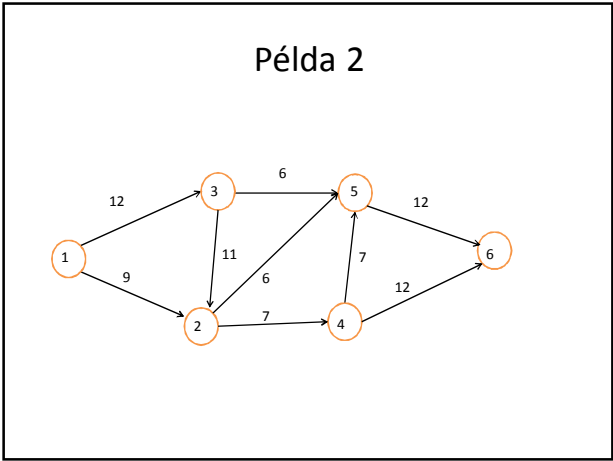


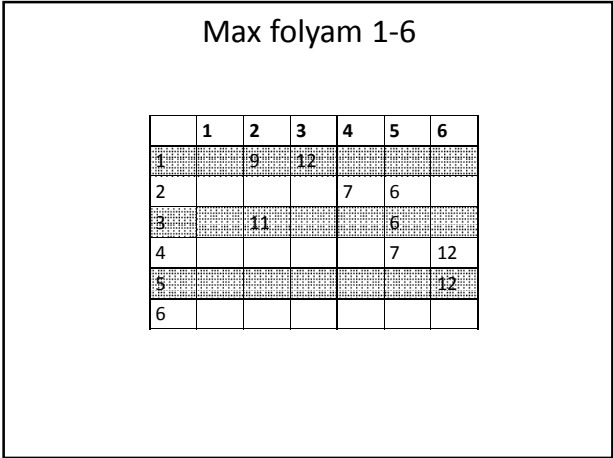












Max folyam 1-6; 1. csomópont

	1	2	3	4	5	6
1		9	12			
2				7	6	
3		11			6	
4					7	12
5						12
6						
	+8	-1	-1			

Max folyam 1-6; 2. csomópont

	1	2	3	4	5	6
1		9	12			
2				7	6	
3		11			6	
4					7	12
5						12
6						
	+8	+1	-1	-2	-2	

Max folyam 1-6; 3. csomópont

	1	2	3	4	5	6
1		9	12			
2				7	6	
3		11			6	
4					7	12
5						12
6						
	+8	+1	+1	-2	-2	

Max folyam 1-6; 5. csomópont

	1	2	3	4	5	6
1		9	12			
2				7	6	
3		11			6	
4					7	12
5						12
6						
	+8	+1	+1	-2	+2	-5

Itt az 5. csomópontból vizsgáltam a továbbjutás lehetőségeit, a 4. csomópont helyett. A maximális folyam értékét ez a választás nem fogja befolyásolni de a folyamrendszer lehet, hogy más lesz.

Max folyam 1-6; út meghatározása

	1	2	3	4	5	6
1		9	12			
2				7	6	
3		11			6	
4					7	12
5						12
6						
	+8	+1	+1	+2	-2	-5

Első út: 6-5-2-1; $\Delta v=6$

Max folyam 1-6; új szabad kapacitás háló

	1	2	3	4	5	6
1		3	12			
2	6			7	0	
3		11			6	
4					7	12
5		6				6
6					6	

Első út: 6-5-2-1; $\Delta v=6$

Max folyam 1-6; növelő út keresése

	1	2	3	4	5	6
1			3	12		
2	6			7	0	
3			11		6	
4					7	12
5		6				6
6					6	
	+s	-1	-1			

Első út: 6-5-2-1; Δv=6

Max folyam 1-6; növelő út keresése

	1	2	3	4	5	6
1			3	12		
2	6			7	0	
3			11		6	
4					7	12
5		6				6
6					6	
	+s	+1	-1	-2		

Első út: 6-5-2-1; Δv=6

Max folyam 1-6; növelő út keresése

	1	2	3	4	5	6
1			3	12		
2	6			7	0	
3			11		6	
4					7	12
5		6				6
6					6	
	+s	+1	+1	-2	-3	

Első út: 6-5-2-1; Δv=6

Max folyam 1-6; növelő út keresése

	1	2	3	4	5	6
1			3	12		
2	6			(7)	0	
3		11			6	
4					7	(12)
5		6				6
6					6	
	+8	+1	+1	+2	-3	-4

Első út: 6-5-2-1; $\Delta v=6$
Második út: 6-4-2-1; $\Delta v=3$

Max folyam 1-6; új szabad kapacitás háló

	1	2	3	4	5	6
1		0	12			
2	9			4	0	
3		11			6	
4		3			7	9
5		6				6
6				3	6	

Első út: 6-5-2-1; $\Delta v=6$
Második út: 6-4-2-1; $\Delta v=3$

Max folyam 1-6; növelő út keresése

	1	2	3	4	5	6
1		0	12			
2	9			4	0	
3		11			6	
4		3			7	9
5		6				6
6				3	6	
	+8		-1			

Első út: 6-5-2-1; $\Delta v=6$
Második út: 6-4-2-1; $\Delta v=3$

Max folyam 1-6; növelő út keresése

	1	2	3	4	5	6
1		0	12			
2	9			4	0	
3		11			6	
4		3			7	9
5		6				6
6				3	6	
	+5	-3	+1		-3	

Első út: 6-5-2-1; $\Delta v=6$
Második út: 6-4-2-1; $\Delta v=3$

Max folyam 1-6; növelő út keresése

	1	2	3	4	5	6
1		0	12			
2	9			4	0	
3		11			6	
4		3			7	9
5		6				6
6				3	6	
	+5	+3	+1	-2	-3	

Első út: 6-5-2-1; $\Delta v=6$
Második út: 6-4-2-1; $\Delta v=3$

Max folyam 1-6; növelő út keresése

	1	2	3	4	5	6
1		0	12			
2	9			4	0	
3		11			6	
4		3			7	9
5		6				6
6				3	6	
	+5	+3	+1	+2	-3	-4

Első út: 6-5-2-1; $\Delta v=6$
Második út: 6-4-2-1; $\Delta v=3$
Harmadik út: 6-4-2-3-1; $\Delta v=4$

Max folyam 1-6; új kapacitás háló

	1	2	3	4	5	6
1		0	8			
2	9		4	0	0	
3	4	7			6	
4		7			7	5
5		6				6
6				7	6	

Első út: 6-5-2-1; $\Delta v=6$
Második út: 6-4-2-1; $\Delta v=3$
Harmadik út: 6-4-2-3-1; $\Delta v=4$

Max folyam 1-6; növelő út keresése

	1	2	3	4	5	6
1		0	8			
2	9		4	0	0	
3	4	7			6	
4		7			7	5
5		6				6
6				7	6	

Első út: 6-5-2-1; $\Delta v=6$
Második út: 6-4-2-1; $\Delta v=3$
Harmadik út: 6-4-2-3-1; $\Delta v=4$

Max folyam 1-6; növelő út keresése

	1	2	3	4	5	6
1		0	8			
2	9		4	0	0	
3	4	7			6	
4		7			7	5
5		6				6
6				7	6	

Első út: 6-5-2-1; $\Delta v=6$
Második út: 6-4-2-1; $\Delta v=3$
Harmadik út: 6-4-2-3-1; $\Delta v=4$

Max folyam 1-6; növelő út keresése

	1	2	3	4	5	6
1		0	8			
2	9		4	0	0	
3	4	7			6	
4		7			7	5
5		6				6
6				7	6	
	+5	+3	+1		-3	

Első út: 6-5-2-1; $\Delta v=6$
Második út: 6-4-2-1; $\Delta v=3$
Harmadik út: 6-4-2-3-1; $\Delta v=4$

Max folyam 1-6; növelő út keresése

	1	2	3	4	5	6
1		0	8			
2	9		4	0	0	
3	4	7			6	
4		7			7	5
5		6				6
6				7	6	
	+5	+3	+1		-3	5

Első út: 6-5-2-1; $\Delta v=6$
Második út: 6-4-2-1; $\Delta v=3$
Harmadik út: 6-4-2-3-1; $\Delta v=4$
Negyedik út: 6-5-3-1; $\Delta v=6$

Max folyam 1-6; új kapacitás háló

	1	2	3	4	5	6
1		0	2			
2	9		4	0	0	
3	10	7			0	
4		7			7	5
5		6	6			0
6				7	12	

Első út: 6-5-2-1; $\Delta v=6$
Második út: 6-4-2-1; $\Delta v=3$
Harmadik út: 6-4-2-3-1; $\Delta v=4$
Negyedik út: 6-5-3-1; $\Delta v=6$

Max folyam 1-6; növelő út keresése

	1	2	3	4	5	6
1		0	2			
2	9		4	0	0	
3	10	7			0	
4		7			7	5
5		6	6			0
6				7	12	
	+5		-1			

Első út: 6-5-2-1; $\Delta v=6$
Második út: 6-4-2-1; $\Delta v=3$
Harmadik út: 6-4-2-3-1; $\Delta v=4$
Negyedik út: 6-5-3-1; $\Delta v=6$

Max folyam 1-6; növelő út keresése

	1	2	3	4	5	6
1		0	2			
2	9		4	0	0	
3	10	7			0	
4		7			7	5
5		6	6			0
6				7	12	
	+5	-3	+1			

Első út: 6-5-2-1; $\Delta v=6$
Második út: 6-4-2-1; $\Delta v=3$
Harmadik út: 6-4-2-3-1; $\Delta v=4$
Negyedik út: 6-5-3-1; $\Delta v=6$

Max folyam 1-6; növelő út keresése

	1	2	3	4	5	6
1		0	2			
2	9		4	0	0	
3	10	7			0	
4		7			7	5
5		6	6			0
6				7	12	
	+5	+3	+1			

Első út: 6-5-2-1; $\Delta v=6$
Második út: 6-4-2-1; $\Delta v=3$
Harmadik út: 6-4-2-3-1; $\Delta v=4$
Negyedik út: 6-5-3-1; $\Delta v=6$

Max folyam 1-6; találtunk egy üres vágást

	1	2	3	4	5	6
1		0	2			
2	9		4	0	0	
3	10	7			0	
4		7			7	5
5		6	6			0
6				7	12	
	+8	+3	+1			

Első út: 6-5-2-1; $\Delta v=6$

Második út: 6-4-2-1; $\Delta v=3$

Harmadik út: 6-4-2-3-1; $\Delta v=4$

Negyedik út: 6-5-3-1; $\Delta v=6$

$S=\{1,2,3\}$
 $T=\{4,5,6\}$

Max folyam értéke 19

Min vágás=Max folyam=19

