Döntéstámogató módszerek

segédlet

Ajánlott irodalom:

R.K. Ahuja, T.L. Magnanti, J.B. Orlin:
Network Flows, Theory, Algorithms, and Applications; Prentice Hall 1993.
Eugene L.Lawler
Kombinatorikus Optimalizálás: hálózatok és matroidok; Műszaki könyvkiadó, Budapest 1982
Klafszky Emil: Hálózati folyamok Budapest, 1969
Hajdu M.-Klafszky E.: Hálós tervezési technikák az építések tervezésében és irányításában. Műegyetemi Kiadó J-85005.

Motíváció

Ezen tantárgy keretein belül olyan modellek elméleti hátterét és gyakorlati alkalmazását vizsgáljuk, amelyek az építőipari beruházás folyamatában előforduló szituációkban hozzásegítik a mérnököt a valamilyen szempontból optimális döntés meghozatalában. Mivel az optimális megoldás a gyakorlatban leginkább a pénzzel mérhető ezért általában a bekerülési költséget szeretnénk minimalizálni vagy a várható hasznot optimalizálni. Azonban sok esetben a feladatok bonyolultsága miatt a pénz nem jelenik meg közvetlenül a modellben, csupán áttételesen, például a projekt átfutási idején keresztül.

Egy építési beruházás során többször felmerülnek az alábbi kérdések.

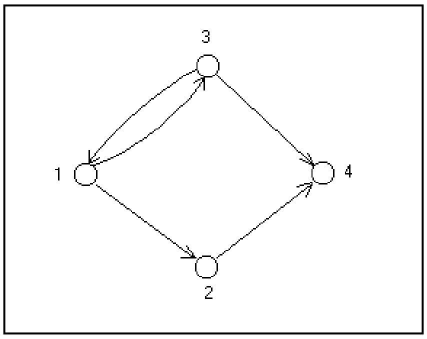
- Mekkora a beruházás legrövidebb átfutási ideje ?
- Mekkora az adott átfutási időhöz tartozó minimális költségű megoldás ?

Lakásépítés során felmerül a kérdés, hogy ki lesz a megcélzott vevőkör és nekik mekkora lakásokat építsünk. A múltbeli tapasztalatokra támaszkodva jogosan vetődik fel a kérdés, hogy van-e összefüggés a vevőkör és a lakás paraméterei között. Erre a kérdésre válaszolhatunk a sztochasztikus függőségi modell segítségével.
Gyakori feladat egy beruházás során, hogy több lehetőség, pályázat, közül válasszunk. A többtényezős értékelés a kiválasztáshoz nyújt segítséget.

1. Jelölések és definíciók

Definíció: („Digráf” irányított élhalmaz vagy hálózat): Jelöljön G=(N,A) egy irányított gráfot, ahol N csomópontok halmaza, A az élek halmaza.
Jelen jegyzetben véges sok pontból álló gráfokról lesz szó.

Például:



Jelölések:

N (node): csomópontok halmaza
N = {1,2,3,4}

A (arc): élek halmaza
A = {(1,2);(1,3);(2,4);(3,4)}.

Definíció: (Irányítatlan élhalmazú gráf és hálózat): Az irányított élhalmazú gráfhoz hasonlóan definiáljuk, azzal a különbséggel, hogy ebben az esetben, ha (i,j) A akkor (j,i) is létező él.

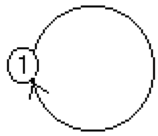
Például:

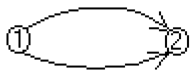
N (node): csomópontok halmaza
N = {1,2,3,4}

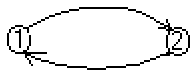
A (arc): élek halmaza
A = {(1,2);(1,3);(2,4);(3,4); (2,1); (3,1);(4,2);(4,3)}.

Hurok él: Olyan él, amelynek kezdő és végpontja azonos.

Hurok élt (1,1) vagy kettős élt (1,2) ; (1,2) nem engedünk meg, de lehet: (1,2) ; (2,1).







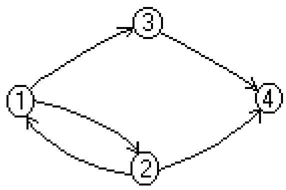
Definíció „séta, vonal, pálya”: (út)
A séta egy olyan pontsorozat, amelyet élek kötnek össze. A pontok ismétlődhetnek.

Definíció „út”: (egyszerű út) (irányított út, directed path)
Legyen [N,A] digráf, és legyen s,t $\in$ N. Legyen $x_0, x_1, \ldots x_{k-1}, x_k, \ldots x_m \in$ N olyan pontsorozat, melyre $x_0 \equiv s$, $x_m \equiv t$ és $(x_{k-1}, x_k) \in$ A minden i = 1, …., m esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy x_0, x_1, …, x_m és egy s-ből t-be vezető út. Az út jelölésére a P = (s=x_0, x_1, …,x_m=t) szimbólumot használjuk. Olyan séta amelyben nincs két azonos pont.

Megjegyzem, hogy a fenti két definíció elnevezése szokásos a zárójelbe tett kifejezésekkel is. Ezek szerint egy pontsorozatot melynek bármely két egymás után következő tagja része az élhalmaznak ha tartalmaz ismétlődést, akkor útnak, ha nem tartalmaz ismétlődést, akkor egyszerű útnak nevezzük.

Minden egyszerű út egyben út is illetve egy irányított hálózatban, ha létezik út akkor létezik egyszerű út is.

A hálózati folyamok témakör szakirodalomában a definíciók, elnevezések igen változatos formát öltenek. Itt és most igyekeztem csak annyi fogalmat definiálni amely a mérnöki menedzsment feladataihoz szükséges.



Út (walk) (1, 2, 1, 3, 4)

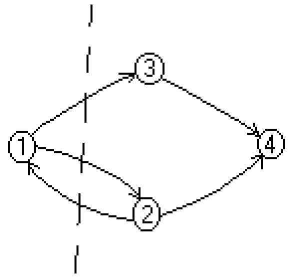
Egyszerű út (path) (1, 3, 4)

Definíció: (kör, ciklus, hurok)
Olyan séta, amelynek a kezdő és végpontja azonos.

Definíció: (egyszerű vagy irányított, kör, ciklus, hurok)
P = (s=x_0, x_1, …,x_m=t) irányított út és a (t,s) él együtt.
Egyszerű (kör, ciklus, hurok), ha ezen kívül a pontsorozatban nincs ismétlődés.

Minden egyszerű hurok egyben hurok is illetve egy irányított hálózatban, ha létezik hurok akkor létezik egyszerű hurok is

Definíció: ((S,T) Vágás) Legyen [N, A] digráf és osszuk az N ponthalmazt az S, T diszjunkt (két halmaz metszete zérus) két nem üres halmazra. Jelöljük (S, T) –vel azon élek összességét, amelyek S-ből indulnak és T -be érkeznek. Az (S, T) élhalmazt az [N, A] digráf (S, T) *vágásának* nevezzük. Ha s, t∈N pontok olyanok, hogy s∈S és t∈T, akkor azt mondjuk, hogy (S, T) vágás az s, t pontokat elválasztja. (S, T) vágás : [(1, 3); (1, 2)]



Feltételezések:
- A bemenő paraméterek egész számok.
- A hálózat tartalmaz irányított utat s-ből a G gráf minden más pontjába.

Tervütem háló, (háló): Egy [N,A] digráfot tervütemhálónak nevezünk, ha létezik s∈N kezdőpont és t∈N végpont úgy, hogy bármely i∈N-re van út s-ből i-be és i-ből t-be.

Negatív hurok, zérus hurok, pozitív hurok: Legyen adott az [N,A] háló és az éleihez rendelt τ_{ij} egész szám. Ha egy hurok éleihez rendelt számokat összeadva negatív számot , zérust, pozitív számot kapunk, akkor hurkot negatív huroknak, zérus huroknak vagy pozitív huroknak nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy tervütem háló esetén a pozitív hurok nem megengedett, mert akkor a leghosszabb út végtelen nagy lenne.

2. Út, vágás egy irányított élhalmazban

Vágás és út dualitási tétel (Minty):

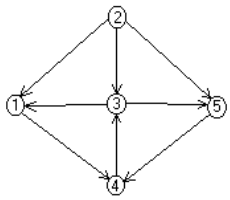
Legyen [N, A] digráf és legyen s, t∈N. Ekkor az alábbi két állítás közül csak az egyik igaz.

Tétel**:**
1. vagy van út s-ből t-be vagy
2. van olyan (S, T) vágás, amely üres és s∈S, t∈T

Bizonyítás: (konstruktív)

Konstruáljuk meg az S halmazt a következő módon legyen s∈S, és legyen j∈S, ha van olyan i∈S, amelyre ∀ij∈A. Tehát kezdetben az S halmaz álljon a s pontból, majd bővítsük az S halmazt oly módon, hogy minden pontot, amelyre igaz, hogy van él S-ből T-be vonjuk be. Az eljárás azzal ér véget, hogy vagy t∈S ekkor van út, vagy t∈T, ekkor úttal nem érhető el a t pont s-ből, azaz van (S, T) üres vágás.

1. Feladat: Keressünk utat 1-ből 5-be!



	+s		+4	+1	-3

	1	2	3	4	5
1				X	
2	X		X		X
3	X				X
4			X		
5				X	

Megoldás: Először elkészítjük az ún. struktúramátrixot. 1-ből indulunk, így az 1-hez tartozó rekeszbe beírjuk a kezdőpont jelét: „-s”. Hogy az ismétlődést elkerüljük, jelölnünk kell azt, ha egy pontot már vizsgáltunk. Ezt a címkézés előjelezésével oldjuk meg. Ha egy pontba eljutunk, akkor „negatív” címkével látjuk el, és ha ebből a pontból tovább mentünk, ahová csak lehetett, akkor a címkét pozitívra változtatjuk át. A 0. lépésben az „s” pont rekeszébe a –s címkét tesszük. Megnézzük 1-ből hova tudunk eljutni, mehetünk 4-be, a 4-hez tartozó rublikába beírjuk (-1), mivel máshova nem tudunk menni 1-ből, így átírjuk a (-s)-t (+s)-re; megnézzük 4-ből hova tudunk menni, 3-ba, tehát beírjuk a 3-as rublikába (-4), és mivel máshova nem tudunk menni, ezért átírjuk a (-1)-et (+1)-re; nézzük 3-ból hova tudunk menni, mehetünk 1-be, de ott már voltunk, tehát ezzel nem foglalkozunk, de mehetünk 5-be, ahova beírjuk (-3); mivel 5 volt a cél, ezért a feladat kész, már csak az utat kell felírnunk; legegyszerűbb módja, ha visszafelé haladunk.

Út: ***5 – 3 – 4 – 1***

2. Feladat: Az előbbi digráfon keressünk utat 4-ből 2-be.

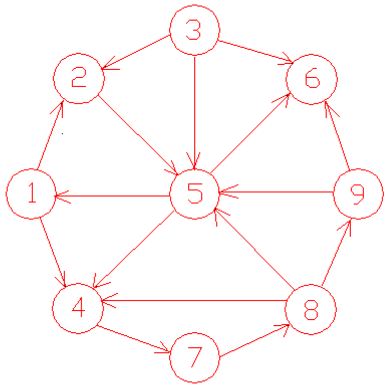
	+3		+4	+s	-3

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1				X	
2	X		X		X
3	X				X
4			X		
5				X	

Elakadtunk, találtunk egy vágást, tehát nincs út 4-ből 2-be.

S=(1,3,4,5) T=(2) Nincs él S-ből T-be.

3. feladat: Keressünk utat s=1-ből t=9-be.



	+s	+1		+1	-2		+4	+7	-8
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1		X		X					
2					X				
3		X			X	X			
4							X		
5	X			X		X			
6									
7								X	
8				X	X				X
9					X	X			

Út 1-ből 9-be: ***9 – 8 – 7 – 4 – 1***

4. feladat

Ugyanaz, mint fent. Keressünk utat 7-ből 2-be!

	+5	-1		+8	+8	+5	+s	+7	+8
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1		X		X					
2					X				
3		X			X	X			
4							X		
5	X			X		X			
6									
7								X	
8				X	X				X
9					X	X			

Út 7-ből 2-be: ***2 – 1 – 5 – 8 – 7***

3. Maximális út – minimális potenciál

A maximális út minimális potenciál az építésberuházás egy alapfeladatának az időtervezési feladatnak a matematikai terminológiája. A feladatot matematikailag együtt lehet kezelni a minimális út maximális potenciál feladattal, amely először úthálózaton felvetett problémára lett kidolgozva. A feladatot az 50-es években vetették fel és az első matematikai cikk 1956-ban Ford.,L.R. munkája. Természetesen a digráfra tett feltevések folyamatosan enyhültek, így kezdetben még feltétel volt az is, hogy a háló hurokmentes és pozitív élhosszúságú legyen.

Tervütem háló, (háló): Egy [N,A] digráfot tervütemhálónak nevezünk, ha létezik $s\in N$ kezdőpont és $t\in N$ végpont úgy, hogy bármely $i\in N$-re van út s-ből i-be és i-ből t-be.

A tervütemezési feladat során keressük egy építési beruházás átfutási idejét (leghosszabb utat s-ből t-be vagy a kritikus utat), és az egyes tevékenységek legkorábbi és legkésőbbi lehetséges bekövetkezési idejét (leghosszabb út s-ből az adott tevékenységig illetve a leghosszabb út t-ből az adott tevékenységig), továbbá a tevékenységhez tartozó úgynevezett tartalékidőket. Műszaki feladatunkat matematikailag az alábbi primál duál párban fogalmazzuk meg.
Innentől kezdve tervütem hálókkal foglalkozunk.
Az alább tárgyalt modellben a hurok és a negatív élhosszúság megengedett.

Primál:
Adott (N,A,τ) hálózaton keresendő azon $P(s,t) = \{s=x_1, \ldots, x_m=t\}$ út, amelyre $\tau(P(s,t)) = \sum_{ij\in P} \tau_{ij}$ maximális.

Duál:

Adott (N,A,τ) hálózaton keresendő azon μ potenciálrendszer, amelyre
$\mu_s = \emptyset$,
$\mu_j - \mu_i \geq \tau_{ij}\ \forall ij\in A$ (*)
és μ_t minimális.

Lemma:

Jelölje $\mu_j\ \forall j\in N$-re valamely út hosszát s-ből j-be.(1)
Ebben az esetben $\mu_j\ \forall j\in N$-re, a leghosszabb út (s-ből j-be) (2), akkor és csak akkor, ha $\mu_j - \mu_i \geq \tau_{ij}\ \forall ij\in A$ (3).

Bizonyítás:
I. Feltéve (1)-et ha (3) igaz, akkor (2) is igaz illetve
II. Feltéve (1)-et ha (2) igaz, akkor (3) is igaz.

I. bizonyítás
$\tau(P(s,t))$ tetszőleges út hossza s-ből t-be

$$\tau(P(s,t)) = \sum_{ij\in P} \tau_{ij} \leq \mu_{x2} - \mu_{x1} + \mu_{x3} - \mu_{x2} + \ldots \mu_{xk} - \mu_{xk-1} + \ldots + \mu_{xm} - \mu_{xm-1} = \mu_j \quad (**)$$

Mivel μ_j egyrészt valamely út hossza másrészt nagyobb egyenlő mint akármelyik út hossza ezért szükségképpen μ_j a leghosszabb út hossza. (μ_j $\forall j \in N$ a leghosszabb út hossza s-ből j-be)

I. Következménye: Ha a célfüggvények optimálisak, akkor egyenlőség áll fenn (**)-ban.
II. bizonyításában egy a II. állítással ekvivalens állítást bizonyítunk, nevezetesen: Feltéve (1)-et ha (3) nem igaz, akkor (2) sem igaz.

(1)és $\mu_j - \mu_i < \tau_{ij} \Rightarrow \mu_j$ nem a leghosszabb.
Tegyük fel, hogy μ_i a leghosszabb út hossza s-ből i-be és jelölje $\tau(P(s,i))$ a leghosszabb utat. Ekkor I. szerint
$\tau(P(s,i)) = \sum_{ij \in P(s,i)} \tau_{ij} = \mu_i$ továbbá μ_j legyen valamely út hossza s-ből j-be és
$\mu_j - \mu_i < \tau_{ij}$ de ekkor

$\tau(P(s,j)) = \sum_{ij \in P(s,i)} \tau_{ij} + \tau_{ij} > \mu_j$, azaz μ_j nem a leghosszabb út hossza s-ből j-be.

II. Következménye: Ha egyenlőség áll fenn (**)-ban akkor a célfüggvények optimálisak.

Algoritmus:

Kiindulás: $\mu_s=0$ $s \in S$ és $\mu_j=-\infty$ egyébként

Menjünk végig a digráf minden csomópontján. Ha $\mu_j < \tau_{ij} + \mu_i$ $\forall ij \in A$-ra, akkor $\mu_j := \tau_{ij} - \mu_i$, ahol $i \in S$.
Az algoritmus véges lépésben véget ér mert vagy (*) teljesül minden élre, vagy valamely potenciálérték tart a végtelenhez, azaz a leghosszabb út végtelen.

Az eredményekből kapható információk

Definíció: A legkorábbi potenciálrendszer (időpolitika) $\underline{\mu}_j$ $\forall j \in N$ a leghosszabb út s-ből j-be $\forall j \in N$.
Minden olyan tevékenység, amely a j-ből indul, legkorábban a $\underline{\mu}_j$ időpontban kezdődhet.
Definíció: A legkésőbbi potenciálrendszer (időpolitika) $\overline{\mu}_j$ $\forall j \in N$ az átfutási idő $\overline{\mu}_t$ mínusz a leghosszabb út t-ből j-be $\forall j \in N$.
Minden olyan tevékenység, amely a j-be érkezik, legkésőbben $\overline{\mu}_j$ időpontban be kell, hogy fejeződjön.

Kritikus esemény: olyan csomópont, amelyhez tartozó legkorábbi és legkésőbbi potenciál megegyezik.

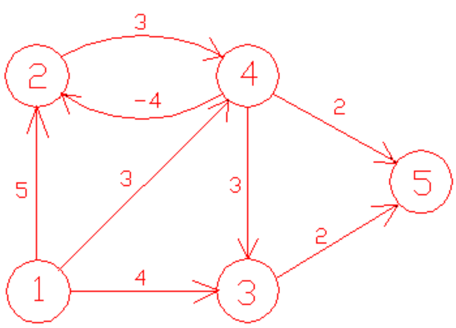
Kritikus út: a leghosszabb út s-ből t-be.

Az ij tevékenység tartalékidői:
Teljes tartalékidő: $\overline{\mu}_j - \underline{\mu}_i - \tau_{ij}$
Független tartalékidő: $\underline{\mu}_j - \overline{\mu}_i - \tau_{ij}$
Szabad tartalékidő: $\underline{\mu}_j - \underline{\mu}_i - \tau_{ij}$
Feltételes tartalékidő $\overline{\mu}_j - \overline{\mu}_i - \tau_{ij}$

Az ij tevékenység lehetséges legkorábbi befejezése $\underline{\mu}_i + \tau_{ij}$.
Az ij tevékenység lehetséges legkésőbbi kezdete $\overline{\mu}_j - \tau_{ij}$.

Kritikus tevékenységnek nevezzük azt a tevékenységet, amelynek teljes tartalékideje 0. A kritikus út csak kritikus tevékenységekből áll.

Feladat: Keressünk maximális utat 1-ből 5-be az alábbi hálón!



legkorábbi

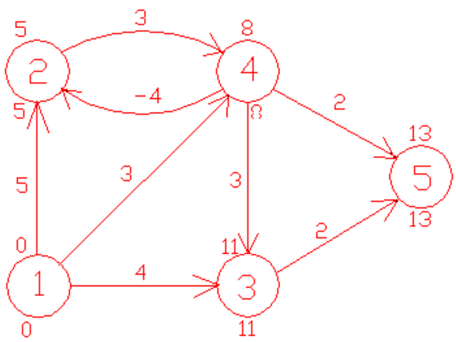
		0	0
		5	5
		11	(4)11
		8	(3)8
		13	(6)10

$\overline{\mu}_5$ = 13 – 0 = 13 $\overline{\mu}_4$ = 13 – 5 = 8 $\overline{\mu}_3$ = 13 – 2 = 11

$\overline{\mu}_2$ = 13 – 8 = 5 $\overline{\mu}_1$ = 13 – 13 = 0

Feladatok:

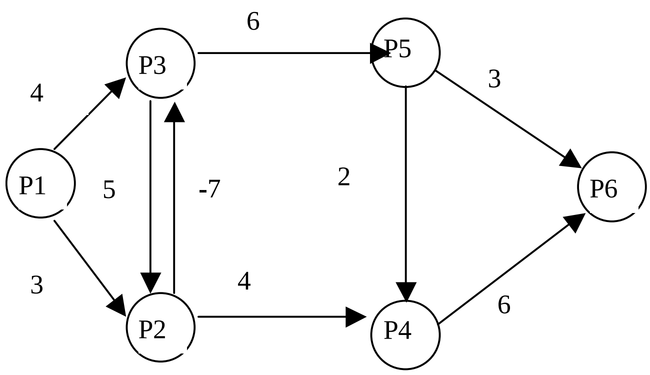
1. Keressen maximális utat 1-ből 6-ba. Határozza meg a legkorábbi és legkésőbbi időpolitikát.



13	8	2	5	0
(5)(6)10	5	2	(2)5	0

legkésőbbi

	1	2	3	4	5
1		5	4	3	
2				3	
3					2
4		-4	3		2
5					



2. Ábrázolja háló segítségével az alábbi tevékenységeket és kapcsolatokat majd keressen utat a kezdőpontból a végpontba és határozza meg a legkorábbi és legkésőbbi időpolitikákat. A tevékenységek nem megszakíthatóak.

a. Családi ház építését 3 tevékenységre bontjuk. Alapozás 4 nap, Szerkezetépítés 6 nap, befejező munkák 5 nap.

b. Egy útépítés során a földkiemelés 5 nap, útalapozás 4 nap aszfaltozás 5 nap. A tevékenységek legalább 1 nap távolságra kell, hogy legyenek egymástól. Határozza meg a minimális átfutási időt.

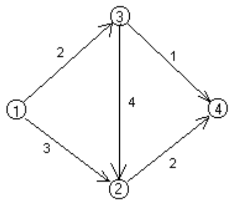
c. Egy útépítés során a földkiemelés 5 nap, útalapozás 4 nap aszfaltozás 5 nap. A tevékenységek maximum 4 nap távolságra lehetnek egymástól. Határozza meg a minimális átfutási időt.

d. Egy útépítés során a földkiemelés 5 nap, útalapozás 4 nap, aszfaltozás 5 nap. A tevékenységek legalább 1 de legfeljebb 4 nap távolságra lehetnek egymástól. Határozza meg a minimális átfutási időt.

e. Egy útépítés során a földkiemelés 5 és 7 nap között, az útalapozás 3-6 nap között, az aszfaltozás 5 és 7 nap között lehet. A tevékenységek legalább 1 de legfeljebb 4 nap távolságra kell, hogy lehetnek egymástól. Határozza meg a minimális átfutási időt.

4. Minimális út – maximális potenciál

A minimális út feladat megoldása címkézési technikával először Ford és Minty dolgozatában szerepelt.
Adott [N, A] digráf éleihez rendeljünk egy τ_{ij} számot.
Definíció: (út hossza) P (x_0, …, x_{k-1}, x_k, …, x_t) = $\sum_{ij\in P}\tau_{ij}$



N = {0, 1, 2, 3, 4}
A = {(1,2); (1,3); (2,4); (3,2);(3,4)}
$\tau_{1,2} = 3$; $\tau_{1,3} = 2$; ….
μ_1 , μ_2 , μ_3 , μ_4

Feltételezések

A hálózat irányított.
Minden élhossz egész szám.
A hálózatban nincs negatív kör – negatív ciklus-azaz negatív hosszúságú irányított ciklus, de pozitív kör lehet.

A fenti feltételezésekkel történetileg az alábbi **feladatokat** definiálták a digráfon.

1. Keressük meg a legrövidebb utat egy csomópontból az összes többibe nemnegatív élhosszúságú hálón.
2. Keressük meg a legrövidebb utat egy csomópontból az összes többibe tetszőleges élhosszúságú hálón.
3. Keressük meg a legrövidebb utat minden pontból minden pontba.

A továbbiakban az 1. feladattal foglalkozunk.

<u>*Primál feladat*</u>: Keresendő olyan út az s, t pontok között,
P = { $s=x_0$, x_1, …, $t=x_n$} , amelyre
$\tau(P) = \sum_{ij\in P}\tau_{ij}$ érték minimális.

<u>*Duál feladat:*</u> Tegyük fel, hogy az s pontban van egy egységnyi áru, melyet t pontba akarunk elszállítani, az [N, A] digráf élei mentén, ahol a szállítási költségeket jelölje τ_{ij} . Tegyük fel, hogy az árut a „termelőnek” kell elszállítania. Jön egy „szállító”, aki a termelőnek a következő árajánlatot teszi. Minden $i\in N$ ponthoz ad egy értéket, amennyiért ő abba a pontba szállítja az árut. Jelöljük ezt μ_i – vel. A szállító, hogy ajánlata elfogadható legyen, olyan μ_i szállítási értékeket adhat meg, melyekre:

$$\left.\begin{array}{l}\mu_s = 0\\ \mu_j - \mu_i \le \tau_{ij} \quad \forall ij \in A\end{array}\right\}$$

*

A szállítónak az a célja, hogy bevételét maximalizálja, azaz
μ_t maximális legyen.

Keresendő olyan potenciálrendszer, amelyre a * teljesül és μ_t maximális.

Alaplemma: Adott [N, A, τ] hálózatban az s, t pontok között tetszőleges P útra és *-ot teljesitő μ rendszerre igaz, $\tau(P) \geq \mu_t$ és egyenlőség akkor és csak akkor ha $\mu_j - \mu_i = \tau_{ij}$ $\forall ij \in P_{ath}$

Bizonyítás:

$\tau(P) = \sum_{ij \in P} \tau_{ij} \geq \sum_{ij \in P} (\mu_j - \mu_i) = \mu_{x2} - \mu_{x1} + \mu_{x3} - \mu_{x2} + \mu_{x4} - \mu_{x3} +.+ \mu_{xm} - \mu_{xm-1} = = \mu_{xm} - \mu_{x1} = \mu_t - \mu_s$ de $\mu_s = \varnothing$

$\tau(P) \geq \mu_t$

Következmény: Ha az [N, A, τ] hálózaton $\tau(P) = \mu_t$, akkor $\tau(P)$ és μ_t optimálisak.

Feladat:

Bizonyítsa be, hogy az alábbi algoritmus a minimális út maximális potenciál feladatpárt oldja meg.

Algoritmus:
Kiindulás: $\mu_s=0$ $s \in S$ és $\mu_j=+\infty$ egyébként
Menjünk végig a digráf minden csomópontján. Ha $\mu_j > \tau_{ij} + \mu_i$ $\forall ij \in A$-ra, akkor $\mu_j := \tau_{ij} - \mu_i$, ahol $i \in S$.
Az algoritmus véges lépésben véget ér mert vagy (*) teljesül minden élre, vagy valamely potenciálérték tart a negatív végtelenhez, azaz a legrövidebb út végtelen.

Feladatok a minimális út maximális potenciál feladatra:

1. Személyek időtervezése (Clark Hastings 1977)
Egy építőipari vállalat munkájához havonta az alábbi számú acélszerelő szakmunkás szükséges.

Hónap	Május	Június	Július	Augusztus	Szeptember	Október
Szakm. száma	3	5	7	5	3	4

Tegyük fel, hogy a szakmunkások ütemezése havi bontásban történik, és áprilisban már 2 szakmunka a helyszínen van és Novemberben is 2 marad a munkahelyen.
A munkások alkalmazásához tartozó költségek: 10 ezer forint havonta és személyenként illetve 15 ezer forint a munkás áthelyezése egy másik munkahelyre. Csak 2 munkást tud a cég egyszerre munkába állítani a hónap elején és a munkások legfeljebb egyharmadát tudja a hónap végén áthelyezni. A vállalat havi 20 ezer forintért tud munkást szerezni és 20 ezer forintot kell fizetnie a túlmunkáért havonta személyenként. A túlmunka nem lehet több mint 25%-a normál munkaidőnek.
Keressük meg a munkások foglalkoztatásának minimális költségű megoldását, a legrövidebb út modell felhasználásával.

2. Személyek időtervezése II.
Egy építőipari vállalat munkájához havonta az alábbi számú acélszerelő szakmunkás szükséges.

Hónap	Május	Június	Július	Augusztus
Szakm. száma	3	5	2	6

Tegyük fel, hogy a szakmunkások ütemezése havi bontásban történik, és áprilisban már 2 szakmunkás a helyszínen van és Novemberben is 2 marad a munkahelyen.
A munkások alkalmazásához tartozó költségek: 100 ezer forint havonta és személyenként illetve 150 ezer forint a munkás áthelyezése egy másik munkahelyre. Csak 2 munkást tud a cég egyszerre munkába állítani a hónap elején és a munkások legfeljebb egyharmadát tudja a hónap végén áthelyezni. A vállalat havi 20 ezer forintért tud munkást szerezni és 20 ezer forintot kell fizetnie a túlmunkáért havonta személyenként. A túlmunka nem lehet több mint 25%-a normál munkaidőnek.
Keressük meg a munkások foglalkoztatásának minimális költségű megoldását, a legrövidebb út modell felhasználásával.

3. Adott 2 csomópont N=1,2 és két él a csomópontok között A=(1,2);(2,1).

Legyen

$$5 \geq \mu_2 - \mu_1 \geq 1.$$

Mit mondhatunk a maximális és minimális út hosszáról ebben a hálózatban?

5. Maximális folyam – minimális vágás

Adott [N, A] digráf (irányított élhalmaz), az élein értelmezett és adott $k_{ij} \geq 0 \ \forall ij \in A$ egész szám.

Feltételek:
- Ha van $ij \in A$ és $ji \notin A$ akkor legyen $ji \in A$, $k_{ji} \equiv \varnothing$.
- Nincs olyan út s-ből t-be, amelyik csak végtelen kapacitású éleken vezetne keresztül.

Legyen f_{ij} folyam az [N, A, k] – n értelmezett függvény, amelyre $0 \leq f_{ij} \leq k_{ij}$, $\forall ij \in A$.

Keresendő olyan v folyam érték, hogy

’v’ maximális, feltéve, hogy

$$\sum_{ij\in A} f_{ij} - \sum_{ji\in A} f_{ji} = \begin{Bmatrix} \text{v, ha i} = \text{s} \\ \text{0, ha i} \in \text{N} \setminus \text{s, t} \\ \text{- v, ha i} = \text{t} \end{Bmatrix}$$

$$0 \leq f_{ij} \leq k_{ij}, \ \forall ij \in A$$

Definíció: Az [N, A, k] hálózatban legyen (S, T) egy vágás. A $k(S,T) = \sum_{ij\in S,T} k_{ij}$ értéket a vágás kapacitásának nevezzük. Az összes s, t pontokat elválasztó vágások közül a legkisebb kapacitásút az s, t pontokra vonatkozó minimális vágásnak nevezzük.

Definíció: Szabad kapacitás hálózat (residual capacity)
Az éleken értelmezett olyan többlet folyam, amely azt fejezi ki, hogy – feltéve, hogy $\forall ij \in A$ - a digráf i-edik csomópontjából j-be mennyi folyamot tudunk még átküldeni az
(i, j) (j, i) élek felhasználásával.

$$r_{ij} = k_{ij} - f_{ij} + f_{ji}$$

$r_{ij} = 0$ akkor és csak akkor ha $k_{ij} = f_{ij}$ és $f_{ji} = 0$.

A szabad kapacitás hálózatot a maximális folyam feladat megoldására szolgáló algoritmusban használjuk.

Alaplemma: Adott [N, A, k] hálózaton tetszőleges folyam (v) és tetszőleges vágás (S, T) között fennáll a következő kapcsolat:

$$v \leq \sum_{\forall ij\in(S,T)} k_{ij}$$

Bizonyítás: $v = \sum_{i\in S} \left(\sum_{ij\in A} f_{ij} - \sum_{ji\in A} f_{ji} \right)$

$$v = \sum_{ij \in ST} f_{ij} - \sum_{ji \in TS} f_{ji} \qquad (*)$$

mivel a jobboldal két tagjára

$$\sum_{ij \in (S,T)} f_{ij} \le \sum_{ij \in (S,T)} k_{ij} \text{ és } \sum_{ji \in TS} f_{ji} \ge 0$$

ezért a bizonyítani kívánt egyenlőtlenség $v \le \sum_{ij \in (S,T)} k_{ij}$ fennáll.

Lemma: Az [N, A, k] hálózaton értelmezett tetszőleges v értékű f folyamra fennáll, hogy minden Δv többletfolyam s-ből t-be kisebb-egyenlő akármelyik (s,t) vágás szabad kapacitásánál a szabad kapacitás hálózatban.

Bizonyítás:
Az alaplemma szerint

$$v + \Delta v \le \sum_{\forall ij \in (S,T)} k_{ij} \quad (**)$$

(**)-(*)

$$\Delta v \le \sum_{ij \in (S,T)} k_{ij} - \sum_{ij \in (S,T)} f_{ij} + \sum_{ij \in (T,S)} f_{ij} \qquad \text{és } \sum_{ij \in (T,S)} f_{ij} = \sum_{ji \in (T,S)} f_{ji}$$

felhasználva, hogy $r_{ij} = k_{ij} - f_{ij} + f_{ji}$, következik, hogy

$$\Delta v \le \sum_{ij \in (S,T)} r_{ij}$$

Ezzel a bizonyítás végére értünk.

Tétel: a., egy [N, A, k] hálózaton létezik olyan f folyam, amelyre v maximális és amelyre v egyenlő a hálózatban lévő minimális kapacitású vágással.

b., egy f folyam akkor és csak akkor maximális v értékű, ha a szabad kapacitású hálózatban nincs növelő út s-ből t-be.

c., a feladatnak mindig létezik egészértékű (f) optimális megoldása.

Bizonyítás:

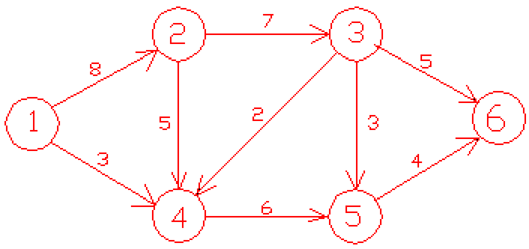
Adott [N, A, k] hálózat. Legyen f = ∅.

Keressünk növelő utat a szabadkapacitás hálózatban. Legyen az úton a legkisebb kapacitás r_{min}. Ezen az úton legyen f = f+r_{min}. Konstruáljunk egy új szabad kapacitás hálózatot.

Ha nincs növelő út, akkor van olyan (ST) vágás, amelyre $ij \in ST$, $r_{ij} = 0$, ($k_{ij} = f_{ij}$) $f_{ji} = 0$.

Mivel $\Delta v = \sum_{ij \in (S,T)} r_{ij} = 0$, ezért v maximális folyam. Illetve, ha v maximális folyam, akkor nincs út a s-ből t-be a szabad kapacitás hálózatban, azaz létezik üres vágás a szabad kapacitás hálóban. Ebben a vágásban az eredeti háló minden kapacitása telített.

Feladat:
Keressünk maximális folyamot 1-ből 6-ba!



	+s	+1	-2	-1	-3	-3

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1		**<u>8</u>**		3		
2			**<u>7</u>**	5		
3				2	3	**<u>5</u>**
4					6	
5						4
6						

Út: **6 – 3 – 2 – 1**
k_{min} = 5 **Δv** = 5

	+s	+1	+2	+1	+3	-5

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1		**<u>3</u>**		3		
2	*5*		**<u>2</u>**	5		
3		*5*		2	**<u>3</u>**	0
4					6	
5						**<u>4</u>**
6			*5*			

Út**: 6 – 5 – 3 – 2 – 1**
Δv = 2
v = 7

Út: **6 – 5 – 4 – 1**
Δv = 2
v = 9

	+s	+1		+1	+4	-5

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1		1		**<u>3</u>**		
2	*7*		0	5		
3		*7*		2	1	0
4					**<u>6</u>**	
5			2			**<u>2</u>**
6			*5*		*2*	

	+s	+1	-5	+1	-4	

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1		1		1		
2	*7*		0	5		
3		*7*		2	1	0
4	*2*				4	
5			*2*	*2*		0
6			*5*		*4*	

Nincs út 1-ből 6-ba. Az algoritmus leáll. Tehát marad az előző lépésben meghatározott érték.
Maximális folyam 1-ből 6-ba:

v = 9

6. A maximális folyam, minimális vágás feladat kiterjesztése (több forrással és több nyelővel rendelkező hálózatok)

Maximális folyam feladat
Adott N,A,k hálózatot egészítsük ki egy minden csomóponthoz adott b_i értékkel, feltéve, hogy $\sum_{i \in N} b_i = 0$. Az így kapott hálózatot jelölje G.

Feladat: keresendő olyan v folyam érték, hogy

’v’ maximális, feltéve, hogy

$$\sum_{ij \in A} f_{ij} - \sum_{ji \in A} f_{ji} = \begin{Bmatrix} \mathrm{v, ha\ i = s} \\ \mathrm{b_i, ha\ i \in N \setminus s, t} \\ \mathrm{- v, ha\ i = t} \end{Bmatrix}$$

$$0 \le f_{ij} \le k_{ij}, \quad \forall \mathrm{ij} \in \mathrm{A}$$

A feladat megoldását két lépcsőben kapjuk meg. Először megengedett megoldást keresünk. Ehhez a hálózatot cirkulációvá alakítjuk egy új (t,s) él bevezetésével, amelynek alsó kapacitása 0, felső kapacitása végtelen. Keressünk megengedett megoldást a maximális folyam algoritmus segítségével. Ha létezik megoldása az első lépcsőnek, akkor újra alkalmazva egy maximális folyam algoritmust kapjuk a feladat optimális megoldását.

Megengedett folyam keresése:

Feladat: keresendő olyan f folyamrendszer, hogy

$$\sum_{ij \in A} f_{ij} - \sum_{ji \in A} f_{ji} = \mathrm{b_i, ha\ i \in N}$$

$$0 \le f_{ij} \le k_{ij}, \quad \forall \mathrm{ij} \in \mathrm{A}$$

Megoldás:

Minden $b_i > 0$ –ra egészítsük ki a G hálózatunkat egy (s,i) éllel, ahol s új csomópont $k_{s,i} := b_i$.

Minden $b_i < 0$ –ra egészítsük ki a G hálózatunkat egy (i, t) éllel $k_{i,t} = - b_i$

Az így kibővített hálózaton keressünk maximális folyamot s-ből t-be Ha a kapott megoldás telíti az új éleket, akkor létezik megengedett megoldása az eredeti feladatnak. Ha nem telíti, akkor az eredeti feladatunknak sincs megoldása.

Ha a maximális folyam telíti az új éleket akkor és csak akkor lehet az eredeti feladatot megoldani.

7. Maximális folyam keresése alsó – felső kapacitás korláttal rendelkező hálózatokon

Az N,A,k hálózatot egészítsük ki egy minden élre az élen szükséges alsó kapacitás l_i értékével, valamint egy a csomópontokhoz adott b_i értékkel, feltéve, hogy $\sum_{i\in N} b_i = 0$.

Definíció: Az [N, A, k] hálózatban legyen (S, T) egy vágás. A $k(S,T) = \sum_{ij\in S,T} k_{ij} - \sum_{ij\in T,S} l_{ij}$ értéket a vágás kapacitásának nevezzük. Az összes s, t pontokat elválasztó vágások közül a legkisebb kapacitásút az s, t pontokra vonatkozó minimális vágásnak nevezzük.

Definíció: Szabad kapacitás hálózat (residual capacity)
Az éleken értelmezett olyan többlet folyam, amely azt fejezi ki, hogy – feltéve, hogy $\forall ij\in A$ - a digráf i-edik csomópontjából j-be mennyi folyamot tudunk még átküldeni az (i, j) (j, i) élek felhasználásával.

$$r_{ij} = k_{ij} - f_{ij} + f_{ji} - l_{ji}$$

$r_{ij} = 0$ akkor és csak akkor ha $k_{ij} = f_{ij}$ és $f_{ji} = l_{ji}$.

A szabad kapacitás hálózatot a maximális folyam feladat megoldására szolgáló algoritmusban használjuk.

Feladat: keresendő olyan v folyam érték, hogy

’v’ maximális, feltéve, hogy

$$\sum_{ij\in A} f_{ij} - \sum_{ji\in A} f_{ji} = \begin{Bmatrix} \text{v, ha } i = s \\ b_i\text{, ha } i \in N \setminus s,t \\ \text{- v, ha } i = t \end{Bmatrix}$$

$$l_{ij} \le f_{ij} \le k_{ij},\ \forall ij\in A$$

A feladat megoldása két lépcsőben történik. Először megengedett megoldást keresünk. Ehhez a hálózatot cirkulációvá alakítjuk egy új (t,s) él bevezetésével, amelynek alsó kapacitása 0, felső kapacitása végtelen. Ezután vezessük be a $f'_{ij} = f_{ij} - l_{ij} \ge 0$ folyamot. A feltételi halmaz ekkor a következőképpen alakul.

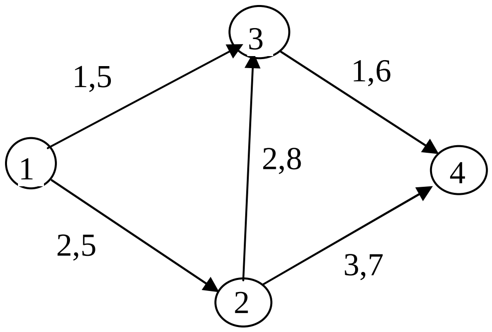
$$\sum_{ij\in A}\left(f'_{ij} + l_{ij}\right) - \sum_{ji\in A}\left(f'_{ij} + l_{ji}\right) = b_i\text{, ha } i \in N$$

Átrendezés után kapjuk, hogy

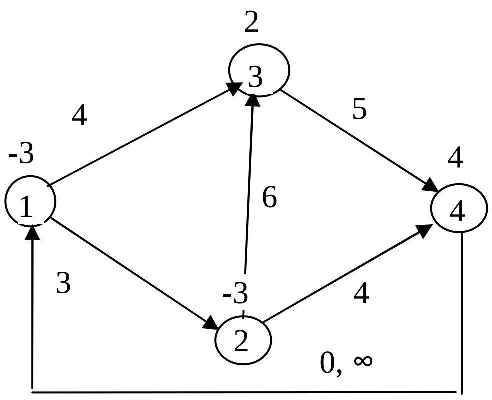
$$\sum_{ij\in A} f'_{ij} - \sum_{ji\in A} f'_{ij} = b_i - \sum_{ij\in A} l_{ij} + \sum_{ji\in A} l_{ji} = b'_i\text{, ha } i \in N$$

$$0 \le f'_{ij} \le k_{ij} - l_{ij} = k'_{ij},\ \forall ij\in A.$$

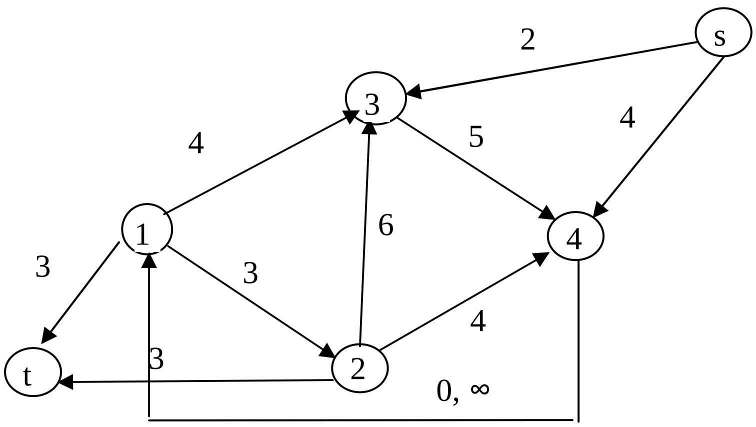
Példa: Eredeti háló az alsó felső kapacitásokkal.



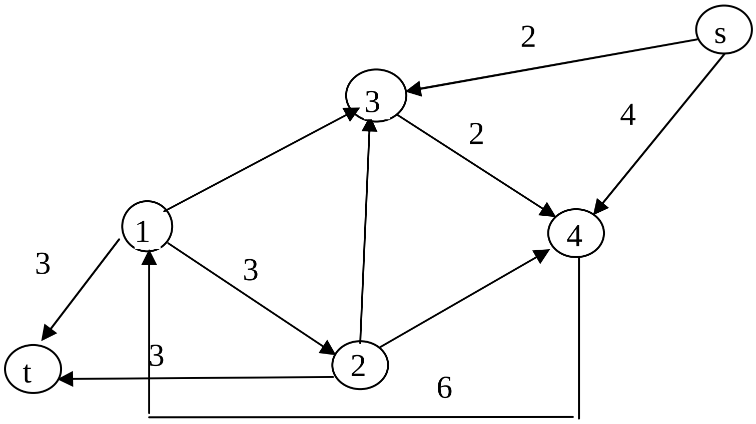
A hálót cirkulációvá alakítjuk át és kiszámoljuk az új kapacitás értékeket is.



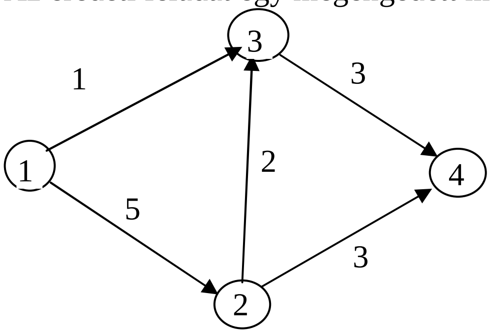
I. fázis.
Keresendő maximális folyam s-ből t-be az alábbi hálón.



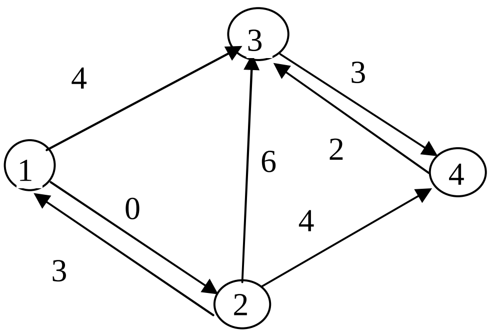
A transzformált hálózaton kapott maximális folyam, az első fázis megoldása látható a következő ábrán:



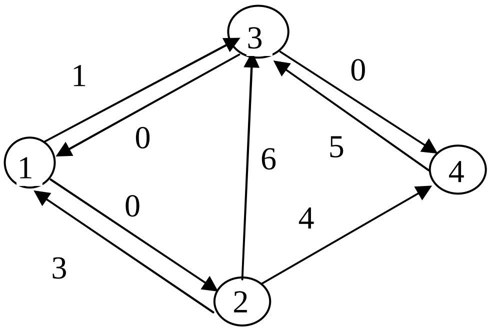
Az eredeti feladat egy megengedett megoldása:



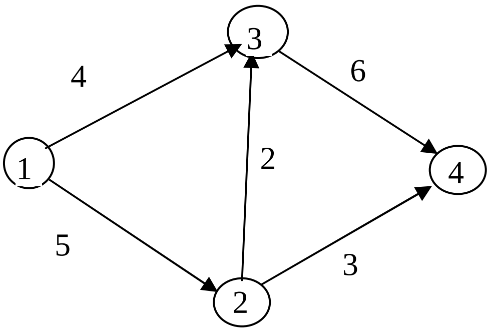
2. fázis a megengedett megoldásból kiindulva keressünk egy optimális megoldást.
Keresendő maximális folyam az alábbi hálón:
(a háló szabad kapacitásait a k' + az első fázis megengedett folyam értékeiből számolhatjuk ki)



A 2. fázis egy optimális megoldása a szabad kapacitás hálózaton ábrázolva a következő ábrán látható (már nincs növelő út 1-ből 4-be).



Az eredeti feladat optimális megoldása:



A minimális vágás S(1,3) és a T(2,4) halmazokat választja el.
A maximális folyam értéke 3, amely az 1-3-4 úton vihető át.
Az eredeti feladatban a maximális folyam és a minimális vágás értéke is 9.

Feladatok:

1. Van 3 építési munkahely. Minden munkahelyen napi 3 műszakban folyhat a munka. Ismert, hogy naponta átlagban minimálisan mennyi ember szükséges az egyes munkahelyeken. Az 1.mh: 15 fő; 2.mh. 21fő; 3.mh. 21 fő. Tudjuk továbbá, hogy műszakonként maximum mennyi ember áll rendelkezésünkre. Végül adott az alábbi táblázat, amely megmutatja, hogy munkahelyenként és az egyes műszakokban dolgozó emberek száma milyen minimális és maximális értékek között változhat.

	1. műszak	2. műszak	3. műszak
1. munkahely	7,9	7,21	6,21
2. munkahely	4,8	5,19	5,25
3. munkahely	5,12	6,14	3,24

Határozzuk meg maximális folyam algoritmussal, hogy mi az a minimális létszám, amely megfelel a fenti követelményeknek.

8. König feladat

König Dénes 1884. szeptember 21-én született Budapesten. 1936-ban Lipcsében jelent meg „A véges és végtelen gráfok elmélete" című műve. Ebben közölte az alábbi tételt, amelyet ma König tételként ismerünk. Dr. Harold W. Kuhn, a Princeton Egyetem professzora a hozzárendelési feladat megoldására kidolgozott egy olyan algoritmust, amely a König-tételre épül ezért az algoritmust magyar módszernek nevezte el.

Feladat: Adott I_1, I_2, …, I_m személy (munkás) és J_1, J_2, …, J_n munka ($m \leq n$). Mindegyik személy valamilyen munkákra van kvalifikálva. Ezt célszerűen egy úgynevezett kvalifikációs mátrixba szoktuk összefoglalni, ahol a kvalifikációs mátrix (i,j) cellájában a * áll, ha az I_i személy a J_j munkát el tudja látni.
A feladat annak eldöntése, hogy kaphat-e minden ember munkát , feltéve, hogy minden személy olyan munkát végezzen, amihez ért és egy munkára csak egy személyt rendeljünk továbbá egy munkás csak egy munkát láthat el.

Tétel:

Adott kvalifikációs mátrix esetén az alábbi két állítás közül az egyik igaz:

1., minden munkást el tudunk látni munkával

2., létezik a munkásoknak egy olyan részhalmaza (P), hogy a P számossága nagyobb, mint az általuk elvégezhető munkák számossága.

$$\|P\| > \|J(P)\|$$

Bizonyítás: a feladat egy maximális folyamfeladattá fogalmazható át.
Készítsük el a folyamhálózatot n + m + 2 csúccsal az alábbiak szerint:
Csomópontok:s,t, I_1, I_2, …, I_m, J_1, J_2, …, J_n.
Élek: s-ből I_1, I_2, …, I_m csomópontokhoz 1 kapacitással, J_1, J_2, …, J_n élekből t-be 1 kapacitással és az I_1, I_2, …, I_m csomópontokból a J_1, J_2, …, J_n csomópontokba – végtelen kapacitással - akkor, ha a kvalifikációs mátrix (i,j) cellájában a * áll.
Tehát $k(s, I_i) = 1$, minden i-re,
$K(J_j, t) = 1$, minden j-re,
$K(I_i, J_j) = \infty$, ha I_i személy alkalmas a J_j munkára, minden más kapacitás legyen nulla.

Keressünk max. folyamot:

1., ha a max folyam értéke m, akkor minden munkásnak van munkája

2., ha a max folyam m-nél kisebb; legyen az (S, T) minimális vágás. Jelölje az S halmazban lévő csomópontokat, s, I_1, I_2, …, I_p, J_1, J_2, …, J_r. Mivel a folyamérték kisebb, mint m, úgy $k(S, T) < m$. Minimális vágáskor telítettek az élek, tehát ∞ kapacitású él nem lehet a vágásban. Továbbá nem lehet a vágásban visszafelé olyan él sem, amelyen folyam folyik, mert akkor a szabad kapacitás hálózatban ugyanezen csomópontok közötti vágásban lévő él szabad kapacitása nem 0 lenne. A vágás kapacitása $m - p + r < m$ így $p > r$. Ez az igazolni kívánt egyenlőtlenség, $\|P\| > \|J(P)\|$

Példa:
Legyen adott az alábbi kvalifikációs mátrix és határozzunk meg egy hozzárendelést.
Kiindulás: Készítsünk el egy kezdeti hozzárendelést. Jelöljük ezt körökkel.

	J_1	J_2	J_3	J_4
I_1	*		*	
I_2		*	*	*
I_3	*	*		
I_4	*		*	

0. lépés Készítsünk egy kiinduló hozzárendelést. Például Észak-Nyugati sarokmódszerrel: az első személyt rendeljük az első olyan munkához, amelyhez hozzárendelhető, a második személyt a második olyan munkához amelyhez hozzárendelhető és így tovább.
1. Keressünk maximális folyamot azon munkásoktól akikhez nem rendeltünk munkát azon munkákhoz, amelyeket nem rendeltük hozzá senkihez.

Az algoritmus az alábbi két alternatíva valamelyikével végződik:
1., minden munkást el tudunk látni munkával
2., létezik a munkásoknak egy olyan részhalmaza (P), hogy a P számossága nagyobb, mint az általuk elvégezhető munkák számossága.

$$\|P\| > \|J(P)\|.$$

9. Futószalag modell (szűk keresztmetszet probléma):

A futószalag modell a König feladat egy általánosítása.

Feladat: Adott I_1, I_2, …, I_m személy (munkás) és J_1, J_2, …, J_n munka ($m \le n$). Mindegyik személy valamilyen munkákra van kvalifikálva. Ezt célszerűen a $Q=(\alpha_{ij})$ úgynevezett kvalifikációs mátrixba szoktuk összefoglalni, ahol $\alpha_{ij}=1$, ha I_i személy ért a J_j munkához, másként $\alpha_{ij}=0$.
Adottak továbbá a $\tau_{ij} \ge 0$ (i=1,…m) (j=1,…n) nem negatív egész számok, amelyek azt az időt jelentik, amennyi idő alatt az I_i munkás a J_j munkahelyi feladatot ellátja. Valamely hozzárendelés esetén a futószalag sebességét az határozza meg, hogy mennyi a leghosszabb ideig dolgozó munkás munkaideje.

A feladat annak eldöntése, hogy kaphat-e minden ember munkát , feltéve, hogy minden személy olyan munkát végezzen, amihez ért és egy munkára csak egy személyt rendeljünk továbbá egy munkás csak egy munkát láthat el.
Célunk olyan hozzárendelés megvalósítása, amelynél a leghosszabb ideig dolgozó munkás munkaideje minimális.

10. Általános König feladat (földszállítási feladat):

Legyenek adottak az I_1, I_2, …, I_m földnyerő helyek melyek kapacitása α_1, α_2… α_m. és a J_1, J_2, …, J_n építési földlerakó helyek, amelyek kapacitása β_1, β_2…. β_n. A költségeket figyelembe véve adott egy elfogadhatósági mátrix, amelynek (i,j) cellájában „*” áll, ha a szállítás az i-edik helyről a j-edik helyre elfogadható. Ha $P \supset I$ a földnyerő helyek tetszőleges részhalmaza, akkor ezen földnyerő helyekről elfogadható költséggel elérhető földlerakó helyek halmaza $R = J(P) \subset J$.

Feltesszük, hogy $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \le \sum_{j=1}^{n} \beta_j$

Feladat: Döntsük el, hogy a föld elszállítható-e az adott helyekről az elfogadható földlerakó helyekre és adjunk egy lehetséges szállítási politikát.

Az általános König feladat megoldhatóságára vonatkozik az alábbi tétel:

Tétel: Adott kvalifikációs mátrix esetén az alábbi két állítás közül az egyik és csak az egyik igaz.

1.Minden földet eltudunk szállítani. A maximális folyam értéke ekkor $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i$.

2., létezik a földnyerő helyeknek egy olyan $P \supset I$ részhalmaza, hogy az elhelyezni kívánt föld mennyisége nagyobb mint az elfogadható földlerakó helyek kapacitása.

$$\|P\|_\alpha > \|J(P)\|_\beta$$

$$\sum_{i \in P} \alpha_i > \sum_{i \in J(P)} \beta_i$$

Bizonyítás:
Konstruáljunk egy m+n+2 csomópontú hálózatot a következőképpen.
Csomópontok:s,t, I_1, I_2, …, I_m, J_1, J_2, …, J_n.
Élek: s-ből I_1, I_2, …, I_m csomópontokhoz a megfelelő α_1, α_2… α_m kapacitásokkal, J_1, J_2, …, J_n élekből t-be a megfelelő β_1, β_2…. β_n kapacitásokkal és az I_1, I_2, …, I_m csomópontokból a J_1, J_2, …, J_n csomópontokba – végtelen kapacitással - akkor, ha a kvalifikációs mátrix (i,j) cellájában a „*” áll.

Keressünk maximális folyamot s-ből t-be.
1., Ha a maximális folyam $\sum_{i \in P} \alpha_i$, akkor a tétel első állítása igaz.
2., Ha a maximális folyam kisebb mint $\sum_{i \in P} \alpha_i$, akkor a min vágás értéke

$$\sum_{i \in \overline{P}} \alpha_i + \sum_{i \in R} \beta_i < \sum_{i \in P} \alpha_i \; (= \sum_{i \in \overline{P}} \alpha_i + \sum_{i \in P} \alpha_i)$$

$$\sum_{i \in R} \beta_i < \sum_{i \in P} \alpha_i$$

Példák.

1. Az Ön feladata vállalkozók kiválasztása adott munkára. A vállalkozók minden feltételnek megfelelnek amelyet az ajánlatkérő előírt számukra. … vállalkozót kell … munkához rendelni.
Állítson fel modellt a következő feltételekkel:
a., Egy vállalkozó csak egy munkát kaphat meg.
b., Egy vállalkozó több munkát is megkaphat.
c., Egy vállalkozó több munkát is elnyerhet de egy munkát maximum 2 vállalkozó végezhet.

11. Általános szűk keresztmetszet feladat:

Legyenek adottak az I_1, I_2, …, I_m földnyerő helyek melyek kapacitása α_1, α_2… α_m. és a J_1, J_2, …, J_n építési földlerakó helyek, amelyek kapacitása β_1, β_2…. β_n. A költségeket figyelembe véve adott egy elfogadhatósági mátrix, amelynek (i,j) cellájában „*” áll, ha a szállítás az i-edik helyről a j-edik helyre elfogadható. Ha $P \supset I$ a földnyerő helyek tetszőleges részhalmaza, akkor ezen földnyerő helyekről elfogadható költséggel elérhető földlerakó helyek halmaza $R = J(P) \subset J$.

Feltesszük, hogy $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \leq \sum_{j=1}^{n} \beta_j$

Adottak még a $\tau_{ij} \geq 0$ (i=1,…,m) (j=1,…,n) értékek, amelyek a I_i helyről a J_j helyre történő szállítás idejét jelölik.

Feladat: Döntsük el, hogy a föld elszállítható-e az adott helyekről az elfogadható földlerakó helyekre és adjunk egy olyan lehetséges szállítási politikát, amelyre a maximális τ minimális.

Példák.

1. Egy vállalkozónak egyszerre öt építési munkahely betonszükségletét kell kielégíteni 5 betongyártó felhasználásával. Ismert a gyártók kapacitása és a betonigény az egyes munkahelyeken. Honnan érdemes rendelni a betont, hogy a lehető leghamarabb a munkahelyre kerüljön a beton?

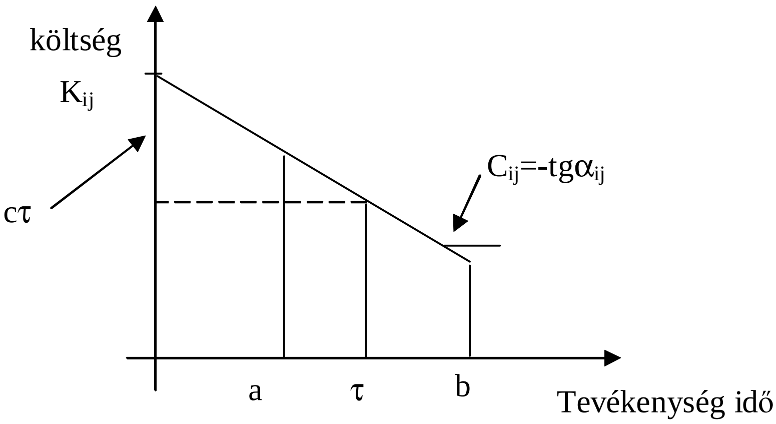
2. Adott 4 darab földnyerőhely és 5 darab földlerakóhely, továbbá a kinyerhető és a lerakható földmennyisége. (Az adott géplánc függvényében.). Adott továbbá az az időszükséglet ami két hely közötti összállítási időt mutatja. Állapítsuk meg, hogy honnan hova érdemes a földet szállítani, ha a lehető legkevesebb idő alatt és költséggel szeretnénk ezt megvalósítani.

3. Egy szállító vállalkozás azt a feladatot kapja, hogy 4 munkahelyekről 5 földlerakóhelyre szállítson anyagokat. A költségminimalizálás érdekében úgy szeretné megoldani a feladatot, hogy mindig a lehető legközelebb lévő lerakóhelyre szállítana. Adott a munkahelyeken időegység alatt kitermelendő föld és a lerakóhelyeken időegység alatt bedolgozható földmennyiség, továbbá adottak a szállítási távolságok. Honnan hova szállítsunk?

12. A Költségtervezési „time-cost trade-off” feladat hurokmentes hálón

Tegyük fel, hogy tervütem hálónk hurokmentes.

A költségtervezési feladatban a háló pontjai eseményeket, az élek valódi- és látszattevékenységeket vagy kapcsolatokat jelölnek. Valódi tevékenység esetén – ekkor„a” és „b” nemnegatívak - a tevékenység elvégzésének normál idejét „b” illetve roham idejét „a” jelöli, „ τ ” pedig a tevékenységidőt. Jelölje egy tevékenységre a „b” időtartamhoz rendelt költséget K_b az „a” időhöz tartozzon K_a. A költségfüggvényről tegyük fel, hogy lineáris, meredeksége „-c” $-c_{ij}$, ahol $c_{ij} \geq 0$ azaz $\frac{K_b - K_a}{b-a} = tg\alpha = -c$. Ekkor egy adott tevékenységidőhöz „ τ ”-hoz tartozó költség $K_b + (b-\tau)c$. A költség a normál időnél a legkisebb a rohamidőnél a legnagyobb és közben lineárisan változik. Ha „a” és „b” negatívak, tehát nem valódi tevékenységet jelölnek, akkor c=0.



Primál feladat (a kivitelező feladata).
Adott az [N,A] tervütem háló és az a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} $\forall ij \in$ A -ra nemnegatív egész értékek.

Keresendő azon $\mu_i, \forall i \in N$ -re és $\tau_{ij}, \forall ij \in A$-ra, ahol

$$\begin{aligned} &\tau_{ij} \leq \mu_j - \mu_i \quad \forall ij \in \mathrm{A} \qquad (*) \\ &\tau_{ij} \leq b_{ij} \quad \forall ij \in \mathrm{A} \\ &\tau_{ij} \geq a_{ij} \quad \forall ij \in \mathrm{A} \\ &\mu_1 = 0 \\ &\mu_t = p \end{aligned}$$

és az összköltség minimális, azaz $\sum_{ij \in A} \left(K_{ij} - c_{ij}\tau_{ij} \right)$ vagy max $\sum_{ij \in A} c_{ij}\tau_{ij}$.

A fenti feladathoz rendelhető a következő úgynevezett duál feladat.
Tekintsük az [N,A,k] hálózatot, ahol, k_{ij}, $\forall ij \in$ A -ra tetszőleges nemnegatív egész.

Duál feladat (Munkaerő közvetítő feladata):
Keresendő az [N,A,k] hálózaton értelmezet $f_{ij}, \forall ij \in A$ folyam, amelyre

$$\sum_{ij\in A} f_{ji} - \sum_{ij\in A} f_{ij} = 0 \quad \forall i \in N, i \neq 1, i \neq t$$

$$p\nu + \sum_{\substack{ij\in A \\ f_{ij}<c_{ij}}} (c_{ij} - f_{ij}) b_{ij} - \sum_{\substack{ij\in A \\ f_{ij}>c_{ij}}} (f_{ij} - c_{ij}) a_{ij} \text{ minimális.}$$

-ahol ν a folyam értéke.

Megjegyzés: A duál egy lehetséges interpretációja a következő. Egy munkaerő közvetítő vállalkozó munkaerőt biztosít a gyorsításhoz. A munkásokat p napon keresztül folyamatosan kell foglalkoztatni. A napi munkáslétszámot jelölje ν. Ha a gyorsításhoz egy tevékenységen szükséges munkásszám, azaz c_{ij}, nagyobb mint ami rendelkezésünkre áll, f_{ij}, akkor újabb embereket kell bérbe venni, a vállalkozó előzetes számításai szerint b_{ij} napig. Ellenkező esetben a vállalkozó bérbe adja a munkásait a_{ij} napig.

A két feladat közötti kapcsolatot mutatja meg a következő lemma.

Lemma: Minden (*)-ot – a primál feladat feltételeit- teljesítő μ és τ valamint az N,k hálózaton értelmezett tetszőleges f folyamra, melynek értéke ν teljesül az alábbi egyenlőtlenség.

$$\sum_{ij\in A} c_{ij}\tau_{ij} \leq p\nu + \sum_{\substack{ij\in A \\ f_{ij}<c_{ij}}} (c_{ij} - f_{ij}) b_{ij} - \sum_{\substack{ij\in A \\ f_{ij}>c_{ij}}} (f_{ij} - c_{ij}) a_{ij}$$

ahol ν az f folyam értéke (a start csomópontból kifolyó folyamok összege).

Bizonyítás:

$$\sum_{ij\in A} c_{ij}\tau_{ij} = \sum_{\substack{ij\in A \\ f_{ij}<c_{ij}}} (f_{ij} + c_{ij} - f_{ij})\tau_{ij} + \sum_{\substack{ij\in A \\ f_{ij}>c_{ij}}} (f_{ij} - (f_{ij} - c_{ij}))\tau_{ij} =$$

$$\sum_{ij\in A} f_{ij}\tau_{ij} + \sum_{\substack{ij\in A \\ f_{ij}<c_{ij}}} (c_{ij} - f_{ij})\tau_{ij} - \sum_{\substack{ij\in A \\ f_{ij}>c_{ij}}} (f_{ij} - c_{ij})\tau_{ij} \leq$$

$$\leq \sum_{ij\in A} f_{ij}(\mu_j - \mu_i) + \sum_{\substack{ij\in A \\ f_{ij}<c_{ij}}} (c_{ij} - f_{ij}) b_{ij} - \sum_{\substack{ij\in A \\ f_{ij}>c_{ij}}} (f_{ij} - c_{ij}) a_{ij}$$

ahol

$$\sum_{ij\in A} f_{ij}(\mu_j - \mu_i) = \sum_{j\in N} \mu_j \sum_{ij\in A} (f_{ij} - f_{ji}) = \mu_1(-\nu) + \mu_t\nu$$

Ezzel bizonyítást befejeztük.

Következmény: Ha egyenlőség áll fenn, akkor a célfüggvények optimálisak.

Optimalitási kritérium:

Az egyenlőség fennállásának elégséges feltétele, hogy létezzen olyan folyam, amelyre:

1^0 Ha $\tau_{ij} < \mu_j - \mu_i$ akkor $f_{ij} = 0$
2^0 Ha $\tau_{ij} < b_{ij}$ akkor $f_{ij} \geq c_{ij}$
3^0 Ha $\tau_{ij} > a_{ij}$ akkor $f_{ij} \leq c_{ij}$

Kritikusnak nevezünk egy tevékenységet, ha $\tau_{ij} = \mu_j - \mu_i$. Vegyük észre, hogy folyam csak kritikus tevékenységeken folyhat.

Észrevétel:
1. A primál feladat célfüggvényének maximalizálása miatt optimalitás esetén τ az alábbi értékeket veheti fel.
$\tau_{ij} = \min\lfloor \mu_j - \mu_i, b_{ij} \rfloor$
2. A leghosszabb átfutási időhöz tartozó optimális megoldás, $\tau_{ij} = b_{ij}$, $f_{ij} = 0, \forall ij \in A$.

Az optimalitási kritériumoknak megfelelően a következő osztályokba sorolhatjuk az éleket.

A_I	1^0 teljesül, (esetleg 3^0 is)	$\tau_{ij} < \mu_j - \mu_i$	$f_{ij} = 0$
A_{II}	2^0 és 3^0 teljesül,	$a_{ij} < \tau_{ij} < b_{ij}, \tau_{ij} = \mu_j - \mu_i$	$f_{ij} = c_{ij}$
A_{III}	csak 2^0 teljesül,	$\tau_{ij} < b_{ij}, \tau_{ij} = \mu_j - \mu_i = a_{ij}$	$f_{ij} \geq c_{ij}$
A_{IV}	csak 3^0 teljesül,	$a_{ij} < \tau_{ij}, \tau_{ij} = \mu_j - \mu_i = b_{ij}$	$f_{ij} \leq c_{ij}$
A_V	egyik sem teljesül,	$\tau_{ij} = a_{ij} = b_{ij} = \mu_j - \mu_i$	$f_{ij} \geq 0$

Lemma: Ha valamely p-re létezik optimális μ ,τ, f akkor vagy létezik p*<p amelyre van optimális μ^* ,τ^*, f* megoldás vagy p a legkisebb érték amelyre a feladat megoldható.

Bizonyítás:
Készítsük el az alábbi [N,A',r] szabad kapacitás hálózatot, ahol A' olyan kibővítés A-nak, hogy ha $ij \in A$ akkor legyen $ji \in A'$.

Él csoport	Kapacitás az ij∈A élen	Kapacitás a ji élen (ji nem tartozik A-ba !)
ij∈A_I	$r_{ij} = 0$,	$r_{ji} = 0$
ij∈A_{II}	$r_{ij} = 0$,	$r_{ji} = 0$
ij∈A_{III}	$r_{ij} = \infty$,	$r_{ji} = f_{ij} - c_{ij}$
ij∈A_{IV}	$r_{ji} = c_{ij} - f_{ij}$,	$r_{ji} = f_{ij}$
ij∈A_V	$r_{ij} = \infty$,	$r_{ji} = f_{ij}$

A többi él kapacitása legyen 0.

Keressünk maximális folyamot az előbb definiált hálózaton. Legyen a maximális folyam g a minimális vágás (S,T).

Legyen $f_{ij}^* = g_{ij} + f_{ij}$. $f_{ij}, \forall ij \in A$. A kapacitások megválasztása miatt f* továbbra is megfelel az optimalitási kritériumoknak.
Ha g végtelen, akkor van olyan út s-ből t-be, amelyen minden él vagy az A_{III} vagy az A_V csoportba tartozik, tehát azon az úton minden $\tau_{ij} = a_{ij}$, így p a legkisebb érték (átfutási idő) amelyre a feladat megoldható.
Ha g véges, akkor a vágásban lévő élek telítettek, azaz a vágásban vagy $f_{ij}^* = 0$ vagy $f_{ij}^* = c_{ij}$ ahol $ij \in (S,T)$. A vágásban csak A_I, A_{II}, A_{IV} típusú élek lehetnek, mert ezek kapacitása korlátos. A vágásban visszafelé bármilyen kapacitású él lehet. Vizsgáljuk meg a folyaminformációk segítségével, hogy a vágásban lévő és a vágásban visszafelé lévő élek milyen élcsoportba kerülhetnek az optimalitási kritériumok betartásával, ha változnak a T halmazban a potenciál értékek.
Ekkor egy élen a folyam vagy 0 vagy c.

Vágásban lévő élek $i \in S, j \in T, ij \in A$,.
A_I $\tau_{ij} < \mu_j - \mu_i$, $\tau_{ij} = b_{ij}$, $f_{ij} = 0$
Ha μ_j kisebb lesz, akkor vagy A_I marad az él, vagy addig csökkenhet, amíg
A_{IV} típusú nem lesz, ekkor $\tau_{ij}^* = \mu_j^* - \mu_i = b_{ij}$, $f_{ij}^* \le c_{ij}$
vagy ha $c_{ij} = 0$ akkor további csökkenésre lehet A_{II} típusú $a_{ij} < \tau_{ij}^* < b_{ij}$, $\tau_{ij}^* = \mu_j^* - \mu_i$, $f_{ij}^* = c_{ij} = 0$
végül ha $c_{ij} = 0$ és $a_{ij} = b_{ij}$ akkor lehet A_V típusú, ekkor $\tau_{ij} = \mu_j^* - \mu_i = a_{ij} = b_{ij}$ $f_{ij}^* \ge 0$.
A maximális csökkenés tetszőleges c-re, minden vágásban lévő A_I típusú élt figyelembe véve $\delta_1 = \min\limits_{\substack{i\in S, j\in T \\ ij\in A_I}} (\mu_j - \mu_i - b_{ij})$

A_{II} típusú él esetén $a_{ij} < \tau_{ij} = \mu_j - \mu_i < b_{ij}$,
$\mu_j^* < \mu_j$ -re $\tau_{ij}^* = \mu_j^* - \mu_i < b_{ij}$,
ha most $\tau_{ij}^* > a_{ij}$ akkor az él A_{II} típusú, ha $\tau_{ij}^* = a_{ij}$ akkor A_{III} típusú lesz az él. A folyamérték $f_{ij}^* = c_{ij}$
A maximális csökkenés $\delta_2 = \min\limits_{\substack{i\in S, j\in T \\ ij\in A_{II}}} (\mu_j^* - \mu_i - a_{ij})$

Ha a vágásban A_{IV} típusú él van: $a_{ij} < \tau_{ij} = b_{ij} = \mu_j - \mu_i$, akkor egy $\mu_j^* < \mu_j$-re $\tau_{ij}^* = \mu_j^* - \mu_i < b_{ij}$,
ha most $\tau_{ij}^* > a_{ij}$ akkor az él A_{II} típusú, ha $\tau_{ij}^* = a_{ij}$ akkor A_{III} típusú lesz az él. A folyamérték $f_{ij}^* = c_{ij}$.
A maximális csökkenés $\delta_4 = \min\limits_{\substack{i\in S, j\in T \\ ij\in A_{IV}}} (\mu_j - \mu_i - a_{ij})$

A vágásban visszafelé bármilyen él lehet. Ekkor $i \in T, j \in S, ij \in A$ és a potenciálértékek a következőképpen változnak

A_I típusú él A_I típusú marad

A_{II}, $a_{ij} < \tau_{ij} = \mu_j - \mu_i < b_{ij}$
Tetszőleges $\mu_i^* < \mu_i$-re (ekkor τ_{ij}^* nőhet !) az alábbi lehetséges élosztályok adódnak

Ha $a_{ij} < \tau_{ij}^* = \mu_j - \mu_i^* < b_{ij}$, akkor az él A_{II} típusú marad $f_{ij}^* \le c_{ij}$;
Ha $a_{ij} < \tau_{ij}^* = \mu_j - \mu_i^* = b_{ij}$ akkor az él A_{IV} osztályba tartozik;
Ha $c_{ij} = 0$, és $a_{ij} < \tau_{ij}^* < \mu_j - \mu_i^*$, $\tau_{ij}^* = b_{ij}$ akkor A_I típusú lesz az él.

A maximális csökkenés tetszőleges c-re $\delta_{v2} = \min\limits_{\substack{i \in T, j \in S \\ ij \in A_{II}}} \left(b_{ij} - \mu_j + \mu_i\right)$

A_{III} $\tau_{ij} = \mu_j - \mu_i = a_{ij} < b_{ij}$, $f_{ij} \ge c_{ij}$. Ekkor a vágásban egy $f_{ij} - c_{ij}$ kapacitású, telített él van, tehát az új folyam érték a vágásban visszamenő A_{III} élen $f_{ij}^* = f_{ij} + g_{ij} = f_{ij} - f_{ij} + c_{ij} = c_{ij}$ lesz.
Tetszőleges $\mu_i^* < \mu_i$-re (ekkor τ_{ij}^* nőhet !) az alábbi lehetséges élosztályok adódnak

Ha $a_{ij} < \tau_{ij}^* = \mu_j - \mu_i^* < b_{ij}$, akkor az él A_{II} típusú marad $f_{ij}^* = c_{ij}$;
Ha $a_{ij} < \tau_{ij}^* = \mu_j - \mu_i^* = b_{ij}$ akkor az él A_{IV} osztályba tartozik; $f_{ij}^* \le c_{ij}$
Ha $c_{ij} = 0$, és $a_{ij} < \tau_{ij}^* < \mu_j - \mu_i^*$, $\tau_{ij}^* = b_{ij}$ akkor A_I típusú lesz az él $f_{ij}^* = 0$.

A maximális csökkenés $\delta_{v3} = \min\limits_{\substack{i \in T, j \in S \\ ij \in A_{III}}} \left(b_{ij} - \mu_j + \mu_i\right)$

A vágásban visszamenő A_{IV} vagy A_V típusú él A_I típusú lesz, ha a μ_i csökken.
Most csökkentsük a potenciálértékeket úgy, hogy a folyamértékek változatlanok maradnak és az optimalitási kritérium továbbra is teljesül.

$$\delta := \min\left(\delta_1, \delta_2, \delta_4, \delta_{v2}, \delta_{v3}\right)$$

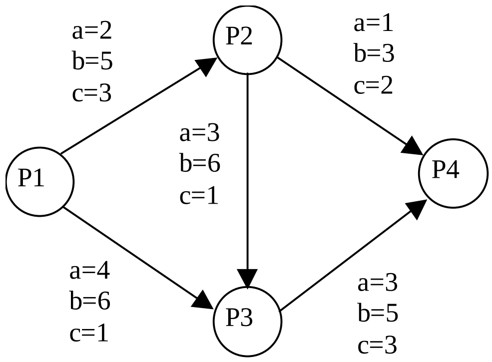
ahol δ biztosan pozitív mennyiség.

Legyenek az új potenciál értékek a követezők szerint megválasztva.

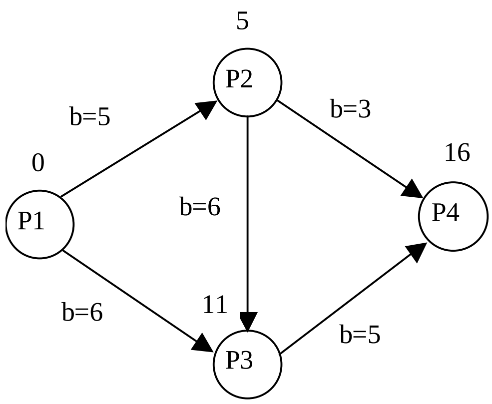
$\mu_i^* = \mu_i$, ha $i \in S$,
$\mu_i^* = \mu_i - \lambda$, ha $i \in T$,
ahol $\lambda = 0,1,2,\ldots,\delta$
illetve $\tau_{ij}^* := \min\left[\mu_j - \mu_i, b_{ij}\right]$.
A μ^*, τ^*, f^* értékek az optimalitási kritériumot kielégítik.
Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Példák

1. Példa: Határozzuk meg az alábbi tervütem hálón a minden lehetséges átfutási időre a minimális költségű megoldást.

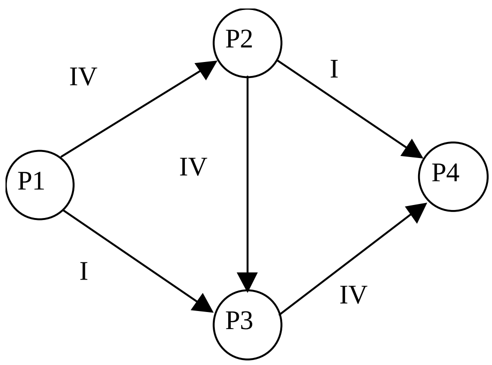


Kiinduló értékek:
kezdeti folyam f=0,

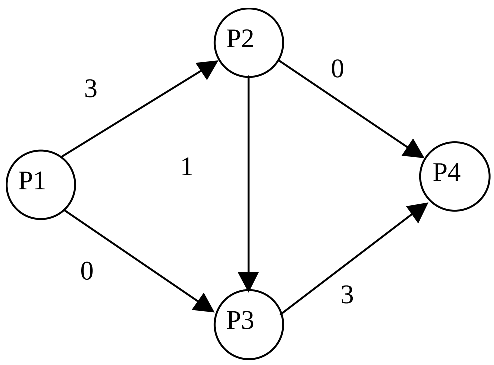


1. iterációs lépés:

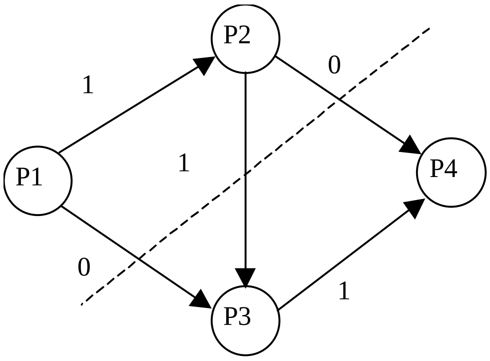
Élek osztályozása:



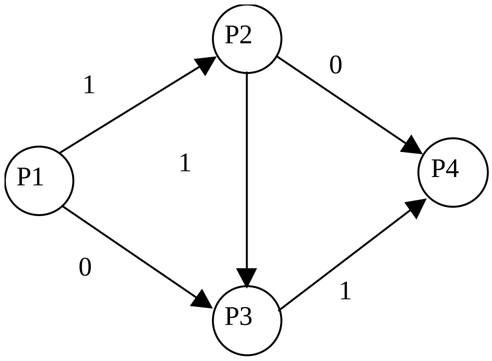
szabad kapacitás



g folyam és a minimális vágás



f* folyam



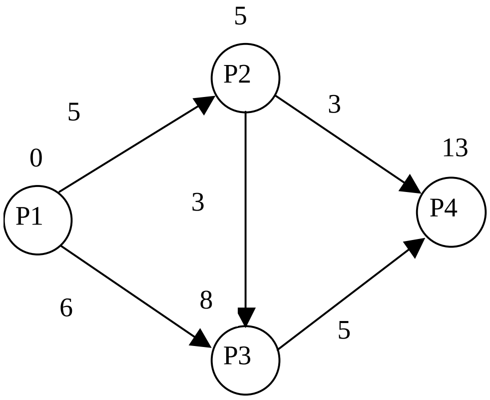
$\delta_{13} = 11 - 0 - 6 = 5$

$\delta_{24} = 16 - 5 - 3 = 8$

$\delta_{23} = 11 - 5 - 3 = 3$

$\delta = 3$

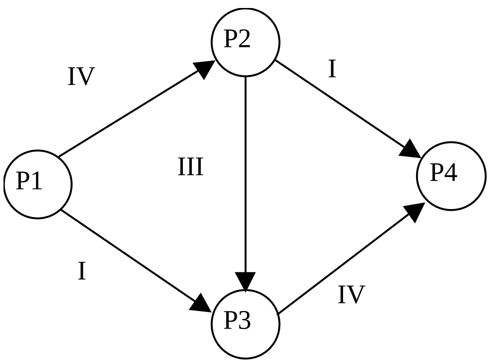
Az új tevékenységidők és potenciálértékek meghatározása.



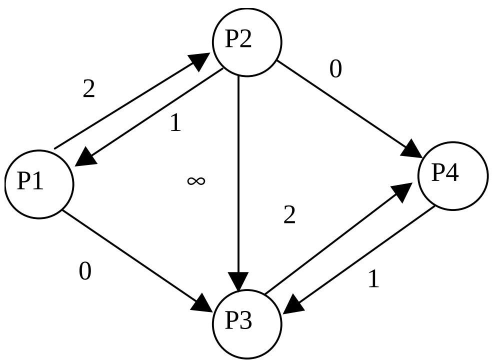
A költség növekedés: $3c_{23} = 3$ egység.

2. iteráció

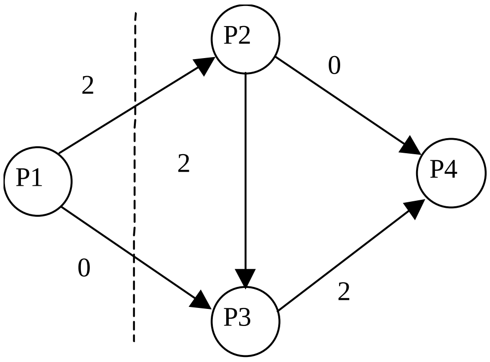
Élek osztályozása:

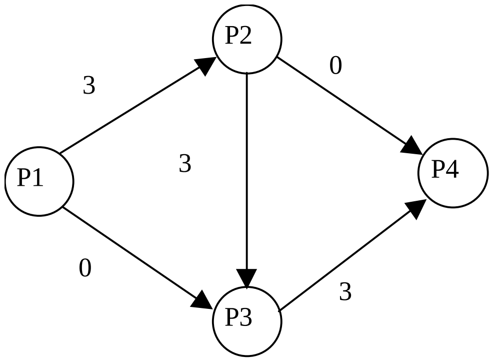


szabad kapacitás

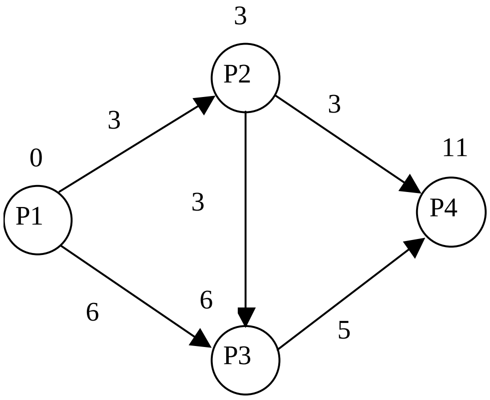


g folyam és a minimális vágás   f* folyam





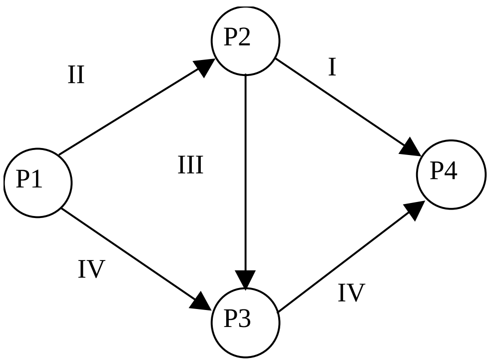
$\delta_{12} = 5 - 0 - 2 = 3$
$\delta_{13} = 8 - 0 - 6 = 2$
$\delta = 2$
Az új tevékenységidők és potenciálértékek meghatározása.

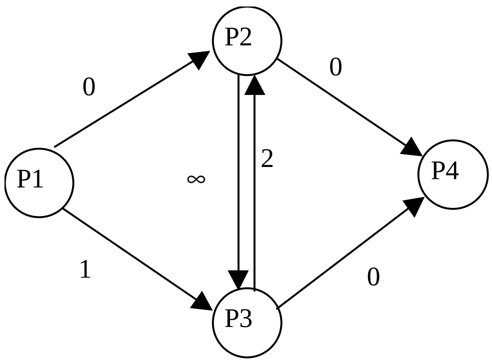


A költség növekedés: $3c_{23} + 2c_{13} = 3 + 6 = 9$ egység.

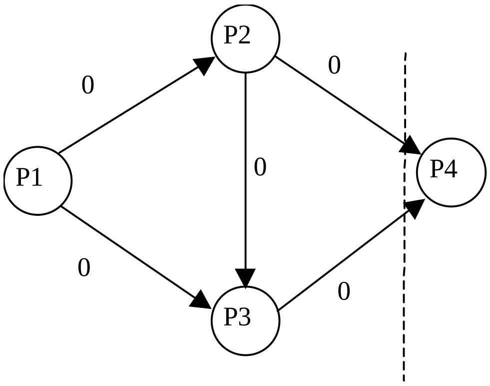
3. iteráció

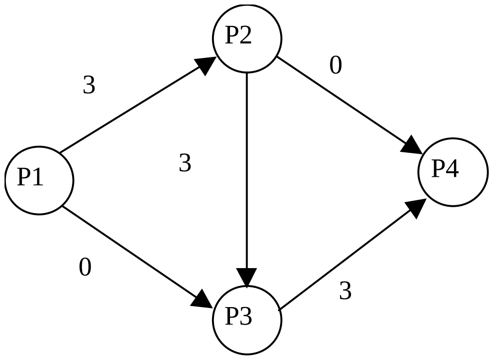
Élek osztályozása: szabad kapacitás





g folyam és a minimális vágás   f* folyam



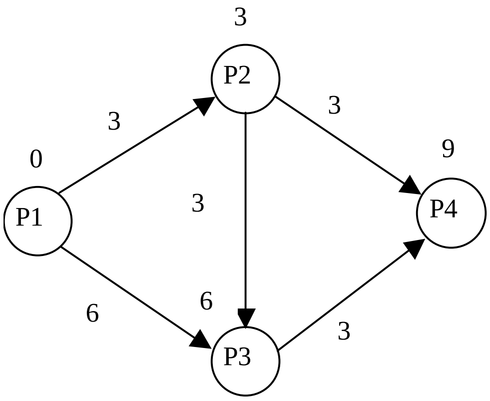


$\delta_{24} = 11 - 3 - 3 = 5$

$\delta_{34} = 11 - 6 - 3 = 2$

$\delta = 2$

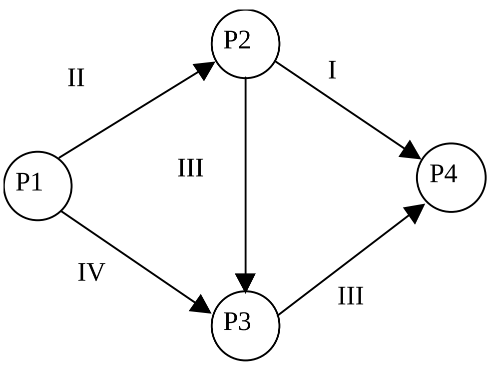
Az új tevékenységidők és potenciálértékek meghatározása.

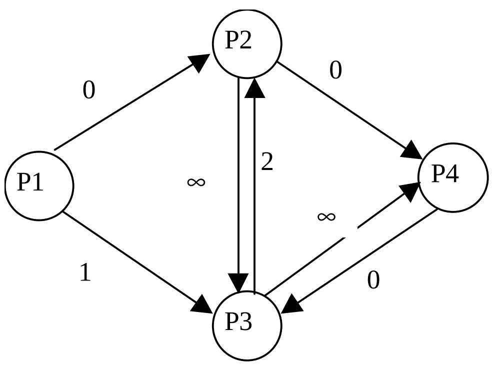


A költség növekedés: $3c_{23} + 2c_{13} + 2c_{34} = 3 + 6 + 6 = 15$ egység.

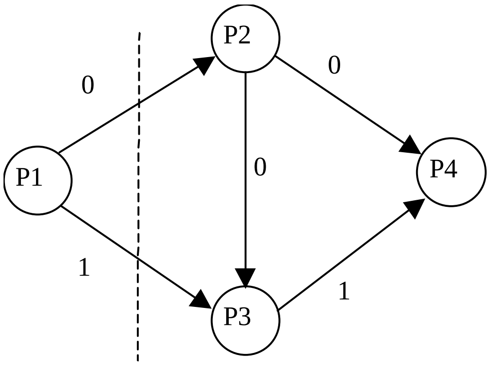
4. iteráció

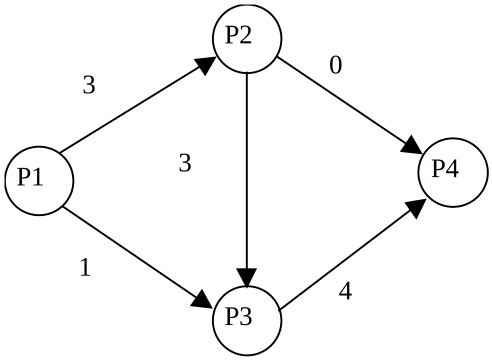
Élek osztályozása: szabad kapacitás





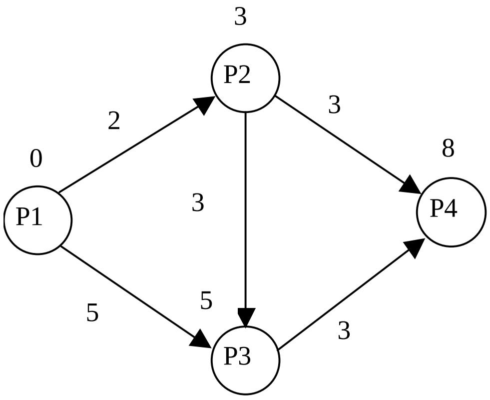
g folyam és a minimális vágás f* folyam





$$\delta_{12} = 3 - 0 - 2 = 1$$
$$\delta_{13} = 6 - 0 - 4 = 2$$
$$\delta = 1$$

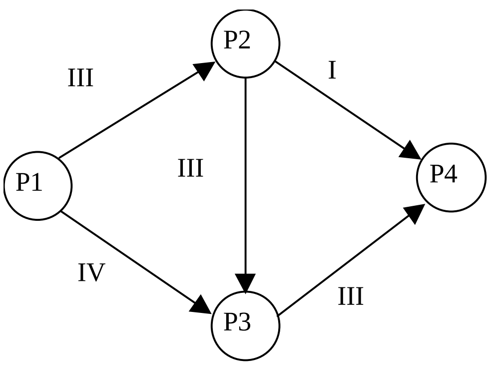
Az új tevékenységidők és potenciálértékek meghatározása.

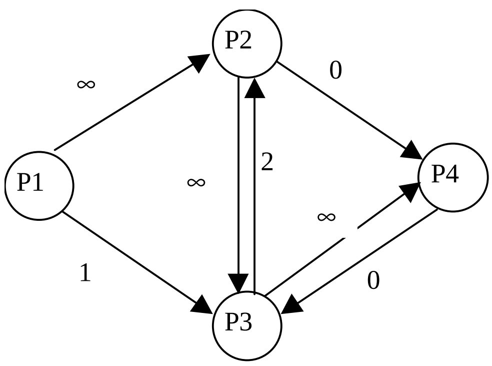


A költség növekedés: $3c_{23} + 2c_{13} + 2c_{34} + 1c_{12} = 3 + 6 + 6 + 3 = 18$ egység.

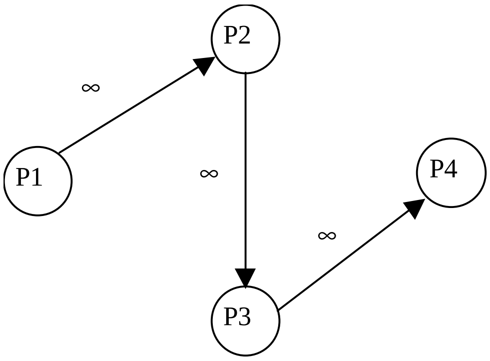
5. iteráció:

Élek osztályozása: szabad kapacitás

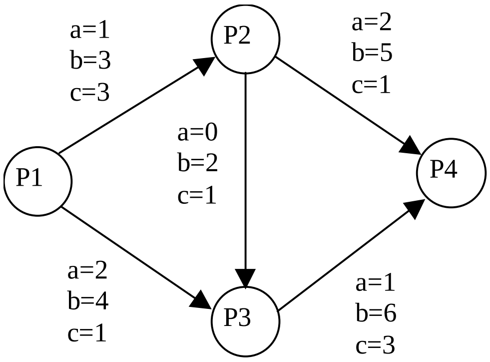




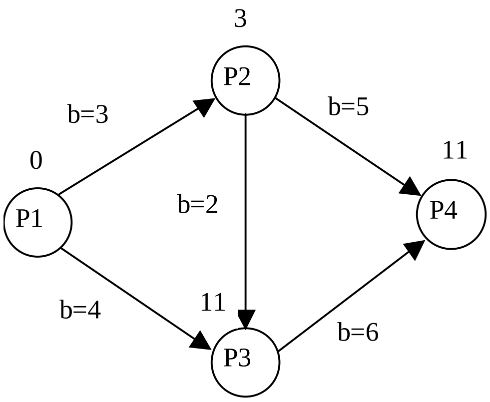
g folyam végtelen a p1-p2-p3-p4 úton minden tevékenységidő minimális, így 8 nap az elérhető minimális átfutási idő.



2. Példa: Határozzuk meg az alábbi tervütem hálón a minden lehetséges átfutási időre a minimális költségű megoldást.

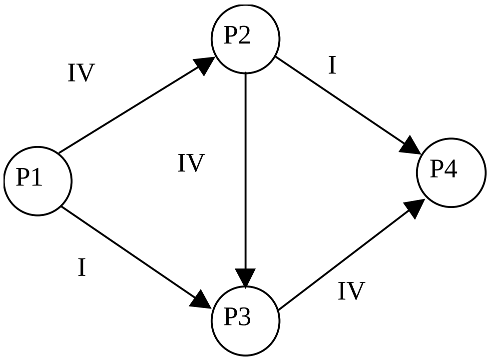


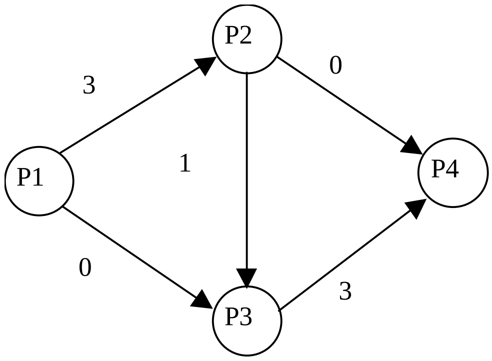
Kiinduló értékek:
kezdeti folyam f=0,



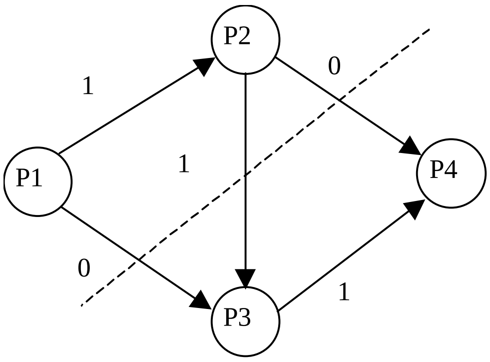
1. iterációs lépés

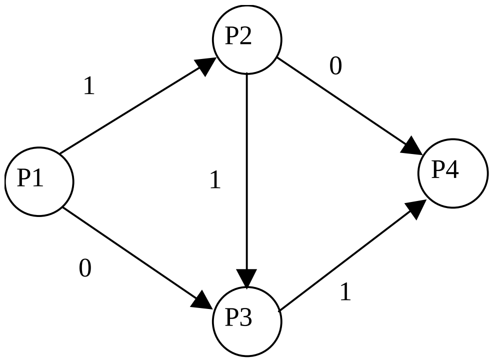
Élek osztályozása: szabad kapacitás





g folyam és a minimális vágás f* folyam



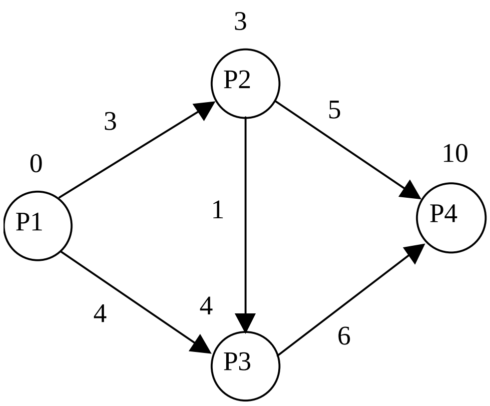


$\delta_{13} = 5 - 0 - 4 = 1$

$\delta_{24} = 11 - 3 - 5 = 3$

$\delta_{23} = 5 - 3 - 0 = 2$

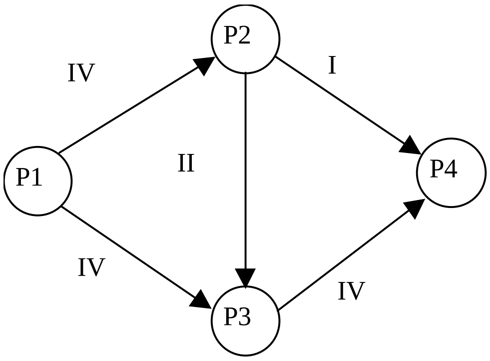
$\delta = 1$



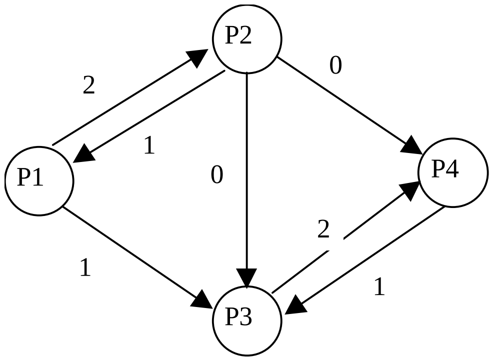
A költség növekedés: $c_{23} = 1$ egység.

Az iteráció 2. lépése

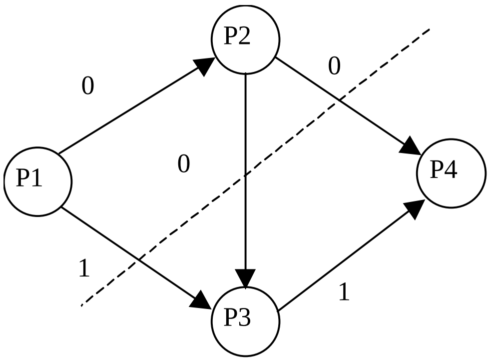
Élek osztályozása: szabad kapacitás

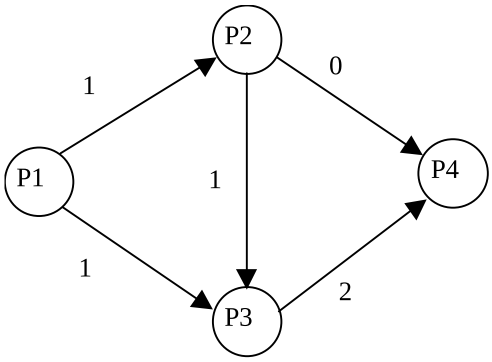


g folyam és a minimális vágás

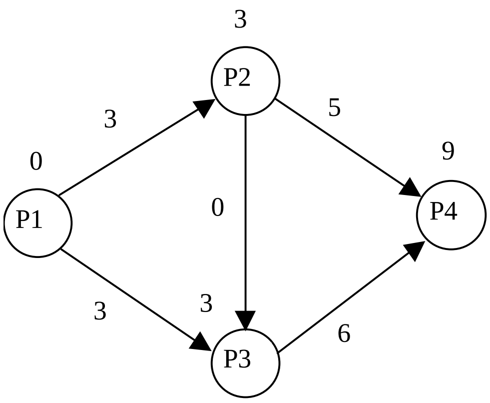


f* folyam





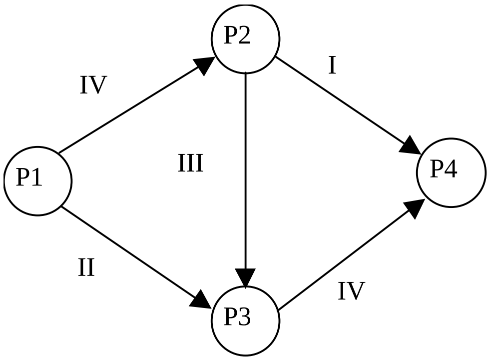
$\delta_{13} = 4 - 0 - 2 = 2$
$\delta_{24} = 10 - 3 - 5 = 2$
$\delta_{23} = 4 - 3 - 0 = 1$
$\delta = 1$



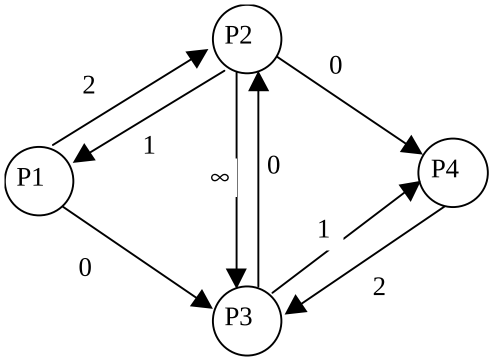
A költség növekedés: $c_{23} + c_{13} = 1 + 1 = 2$ egység.

Az iteráció 3. lépése

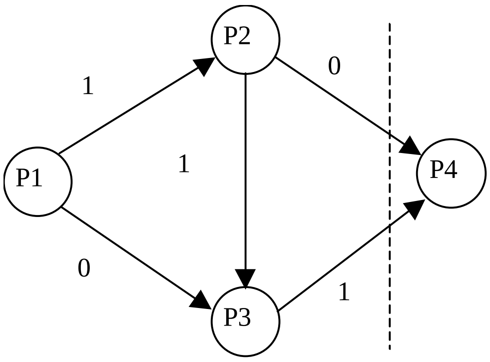
Élek osztályozása: szabad kapacitás

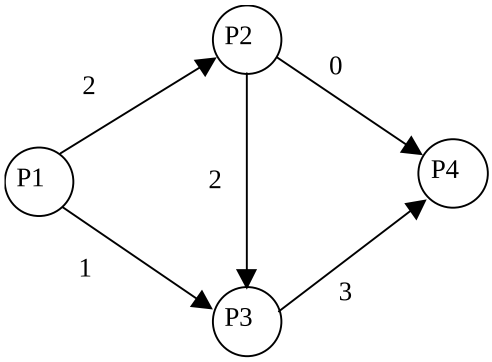


g folyam és a minimális vágás

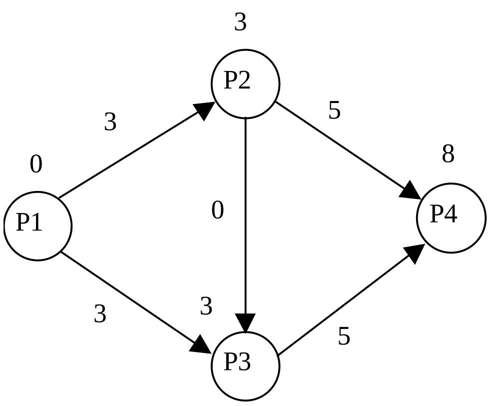


f* folyam





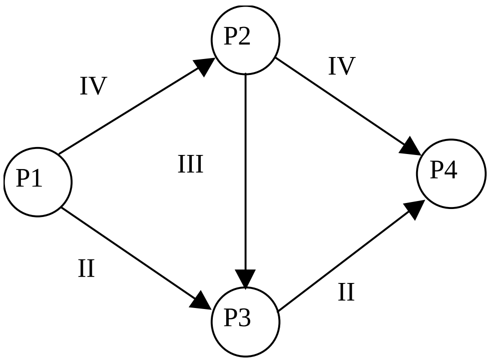
$\delta_{42} = 9 - 3 - 5 = 1$
$\delta_{34} = 9 - 3 - 1 = 5$
$\delta = 1$

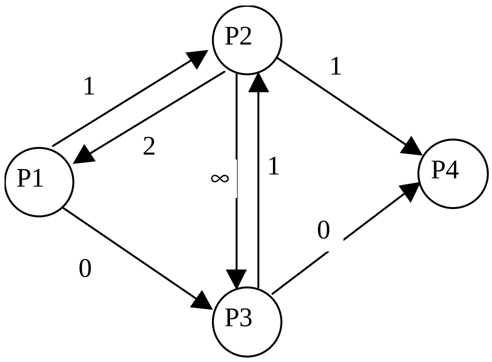


A költség növekedés: $c_{23} + c_{13} + c_{34} = 1 + 1 + 3 = 5$ egység.

4. iterációs lépés

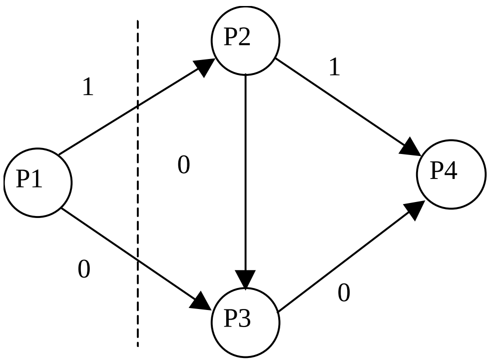
Élek osztályozása: szabad kapacitás

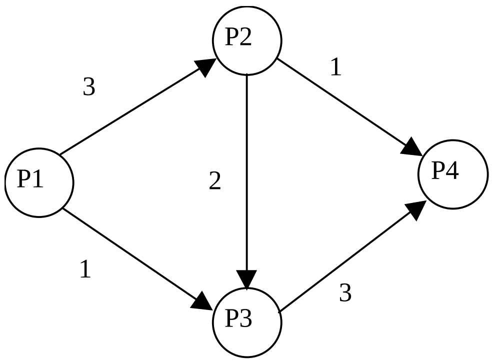




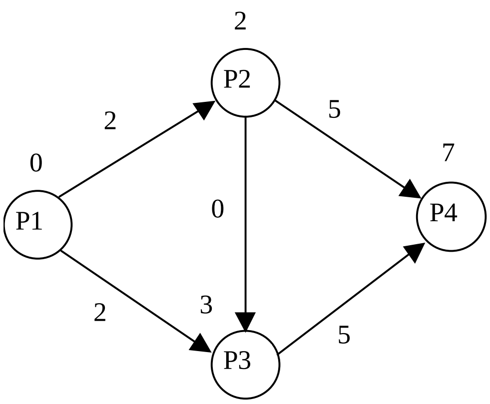
g folyam és a minimális vágás

f* folyam





$\delta_{12} = 3 - 0 - 1 = 2$
$\delta_{13} = 3 - 0 - 2 = 1$
$\delta = 1$

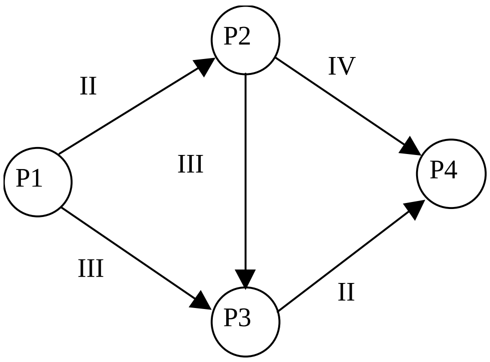


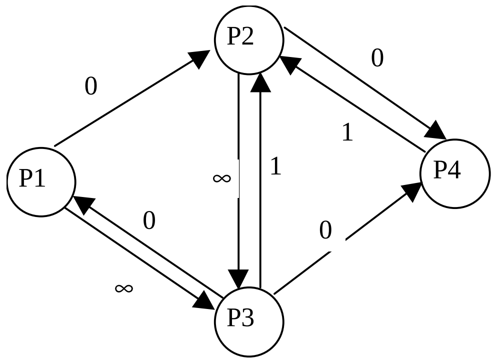
A költség növekedés: $c_{23} + c_{13} + c_{34} + c_{12} + c_{13} = 1 + 1 + 3 + 3 + 1 = 9$ egység.

5. lépés

Élek osztályozása:

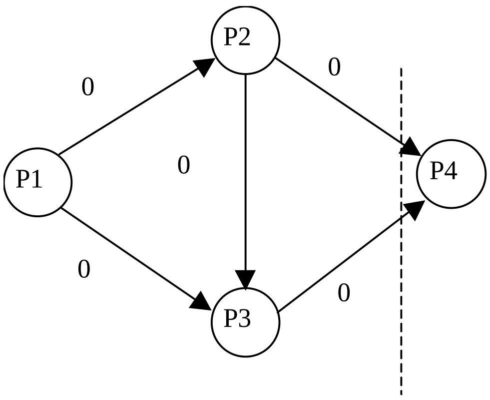
szabad kapacitás

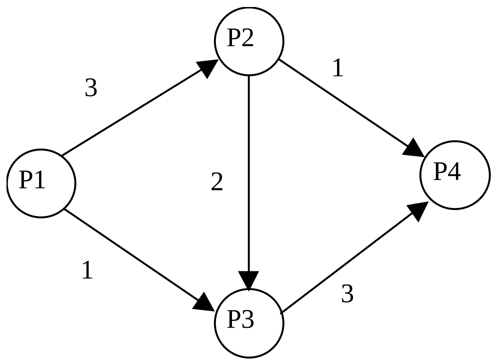




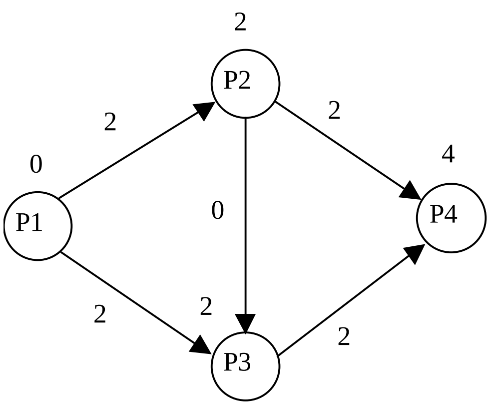
g folyam és a minimális vágás

f* folyam





$$\delta_{24} = 7 - 2 - 2 = 3$$
$$\delta_{34} = 7 - 2 - 1 = 4$$
$$\delta = 1$$

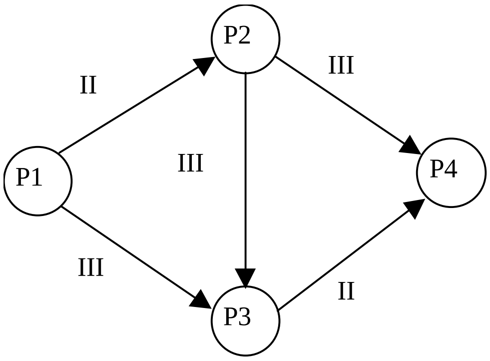


A költség növekedés: $c_{23} + c_{13} + c_{34} + c_{12} + c_{13} + 3c_{24} + 3c_{34} = 1 + 1 + 3 + 3 + 1 + 3 + 9 = 21$ egység.

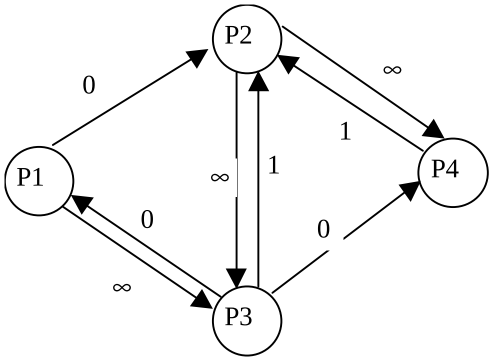
6. lépés

Élek osztályozása:

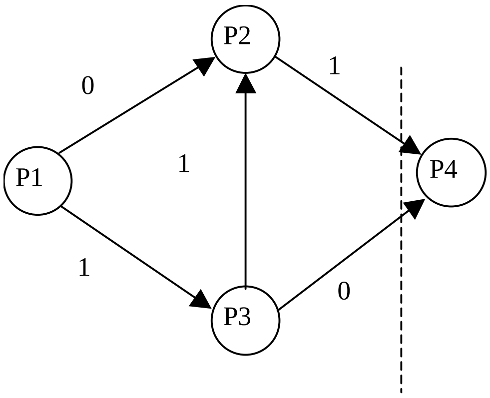
szabad kapacitás

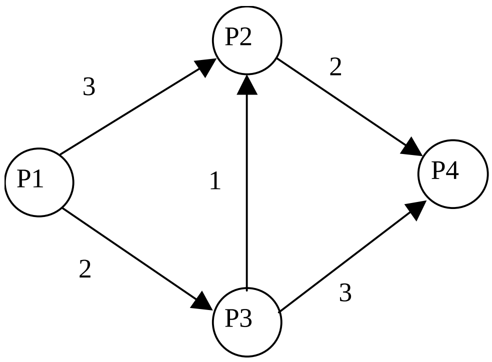


g folyam és a minimális vágás



f* folyam



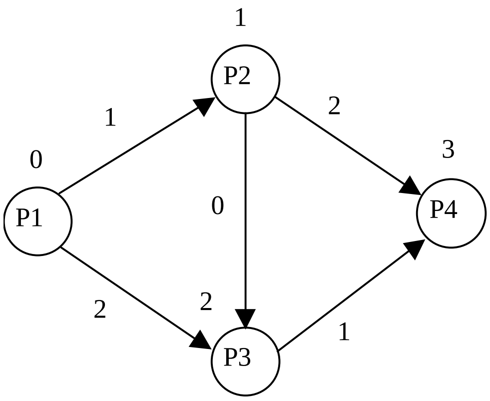


$\delta_{13} = 2 - 0 - 1 = 1$

$\delta_{34} = 4 - 2 - 1 = 1$

A visszamenő III. típusú (3,4)$\in$ A élen $\delta_{34} = 2 - 2 + 2 = 2$

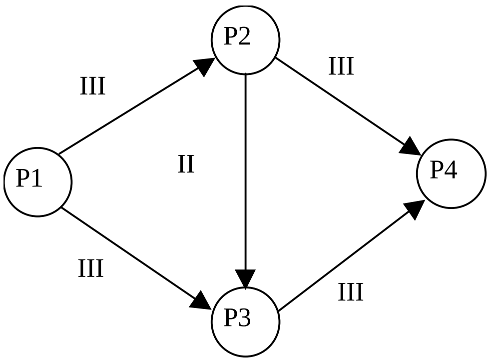
$\delta = 1$

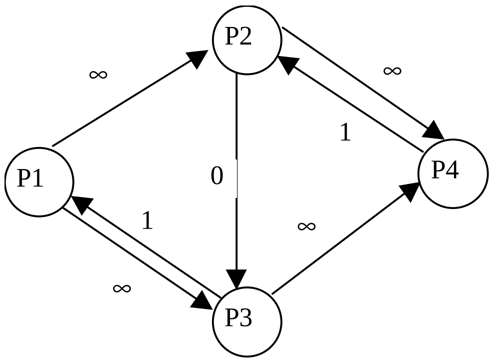


A költség növekedés:
$c_{23} + c_{13} + c_{34} + c_{12} + c_{13} + 3c_{24} + 3c_{34} + c_{34} = 1 + 1 + 3 + 3 + 1 + 3 + 9 + 3 = 24$

7. lépés

Élek osztályozása: szabad kapacitás

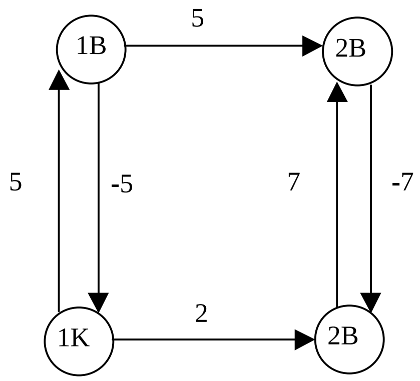




A g folyam végtelen ezért a minimális átfutási idő 4 nap.

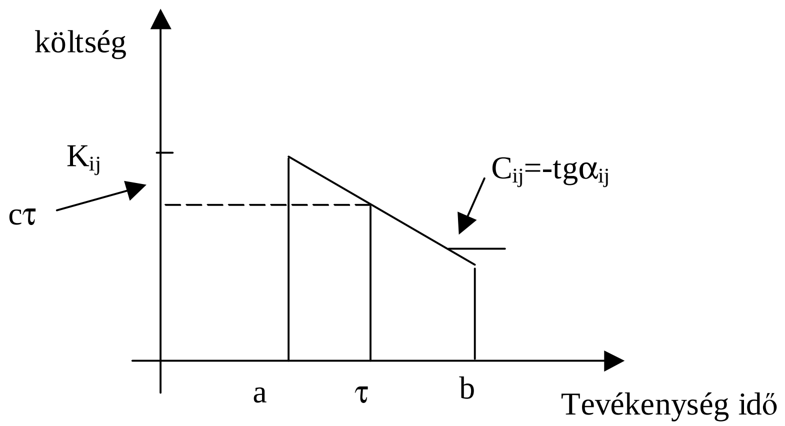
13. A költségtervezési feladat megoldása a csak minimális kapcsolatokat tartalmazó MPM háló

Minden tevékenységre igaz, hogy $\tau_{ij} = \mu_j - \mu_i$ (itt i és j rendre egy tevékenység kezdete és vége), valamint különböző tevékenységek kezdete és befejezte között további kapcsolatokat adhatunk meg, azaz $\tau_{ij} \leq \mu_j - \mu_i$, ahol i és j két különböző tevékenység kezdete vagy vége. Ábrázolásban ez azt jelenti, hogy minden tevékenységet 2 csomóponttal és a köztük lévő két nyíllal ábrázolunk.



A tervütem háló, a továbbiakban röviden csak háló, pontjai eseményeket az élek tevékenységeket jelentenek. Adottak a háló éleihez rendelt a_{ij} és b_{ij} egész számok,[1] amelyekre feltesszük hogy $a_{ij} \leq b_{ij}$ továbbá vagy mindkettő pozitív, vagy mindkettő negatív valamint az a költségtényező $c_{ij} \geq 0$, amely egy tevékenység felgyorsításához szükséges erőforrás mennyisége. Jelölje a tevékenységidőt τ_{ij}.

Jelöléseink közötti kapcsolatot szemlélteti a következő ábra.



Továbbá, ha b_{ij} negatív, akkor legyen $c_{ij} = 0$.

[1] Ha a_{ij} és b_{ij} nemnegatívak akkor jelentésük szerint a tevékenység idő elvégzésének normál ideje b_{ij} illetve roham ideje a_{ij}

Primál feladat (a kivitelező feladata).
Adott az [N,A] tervütem háló és háló éleihez rendelt a_{ij}, b_{ij} egész és $c_{ij} \geq 0, \forall ij \in \mathrm{A}$-ra nemnegatív egész értékek.

Keresendő azon $\mu_i, \forall i \in N$ -re és $\tau_{ij}, \forall ij \in A$-ra, ahol

$\tau_{ij} \leq \mu_j - \mu_i \quad \forall ij \in \mathrm{A}$

$\tau_{ij} \leq b_{ij} \quad \forall ij \in \mathrm{A}$

$\tau_{ij} \geq a_{ij} \quad \forall ij \in \mathrm{A}$

$\mu_1 = 0$

$\mu_t = 0$

és az összköltség minimális, azaz $\sum_{ij \in A} (K_{ij} - c_{ij}\tau_{ij})$ vagy max $\sum_{ij \in A} c_{ij}\tau_{ij}$.

Megjegyzés: Az, hogy egy ij tevékenységre $a_{ij} \leq \mu_j - \mu_i \leq b_{ij}$ fennálljon, elegendő az $a_{ij}, b_{ij}, a_{ji}, b_{ji}$ paramétereket úgy megadni, hogy $\tau_{ij} \leq \mu_j - \mu_i$, $a_{ij} \leq \tau_{ij} \leq b_{ij}$; illetve $\tau_{ji} \leq \mu_i - \mu_j$, $-b_{ij} = b_{ji} \leq \tau_{ij} \leq a_{ji} = -a_{ij}$; teljesüljenek. Továbbá, ha $c_{ij} > 0$ akkor a célfüggvény optimumát a minden ij-re $\tau_{ij} = \min(b_{ij}, \mu_j - \mu_i)$ helyen veszi fel, azaz minden tevékenységre $\tau_{ij} = \mu_j - \mu_i$ teljesül (nem minden ij él tevékenység), illetve ha $c_{ji} = 0$, akkor τ_{ji} tetszőleges, tehát úgy választható, hogy $\tau_{ji} = \mu_i - \mu_j$ teljesüljön.

A fenti feladathoz rendelhető a következő úgynevezett duál feladat.
Tekintsük az [N,k] hálózatot, amely olyan, hogy $k_{ij} = \infty$, ha $\forall ij \in \mathrm{A}$ és 0 egyébként.
Duál feladat (Munkaerő közvetítő feladata):
Keresendő az [N,k] hálózaton értelmezet $f_{ij}, \forall ij \in A$ folyam, amelyre

$$\sum_{ij \in A} f_{ji} - \sum_{ij \in A} f_{ij} = 0 \ \forall i \in N, i \neq 1, i \neq t$$

$$p\nu + \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} < c_{ij}}} (c_{ij} - f_{ij}) b_{ij} - \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} > c_{ij}}} (f_{ij} - c_{ij}) a_{ij} \ \text{minimális.}$$

Megjegyzés: A duál egy lehetséges interpretációja a következő. Egy munkaerő közvetítő vállalkozó munkaerőt biztosít a gyorsításhoz. A munkásokat p napon keresztül folyamatosan kell foglalkoztatni. A napi munkáslétszámot jelölje ν. Ha a gyorsításhoz egy tevékenységen szükséges munkásszám, azaz c_{ij}, nagyobb mint ami rendelkezésünkre áll, f_{ij}, akkor újabb embereket kell bérbe venni, a vállalkozó előzetes számításai szerint b_{ij} napig. Ellenkező esetben a vállalkozó bérbe adja a munkásait a_{ij} napig.

A két feladat közötti kapcsolatot mutatja meg a következő lemma.

Lemma: Minden (*)-ot – a primál feladat feltételeit- teljesítő μ és τ valamint az N,k hálózaton értelmezett tetszőleges f folyamra, melynek értéke ν teljesül az alábbi egyenlőtlenség.

$$\sum_{ij\in A} c_{ij}\tau_{ij} \le p\nu + \sum_{\substack{ij\in A\\ f_{ij}<c_{ij}}} \left(c_{ij} - f_{ij}\right) b_{ij} - \sum_{\substack{ij\in A\\ f_{ij}>c_{ij}}} \left(f_{ij} - c_{ij}\right) a_{ij}$$

ahol ν az f folyam értéke (a start csomópontból kifolyó folyamok összege).

Bizonyítás:

$$\sum_{ij\in A} c_{ij}\tau_{ij} = \sum_{\substack{ij\in A\\ f_{ij}<c_{ij}}} \left(f_{ij} + c_{ij} - f_{ij}\right)\tau_{ij} + \sum_{\substack{ij\in A\\ f_{ij}>c_{ij}}} \left(f_{ij} - \left(f_{ij} - c_{ij}\right)\right)\tau_{ij} =$$

$$\sum_{ij\in A} f_{ij}\tau_{ij} + \sum_{\substack{ij\in A\\ f_{ij}<c_{ij}}} \left(c_{ij} - f_{ij}\right)\tau_{ij} - \sum_{\substack{ij\in A\\ f_{ij}>c_{ij}}} \left(f_{ij} - c_{ij}\right)\tau_{ij} \le$$

$$\le \sum_{ij\in A} f_{ij}\left(\mu_j - \mu_i\right) + \sum_{\substack{ij\in A\\ f_{ij}<c_{ij}}} \left(c_{ij} - f_{ij}\right) b_{ij} - \sum_{\substack{ij\in A\\ f_{ij}>c_{ij}}} \left(f_{ij} - c_{ij}\right) a_{ij}$$

ahol

$$\sum_{ij\in A} f_{ij}\left(\mu_j - \mu_i\right) = \sum_{j\in N} \mu_j \sum_{ij\in A} f_{ij}\left(f_{ij} - f_{ji}\right) = \mu_1(-\nu) + \mu_t \nu$$

Ezzel bizonyítást befejeztük.

Következmény: Ha egyenlőség áll fenn, akkor a célfüggvények optimálisak.

Optimalitási kritérium:

Az egyenlőség fennállásának elégséges feltétele, hogy létezzen olyan folyam, amelyre:

1^0 Ha $\tau_{ij} < \mu_j - \mu_i$ akkor $f_{ij} = 0$
2^0 Ha $\tau_{ij} < b_{ij}$ akkor $f_{ij} \ge c_{ij}$
3^0 Ha $\tau_{ij} > a_{ij}$ akkor $f_{ij} \le c_{ij}$

Kritikusnak nevezünk egy tevékenységet vagy kapcsolatot, ha $\tau_{ij} = \mu_j - \mu_i$. Vegyük észre, hogy folyam csak ilyen éleken folyhat.

Ha egy optimális megoldást ismerünk, akkor maximális folyam feladat megoldásával megkapható egy újabb optimális megoldás az előbbinél kisebb átfutási időre. De ha hálónk hurkot tartalmaz, akkor a megengedett megoldás létezése is kérdéses és általában egy kiinduló optimális megoldáshoz egy minimális költségű folyamfeladatot kell megoldanunk. Speciális esetben (pld. hurokmentes, csak minimális kapcsolatokat tartalmazó MPM háló) azonban triviális a kiinduló optimális megoldás.

Észrevétel:

1. A primál feladat célfüggvényének maximalizálása miatt az optimális τ az alábbi értékeket veheti fel.
Ha $b_{ij} > 0$ akkor $\tau_{ij} = \min\lfloor \mu_j - \mu_i, b_{ij} \rfloor$, ha $a_{ij} < 0$ akkor $\tau_{ij} = \max\lfloor \mu_j - \mu_i, a_{ij} \rfloor$.
2. Egy optimális megoldás, $\tau_{ij} = b_{ij}$, $f_{ij} = 0, \forall ij \in A$.[2]

Az optimalitási kritériumoknak megfelelően a következő osztályokba sorolhatjuk az éleket.

A_I	1^0 teljesül, (esetleg 3^0 is)	$\tau_{ij} < \mu_j - \mu_i$	$f_{ij} = 0$
A_{II}	2^0 és 3^0 teljesül,	$a_{ij} < \tau_{ij} < b_{ij}, \tau_{ij} = \mu_j - \mu_i$	$f_{ij} = c_{ij}$
A_{III}	csak 2^0 teljesül,	$\tau_{ij} < b_{ij}, \tau_{ij} = \mu_j - \mu_i = a_{ij}$	$f_{ij} \geq c_{ij}$
A_{IV}	csak 3^0 teljesül,	$a_{ij} < \tau_{ij}, \tau_{ij} = \mu_j - \mu_i = b_{ij}$	$f_{ij} \leq c_{ij}$
A_V	egyik sem teljesül,	$\tau_{ij} = a_{ij} = b_{ij} = \mu_j - \mu_i$	$f_{ij} \geq 0$

Lemma: Ha valamely p-re létezik optimális μ ,τ, f akkor vagy létezik p*<p amelyre van optimális μ* ,τ*, f* megoldás vagy p a legkisebb érték amelyre a feladat megoldható.

Bizonyítás:

Készítsük el az alábbi [N,A',r] szabad kapacitás hálózatot, ahol A' olyan kibővítés A-nak, hogy ha $ij \in A$ de $ij \notin A$ akkor legyen $ji \in A'$ és ekkor $r_{ij} = 0$.[3]

Él csoport	Kapacitás az ij∈A élen	Kapacitás a ji élen (ji nem biztos, hogy A-ba tartozik!)
ij∈A_I	$r_{ij} = 0$,	$r_{ji} = 0$
ij∈A_{II}	$r_{ij} = 0$,	$r_{ji} = 0$
ij∈A_{III}	$r_{ij} = \infty$,	$r_{ji} = f_{ij} - c_{ij}$
ij∈A_{IV}	$r_{ji} = c_{ij} - f_{ij}$,	$r_{ji} = f_{ij}$
ij∈A_V	$r_{ij} = \infty$,	$r_{ji} = f_{ij}$

A többi él kapacitása legyen 0.
Keressünk maximális folyamot az előbb definiált hálózaton. Legyen a maximális folyam g a minimális vágás (S,T).
Legyen $f^* = g + f$. A kapacitások megválasztása miatt f* továbbra is megfelel az optimalitási kritériumoknak.
Ha g végtelen, akkor van olyan út s-ből t-be, amelyen minden él vagy az A_{III} vagy az A_V csoportba tartozik, tehát azon az úton minden $\tau_{ij} = a_{ij}$, így p a legkisebb érték (átfutási idő) amelyre a feladat megoldható.

[2] Hurokmentes hálóban ez a leghosszabb átfutási időhöz tartozó minimális költségű megoldás. Ha a hálóban hurok van, nem biztos, hogy ez a leghosszabb átfutási időhöz tartozó megoldás.
[3] Az így kialakított szabad kapacitás hálózatban csak a minden egyes algoritmus lépésnek megfelelő folyamnövekményeket ábrázoljuk. Ez egy úgynevezett „residual network”.

Ha g véges, akkor a vágásban lévő élek telítettek, azaz a vágásban vagy $f_{ij}^* = 0$ vagy $f_{ij}^* = c_{ij}$ ahol $ij \in (S,T)$. A vágásban csak A_I , A_{II} , A_{IV} típusú élek lehetnek, mert ezek kapacitása korlátos. A vágásban visszafelé bármilyen kapacitású él lehet. Vizsgáljuk meg a folyaminformációk segítségével, hogy a vágásban lévő és a vágásban visszafelé lévő élek milyen élcsoportba kerülhetnek az optimalitási kritériumok betartásával, ha változnak a T halmazban a potenciál értékek.
Ekkor egy élen a folyam vagy 0 vagy c.

Vágásban lévő élek $i \in S, j \in T, ij \in A,$.
Vágásban lévő élek $i \in S, j \in T, ij \in A,$.
$\mathbf{A_I}$ ($f_{ij}^* = 0$): a maximális csökkenés tetszőleges c-re, minden vágásban lévő A_I típusú élt figyelembe véve $\delta_1 = \min\limits_{\substack{i \in S,\, j \in T \\ ij \in A_I}} (\mu_j - \mu_i - b_{ij})$

$\mathbf{A_{II}}$**,** $\mathbf{A_{IV}}$ ($f_{ij}^* = c_{ij}$): a maximális csökkenés $\delta_2 = \min\limits_{\substack{i \in S,\, j \in T \\ ij \in A_{II}}} (\mu_j - \mu_i - a_{ij})$.

A vágásban visszafelé bármilyen él lehet. Ekkor $i \in T, j \in S, ij \in A$ és a potenciálértékek a következőképpen változnak.

$\mathbf{A_I}$, $\mathbf{A_{IV}}$ vagy $\mathbf{A_V}$ típusú élek estén a csökkenés tetszőleges nagy lehet.

$\mathbf{A_{II}}$, $\mathbf{A_{III}}$ élek esetén a maximális csökkenés tetszőleges c-re $\delta_{v2} = \min\limits_{\substack{i \in T,\, j \in S \\ ij \in A_{II} \vee A_{III}}} (b_{ij} - \mu_j + \mu_i)$.

A (t,s) él az algoritmus folyamán mindig visszafelé menő $\mathbf{A_{III}}$ típusú él lesz a vágásban. A maximális csökkentés a (t,s) élen: $b_{ts} - \mu_s + \mu_t = 0 - 0 + p$.

Most csökkentsük a potenciálértékeket úgy, hogy a folyamértékek változatlanok maradnak és az optimalitási kritérium továbbra is teljesül.

$\delta := \min(\delta_1, \delta_2, \delta_4, \delta_{v2}, \delta_{v3})$

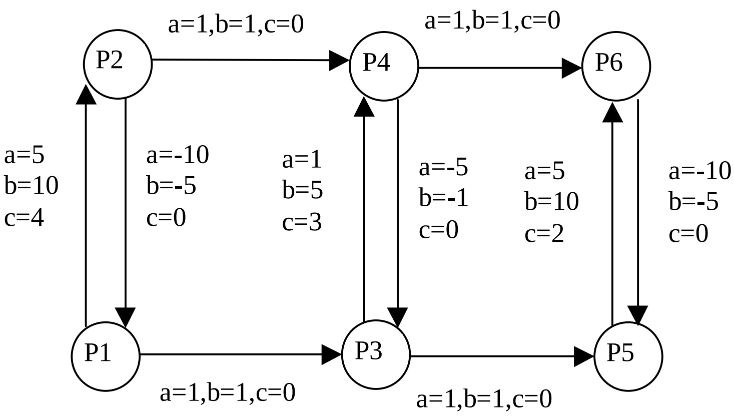
ahol δ biztosan pozitív mennyiség.

Legyenek az új potenciál értékek a követezők szerint megválasztva.

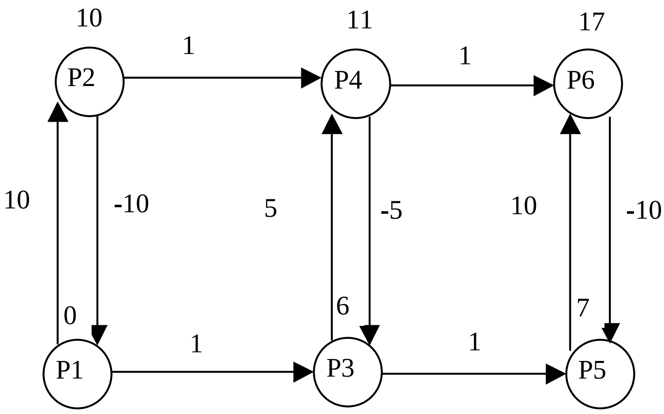
$\mu_i^* = \mu_i$, ha i∈S,
$\mu_i^* = \mu_i - \lambda$, ha i∈T,
ahol $\lambda = 0,1,2,...,\delta$
illetve $\tau_{ij}^* := \min[\mu_j - \mu_i, b_{ij}]$.
A μ^*, τ^*, f^* értékek az optimalitási kritériumot kielégítik.
Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Példa

1. Példa: Határozzuk meg az alábbi tervütem hálón minden lehetséges átfutási időre a minimális költségű megoldást.



Kiinduló megoldás



f=0 minden élre.

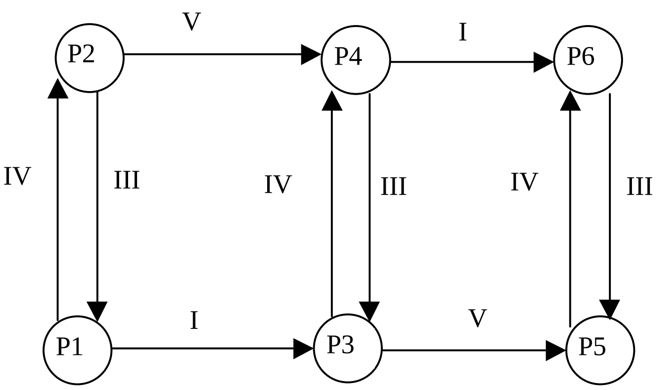
Primál célfüggvény értéke:

$$\sum_{ij\in A} c_{ij}\tau_{ij} = c_{12}\tau_{12} + c_{34}\tau_{34} + c_{56}\tau_{56} = 40 + 15 + 20 = 75 .$$

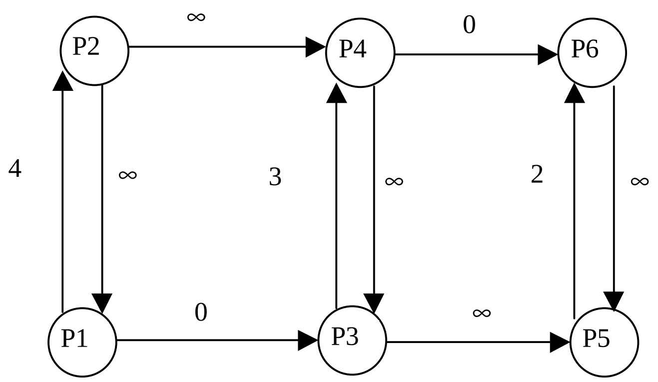
A duál célfüggvény értéke:

$$p\nu + (c_{12} - f_{12})b_{12} + (c_{34} - f_{34})b_{34} + (c_{56} - f_{56})b_{56} = 0 + 40 + 15 + 20 = 75$$

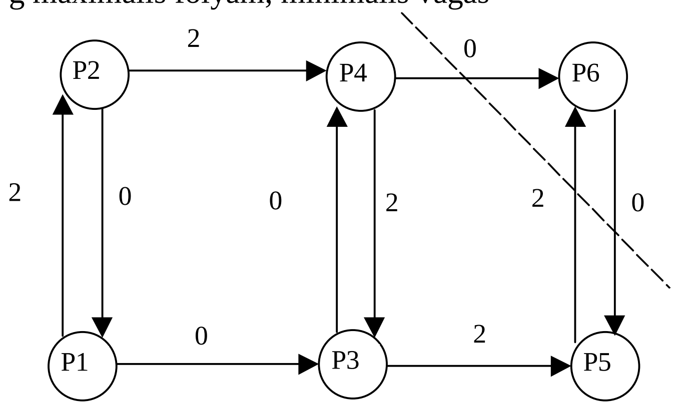
Élek osztályozása



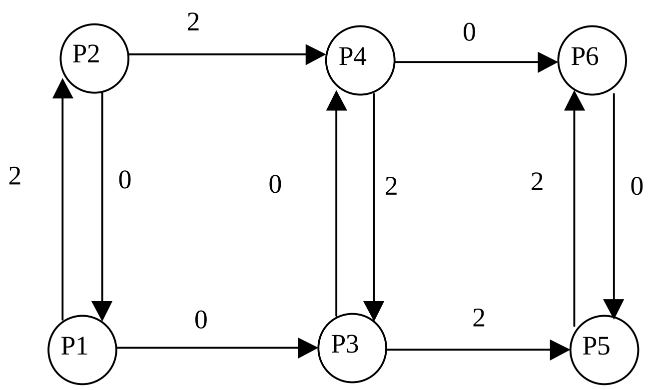
szabad kapacitás hálózat



g maximális folyam, minimális vágás



f* folyam



$\delta_{46} = 17 - 11 - 1 = 5$

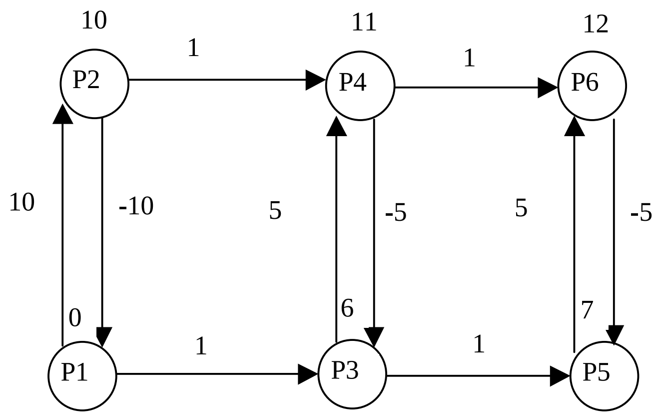
$\delta_{56} = 17 - 7 - 5 = 5$

a vágásban visszafelé

$\delta_{65} = -5 - 7 + 17 = 5$

$\delta = 5$

Az új potenciál értékek és tevékenységidők



Primál célfüggvény értéke:

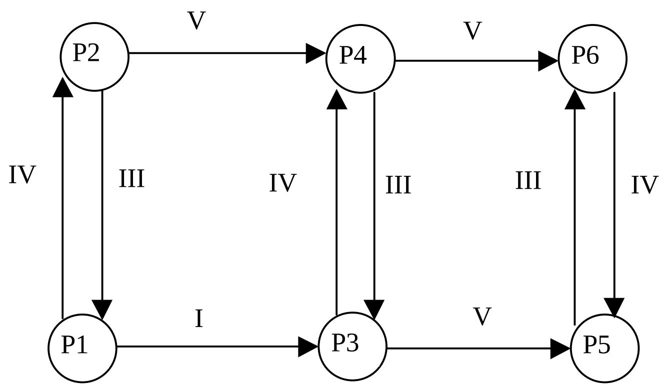
$$\sum_{ij\in A} c_{\iota\varphi}\tau_{ij} = c_{12}\tau_{12} + c_{34}\tau_{34} + c_{56}\tau_{56} = 40+15+10 = 65\,.$$

A duál célfüggvény értéke:

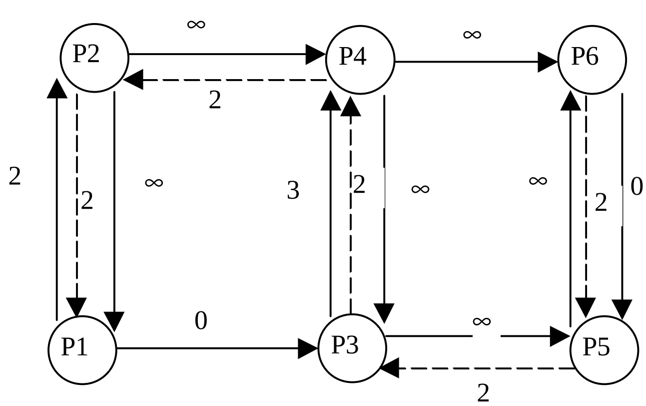
$$p\nu + (c_{12} - f_{12})b_{12} + (c_{34} - f_{34})b_{34} - (f_{24} - c_{24})a_{24} - (f_{43} - c_{43})a_{43} - (f_{35} - c_{35})a_{35} =$$
$$= 24 + 20 + 15 - 2 + 10 - 2 = 65$$

2. iterációs lépés

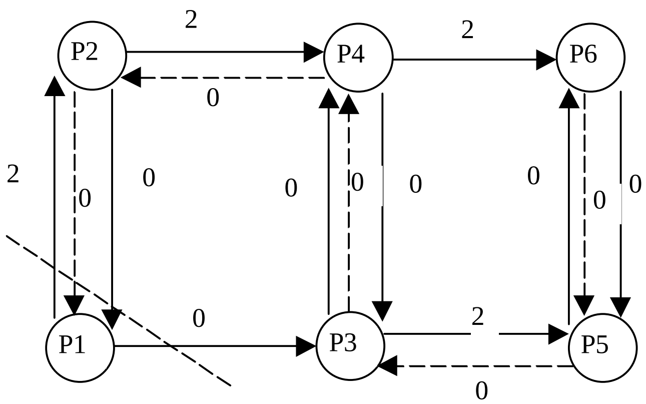
Élek osztályozása (csak a vágásban lévő élek változhattak !)



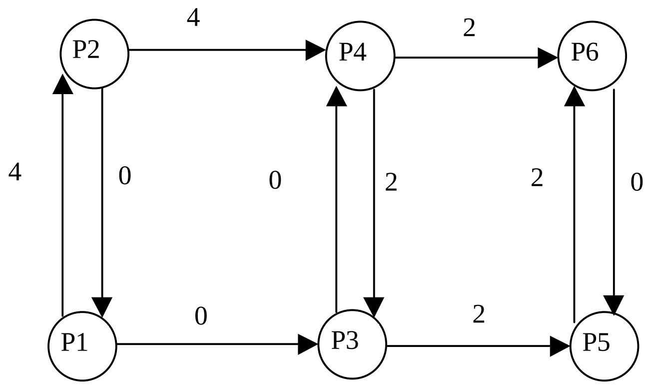
szabad kapacitás hálózat (szaggatott vonallal jelöltem a csak a folyamszámításhoz szükséges éleket)



g maximális folyam, minimális vágás (több lehetőség közül tetszés szerint választottam)

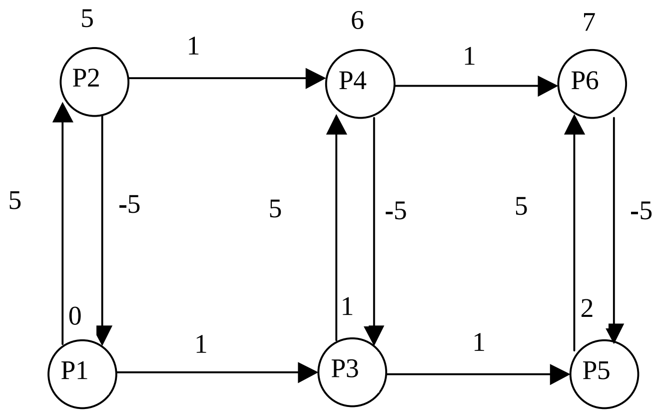


f* folyam



$\delta_{12} = 10 - 0 - 5 = 5$
$\delta_{13} = 6 - 0 - 1 = 5$
a vágásban visszafelé
$\delta_{21} = -5 - 0 + 10 = 5$
$\delta = 5$

az új potenciál értékek és tevékenység idők



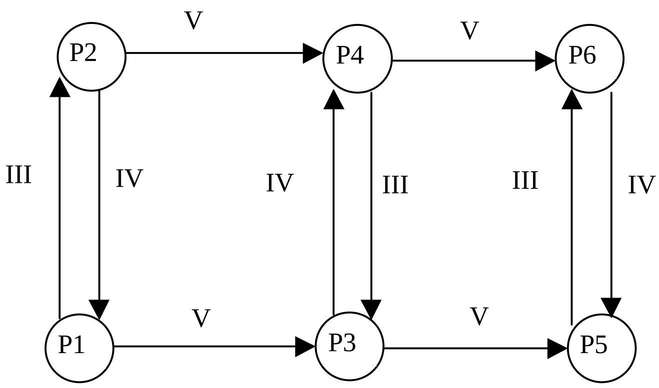
$$\sum_{ij\in A} c_{ij}\tau_{ij} = c_{12}\tau_{12} + c_{34}\tau_{34} + c_{56}\tau_{56} = 20 + 15 + 10 = 45\,.$$

A duál célfüggvény értéke:

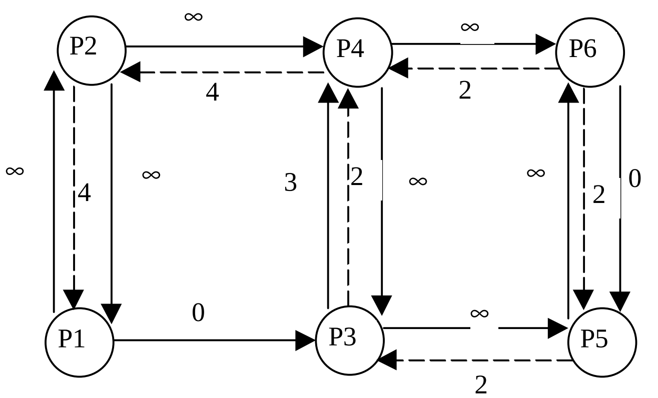
$$pv + (c_{34} - f_{34})b_{34} - (f_{24} - c_{24})a_{24} - (f_{43} - c_{43})a_{43} - (f_{46} - c_{46})a_{46} - (f_{35} - c_{35})a_{35} =$$
$$= 28 + 15 - 4 + 10 - 2 - 2 = 45$$

3. iteráció

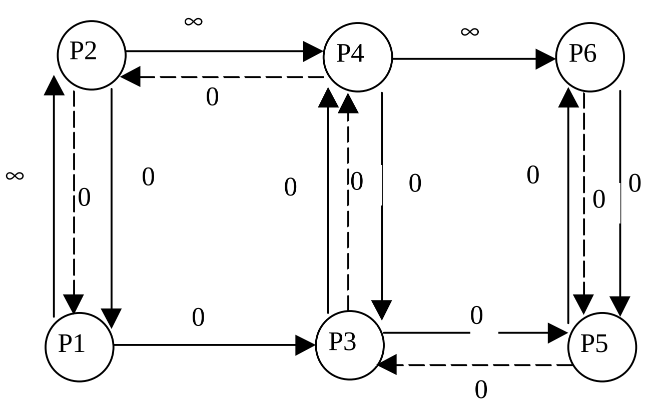
Élek osztályozása (csak a vágásban lévő élek változhattak !)



szabad kapacitás hálózat (szaggatott vonallal jelöltem a csak a folyamszámításhoz szükséges éleket)

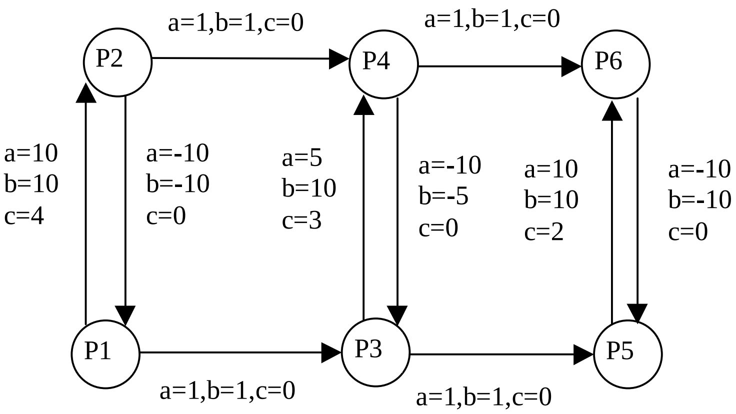


g maximális folyam, minimális vágás (több lehetőség közül tetszés szerint választottam)

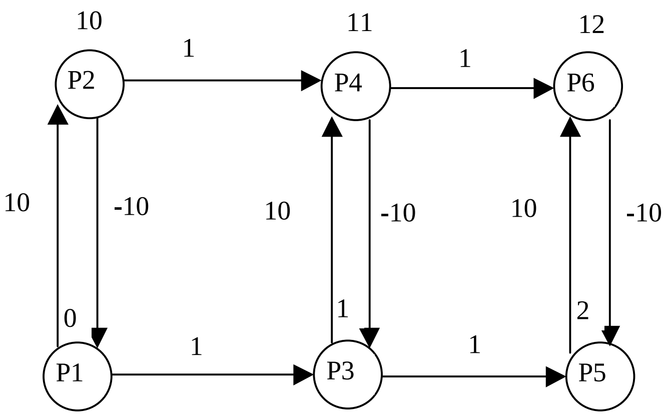


Mivel a maximális folyam végtelen, ezért algoritmusunk leáll. 7 nap az elérhető legrövidebb átfutási idő.

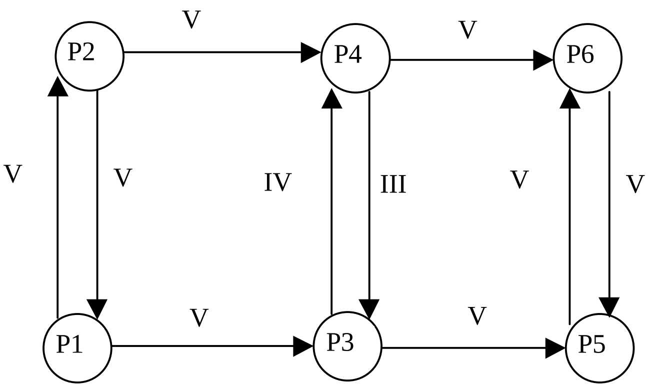
2. Példa: Határozzuk meg az alábbi tervütem hálón a minden lehetséges átfutási időre a minimális költségű megoldást.



Kiinduló megoldás



Élek osztályozása



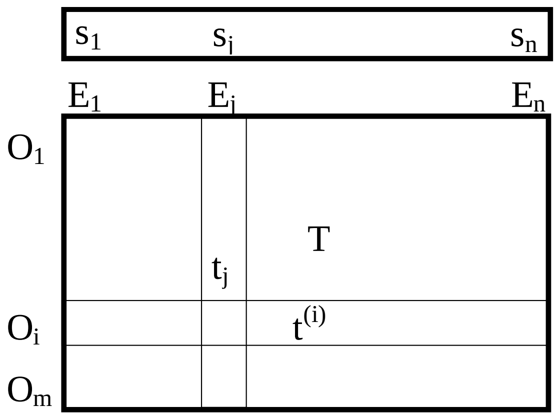
Többtényezős értékelés

A többtényezős értékelés feladata a következő: Több döntéshozónak több objektumot vagy variánst kell egymással összehasonlítva értékelnie és ezek közül az egyik értékét kell meghatározni.
A többtényezős értékelés során általában az alábbi részfeladatokat hajtják végre:

I. az **összehasonlítani kívánt objektumok kiválasztása**,
II. az **értékelési tényezők és súlyaik meghatározása**, amely általában az értékelési tényezők fa struktúrájú rendezése útján végezhető el,
III. ezek után **az objektumokat az értékelési tényezők szerint értékelni kell**, azaz meg kell állapítani, az egyes objektumok értékét minden értékelési tényező szerint,
IV. az **értékelő eljárás kiválasztása** és **az értékelés elvégzése**,

A többtényezős értékelési feladat alapmodelljei

Vezessük be az alábbi jelöléseket. Legyen T egy m sorból és n oszlopból álló mátrix, valamint $S=(s_1,...,s_j,...s_n)$-nel jelöljük az E_1 , E_2 ,...,E_j ,...,E_n szempontok súlyait. Az $t_{i,j}$ nemnegatív szám azt mutatja, hogy az O_i objektum az E_j tényező szempontjából mennyit ér. Az alaptáblát úgy tekinthetjük, hogy valamely E_j tényező alapján a j-edik oszlopban az objektumokhoz rendelt értékek vannak.



A $t_{i,j}$ >0 az i-edik objektumra vonatkozó értéket jelenti a j-edik szempont szerint. A t_j vektor tartalmazza egy szempont szerinti értékeket az összes objektumra, míg a t_i vektor az i-edik objektumra vonatkozó értékeket minden szempont szerint. A feladat a következő. *Ha adott a T mátrix (utilitás mátrix), akkor rakjuk sorrendbe az m darab objektumot n darab értékelési tényező szerint valamilyen univerzális értékelő módszerrel.* Az univerzális szó alatt azt kell érteni, hogy az objektumokat minden értékelési tényező figyelembe vételével kell sorba kell állítani.
Azért, hogy a bemutatott elméleti háttér kézzelfoghatóvá váljon előrevetítem az alábbi kis példát, amelyen a tárgyalt alapmodelleket reprezentáljuk.

Példa: Legyenek O_1, O_2, O_3, O_4, az összemérni kívánt objektumok, amelyeket az E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, értékelési tényezők szerint hasonlítunk össze. A táblázatban a nagyobb érték jelenti a jobb értéket.

	E_1.	E_2.	E_3.	E_4.	E_5.	E_6.
O_1.	1	2	4	2	1	4
O_2.	2	3	3	2	1	1
O_3.	3	3	2	3	4	1
O_4.	4	2	1	1	3	2

Tegyük fel továbbá, hogy minden értékelési tényező súlya egy, azaz $s_1= s_2= s_3= s_4= s_5= s_6=1$.

Értékelési alapelvek

Legyen adott több tanya. Feladatunk kút fúrása, ahonnan egészséges ivóvízzel tudjuk ellátni a tanyákat. Kérdés az, hogy hol legyen a kút, milyen elv alapján válasszuk meg a helyét.

Tegyük fel, hogy műszaki szempontból minden pont lehetséges.
Ha az elvet a beruházásban érdekelt közösség határozza meg, akkor az alábbi két elv lehetséges:

- mivel a kúttól a házig a vizet el kell szállítani, a közösség dönthet úgy, hogy az utak összhossza legyen minimális.
- másrészt „együttérezve a legpechesebbel” a közösség olyan helyet is választhat a kútnak, hogy a tanyáktól a kútig vezető utak közül a leghosszabb is a legrövidebb legyen.

Az előbbi elv a Bridgman feladatra utóbbi az Arimoto-Blahut feladatra vezet.

Miután az elveket meghatároztuk, definiálnunk kell azt, hogy miképpen m.rjük két pont közötti eltérést. Erre szolgál a következő meghatározás.

Definíció: Az $\underline{\mathbf{a}}=(a_1,...,a_j,...,a_n)>0$ vektornak a $\underline{\mathbf{b}}=(b_1,...,b_2,...b_n)>0$ vektortól való eltérésén az alábbi kifejezés értékét értjük:

$$D(\underline{a}II\underline{b}) = \sum_{j=1}^{n}\left(a_j \ln\frac{a_j}{b_j} - a_j + b_j\right)$$

Elemi számolással igazolható, hogy D($\underline{\mathbf{a}}$II$\underline{\mathbf{b}}$) három alapvető tulajdonsága az alábbi.

1. D($\underline{\mathbf{a}}$II$\underline{\mathbf{b}}$)≥0,
2. D($\underline{\mathbf{a}}$II$\underline{\mathbf{b}}$)=0 akkor és csak akkor, ha $\underline{\mathbf{a}}=\underline{\mathbf{b}}$.

Bizonyítás:

$$t-1 \geq \log t$$

$$-\log t - 1 + t \geq 0 \qquad \mathrm{t} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} \geq 0$$

$$-\log\frac{b}{a} - 1 + \frac{b}{a} \geq 0 \qquad / \cdot \mathrm{a}$$

$$\mathrm{a}\log\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} - a + b \geq 0$$

$$\frac{b}{a} = 1 \qquad \mathrm{a} = \mathrm{b}$$

3. tulajdonság (asszimetria).
D(**a**II**b**)≠D(**b**II**a**)
Elemi számolással igazolható.

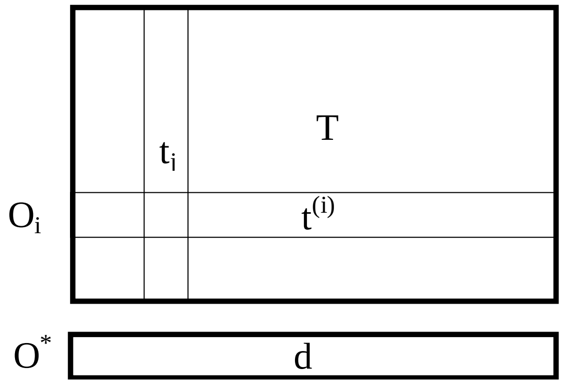
Mielőtt az **a** és **b** sorrendjének szerepére rátérnénk, két fontos fogalmat kell bevezetnünk: "a priori" és "a posteriori" tulajdonságokat. Ha egy esemény időben megelőz egy másik eseményt, az elsőt "a priorinak", a másodikat "a posteriorinak" nevezzük. Ha két állítás között nincs időbeli kapcsolat, akkor az elképzelést "a priori", a valóságot "a posteriori" állításnak hívjuk. A D(**a**II**b**) kifejezésben **b** jelölje az "a priori", (esemény előtti vagy elképzelés) és **a** jelöli az "a posteriori" (esemény utáni vagy valóság) értéket. Az előbbiekből érzékelhető, hogy a szimmetria, mint tulajdonság az eltérésfüggvényekkel szemben nem feltétlenül szükséges követelmény.
Tehát eltérésfüggvényünk nem szimmetrikus, ezért a két alapelv további két-két esetre bomlik.

I. Legyen az érték (y vektor) „a posteriori”
Legyen az utilitás (t_j vektorok) „a priori” szerepkörben.

II. Legyen az utilitás (t_j vektorok) „a posteriori”
Legyen az érték (y vektor) „a priori” szerepkörben.

A dominancia módszer

A módszer nagyon egyszerű elven alapul és a felhasználásra kerülő matematikai eszköztár is elemi, ezért ezen módszer nagyon elterjedt. A modell az alábbi elven nyugszik: Tekintünk egy domináns O^* objektumot, amelyet a hozzátartozó $\underline{\mathbf{d}}^*$ domináns vektorral jellemezhetünk. Ezek után kiszámoljuk a D($\underline{\mathbf{t}}^{(\mathbf{i})}II\underline{\mathbf{d}}$) eltéréseket. Ahol ez kisebb azt az objektumot jobbnak tekintjük. A domináns vektor az általunk elképzelt vagy elvárt legjobb objektum jellemzőit tartalmazza. Meghatározása például oly módon történhet, hogy minden oszlopból kiválasztjuk a "legjobb" értéket és ez lesz a domináns, vagy számunkra ideális objektum.



Most visszatérünk a példánkhoz, hogy az elméleti fejtegetést kézzelfoghatóvá tegyük. A domináns vektort ez esetben úgy választottuk ki, hogy minden értékelési tényező szerint vettük a legjobb azaz a legnagyobb értéket.

domináns (d)	4	3	4	3	4	4

Gyakorlásképpen számítsuk ki az O_1 és a domináns (O^*) objektum eltérését, azaz $D\left(O_1 II O^*\right) = \sum_{j=1}^{n} D\left(t_j^{(1)} II d_j\right)$-et.

$$\sum_{j=1}^{n} D\left(t_j^{(1)} II d_j\right) = 1\ln\frac{1}{4} - 1 + 4 + 2\ln\frac{2}{3} - 2 + 3 + 4\ln\frac{4}{4} - 4 + 4 +$$

$$+2\ln\frac{2}{3} - 2 + 3 + 1\ln\frac{1}{4} - 1 + 4 + 4\ln\frac{4}{4} - 4 + 4 = 3.605$$

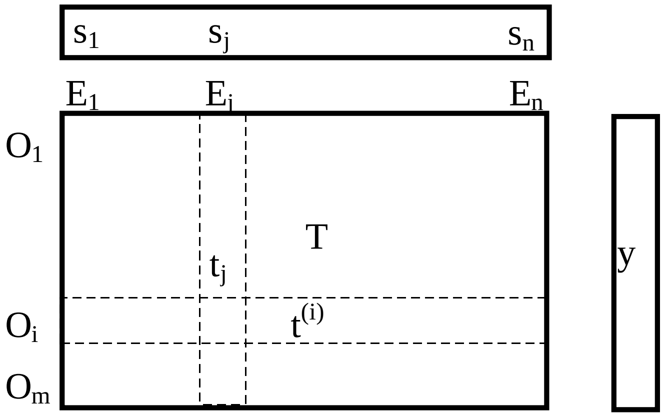
A szükséges számítások elvégzése után a kapott univerzális értékelő vektor elemenként a következő.

$y_1=D(\mathbf{t}^{(1)}II\mathbf{d})=3.605$
$y_2=D(\mathbf{t}^{(2)}II\mathbf{d})=4.167$
$y_3=D(\mathbf{t}^{(3)}II\mathbf{d})=2.364$
$y_4=D(\mathbf{t}^{(4)}II\mathbf{d})=3.454$

Mivel $D(\underline{\mathbf{t}}^{(3)}II\underline{\mathbf{d}})$ a legkisebb érték, ezért megállapíthatjuk, hogy a 3. objektum van a domináns objektumhoz a legközelebb. Az objektumok sorrendje a következő: 3.,4.,1.,2. .

A sorba rendezésre két elvet használunk fel.
1. Adott súlyrendszer esetén az átlagos eltérés – a t_j vektorok és az y értékelő vektor eltéréseinek átlaga- legyen minimális.
2. Adott súlyrendszer esetén azt szeretnénk elérni, hogy a legnagyobb eltérés eltérés – a t_j vektorok és az y értékelő vektor eltérései közül a legnagyobb is a lehető legkisebb legyen.

Bridgman modell (Adott súlyrendszer estén az átlagos eltérés minimalizálása.)



A 3. fejezetben már utaltunk rá, hogy az eltérésfüggvényünk nem szimmetrikus, azaz $D(\underline{\mathbf{a}}II\underline{\mathbf{b}})\neq D(\underline{\mathbf{b}}II\underline{\mathbf{a}})$. Attól függően, hogy az értékelési tényezőket (a $\underline{\mathbf{t}}_j$ vektorokat) „a prori”-nak és az értékelő $\underline{\mathbf{y}}$ vektort „a posteriori” -nak tekintjük-e, további két-két esetre bomlik az általnuk Bradgmanról és Arimoto-Blahutról elnevezett modell.

Az átlagos eltérés minimalizálása

Bridgman I.
Első esetben legyen $\underline{\mathbf{y}}$ az „a posteriori” és $\underline{\mathbf{t}}$ az „a priori”. Választásunk mellett azzal lehetne érvelni, hogy először nyilván mérünk valamit, a mérés eredményeit a $\underline{\mathbf{t}}_j$ vektorokban tároljuk, majd következik az esemény azaz az értékelés, amelynek eredménye $\underline{\mathbf{y}}$ vektor. Ekkor tehát választásunkat az időbeliség befolyásolta.
Feladatunk tehát a következő: *olyan* $\underline{\mathbf{y}}$ *átlagvektort keresünk, melyre az átlagos eltérés minimális. Azaz*

$$\sum_{j=1}^{n} s_j D\left(\underline{y} II \underline{t}_j\right) \text{ legyen minimális.}$$

Deriválással belátható, hogy *a fenti kifejezés akkor minimális, ha*

$$y_i = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} s_j \ln(t_{ij})\right), i = 1,\ldots,m.$$

A modellt első alkalmazójáról Bridgman modellnek nevezik.

Példánkat a fenti módszer szerint megoldva kapjuk az alábbi eredményeket:
$y_1=64$, $y_2=36$, $y_3=216$, $y_4=48$, tehát az objektumok sorrendje 3.,1.,4.,2..

Bridgman II.
Legyen $\underline{\mathbf{t}}$ az „a posteriori” és $\underline{\mathbf{y}}$ az „a priori”. Ezen választás mellett nyilván nem időbeliségük miatt lehetne érvelni. A módszer mellett mérnöki megfontolások szólnak. Ugyanis ekkor $\underline{\mathbf{t}}$ a valóság és $\underline{\mathbf{y}}$ az elképzelés. Márpedig aki mér, az tekintheti úgy, hogy ő a valóságot méri, az értékelő vektor csak elképzelés. Feladatunk tehát a következő: o*lyan* $\underline{\mathbf{y}}$ *átlagvektort keresünk, melyre az átlagos eltérés minimális. Azaz*

$$\sum_{j=1}^{n} s_j D\left(\underline{t}_j II \underline{y}\right) \text{ \textit{legyen minimális.}}$$

Deriválással belátható, hogy *a fenti kifejezés akkor minimális, ha* $y_i = \sum_{j=1}^{n} s_j t_{ij}, i = 1,\ldots,m$.

Ha példánkat a Bridgman módszer ezen változatával oldjuk meg, akkor az univerzális értékelő vektorra az alábbi eredményt kapjuk.

y_1=14, y_2=12, y_3=16, y_4=13.

Tehát az objektumok sorrendje: 3.,1.,4.,2..

Természetesen véletlen egybeesés, hogy a Bridgman módszer mindkét esetben ugyanazt az eredményt szolgáltatta.

Ez utóbbi modell egyszerűsége miatt igen közkedvelt.

A maximális eltérés minimalizálása (Arimoto-Blahut)

I. Legyen az utilitás (t_j vektorok) „a posteriori”
Legyen az érték (y vektor) „a priori” szerepkörben.

$$D\left(t_j \| y\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(t_{i,j} \log \frac{t_{i,j}}{y_i} - t_{i,j} + y_i \right)$$

Primál feladat

Feladatunk adott T (n,m) mátrix esetén „$\min_y \max_j D\left(t_j \| y\right)$”, amelyet egy új d változó bevezetésével a következőképpen írhatunk.

Keresendő olyan d, $y \in R_+^m$
amelyre a d minimális,
feltéve, hogy

$$D\left(t_j \| y\right) \le d \quad (j = 1,\dots,n)$$

A primál feladathoz tartozó duál feladat a következő Adott

Duál feladat

Keresendő $z \in R_+^m$, $x \in R_\oplus^n$

melyre $\sum_{j=1}^{n} x_j D\left(t_j \| z\right)$ maximális

Feltéve, hogy

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad x \ge 0$$

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} x_j t_{ij} \quad (i = 1,\dots,m)$$

A feladat megoldására használt algoritmus az alábbi.

0. $x_j^{(1)} = \frac{1}{n} \quad (j = 1,\dots,n)$

2. $y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j t_{ij} \quad (i = 1,\dots,m)$

3. $d_j := D\left(t_j \middle\| y\right) \quad (j = 1,\dots,n)$

4. $d := \max d_j$

5. $c := \sum_{j=1}^{n} x_j d_j$

6. $if \quad d - c \le \varepsilon \quad then \quad stop, \quad else \quad x_j := \frac{x_j d_j}{c} \quad (j = 1,\dots,n)$