

ALGORITMUS AZ $F2 \mid \text{OVERLAP} \mid C_{\max}$ MEGOLDÁSÁRA

VATTAI ZOLTÁN ANDRÁS

Budapest

A cikk az $F2 \mid \text{overlap} \mid C_{\max}$ feladat megoldására adható algoritmust tárgyal. Az eljárás bemutatásának előkészítése során sor kerül a kvázi „O”-alakú és a szigorúan véve is „O”-alakú ütemterv definíciójára. Újszerű bizonyítást nyer Johnson algoritmus az $F2 \parallel C_{\max}$ feladatra, illetve tételek kimondása és igazolása során mutatjuk meg, hogy a közölt algoritmus egyaránt helyes megoldást ad az $F2 \parallel C_{\max}$, $F2 \mid \text{idle} \mid C_{\max}$ és $F2 \mid \text{overlap, idle} \mid C_{\max}$ feladatokra is.

Kulcsszavak: *termelésirányítás, ütemezés (scheduling),
egyutas ütemezési feladat (flow-shop)*

1. Bevezetés

A feladat a következőképpen foglалható össze:

Adva van $m \geq 2$ munkadarab, melynek előállításában ugyanaz az $n = 2$ db gép működik közre, munkadarabonként azonosan adott, rögzített sorrendben (*kétegépes, egyutas ütemezési feladat*). Minden munkadarab megmunkálásában mindkét gép részt vesz, munkadarabonként és gépenként ismert ($T_{i,\ell} > 0$) megmunkálási idővel. A két gép a munkadarabokat azonos sorrendben veszi munka alá (*előzés nem megengedett*). Egy gép egy munkadarab megmunkálását folyamatosan, megszakítás nélkül végzi (*folyamatmegszakítás nem megengedett*). Egy munkadarabon a két gép munkavégzése között időbeli átfedés lehetséges (*átlapolásos feladat*), melynek maximális mértékét munkadarabonként a hálótechnikából kölcsönzött $CR_i \geq 0$ kritikus megközelítéssel [3] adjuk meg. (Az átlapolásos ütemezési feladatok tipikusak az építőiparban, illetve nagy munkaigényű termékek vagy termékszériák előállításánál.) Feladatunk a munkadarabok sorrendjének meghatározása úgy, hogy az előállításukhoz szükséges össz kivitelezési idő ($T = C_{\max}$) a lehető legkisebb legyen. (Rendelésre állási-, átállítási- és határidők, valamint költségek, vagy sorrendi megkötések figyelembevétele nem része a feladatnak.) A Graham, Lenstra és társaik által 1981-ben javasolt szimbólumrendszert [1] alkalmazva a feladatot $F2 \mid \text{overlap} \mid C_{\max}$ kóddal jelöljük. A tárgyalás szemléletesebbé tételéhez az eredeti feltételrendszerhez még egy megkötést adunk, nevezetesen, hogy a gépek ütemezésében nem lehetnek állásidők. Ez utóbbi alatt azt értjük, hogy ha egy gép bármelyik munkadarabbal megkezdte a munkadarabok megmunkálását, akkor megszakítás nélkül valamennyi munkadarab megmunkálását elvégzi. (Az [1] dolgozat ilyen típusú megkötése nem ad jelölési javaslatot.) A cikk utolsó részében megmutatjuk, hogy ezen megkötésnek két gép esetén semmi hatása nincs a feladatra.

Alkalmazott jelölések:

- $T_{i,1}$ és $T_{i,2}$: A gépek tevékenységideje az i munkadarabon (input adat).
- CR_i : A két gép időbeli ütemezésénél az átfedés maximalizálásához megadott minimális követési érték az i munkadarabon (input adat). Jelentése: az adott munkadarabon a két gép ütemezése semmilyen készségi foknál nem kerülhet időben közelebb egymáshoz, mint a megadott érték.
- K_i és B_i : A két gép ütemezése közötti minimális idő az i munkadarabon a megmunkálások kezdésekor (0%-os készségi állapot), illetve befejezésekor (100%-os készségi állapot). „Kezdési-, illetve befejezési követési idő” (számított segédmenyiségek).
- D_e : A két gép ütemezése közötti idő a vizsgált- és az azt megelőző ütemtervrészlet csatlakozásánál.
- D_u : A két gép ütemezése közötti idő a vizsgált- és az azt követő ütemtervrészlet csatlakozásánál.
- δ_i : Követési idő növekménye az i munkadarabon.
- $T = C_{\max}$: Teljes megvalósítási idő (keresett érték).

A megoldás szemléltetésére az ütemezési feladatoknál megszokottól eltérően nem sávós ütemtervet, hanem kétdimenziós ábrákat, ún. ciklogramot (egyfajta progressziógörbe-rendszert, vagy „készségi állapot görbe” rendszert [4]) alkalmazunk. Az eljárás során fokozott figyelmet szentelünk a kezdési-, illetve befejezési követési időknél, melyek meghatározására egyszerű algoritmust adunk.

(Lásd: 1. ábra)

$$B_i = \max\{CR_i, CR_i + T_{i,2} - T_{i,1}\}$$

$$K_i = \max\{CR_i, CR_i + T_{i,1} - T_{i,2}\}$$

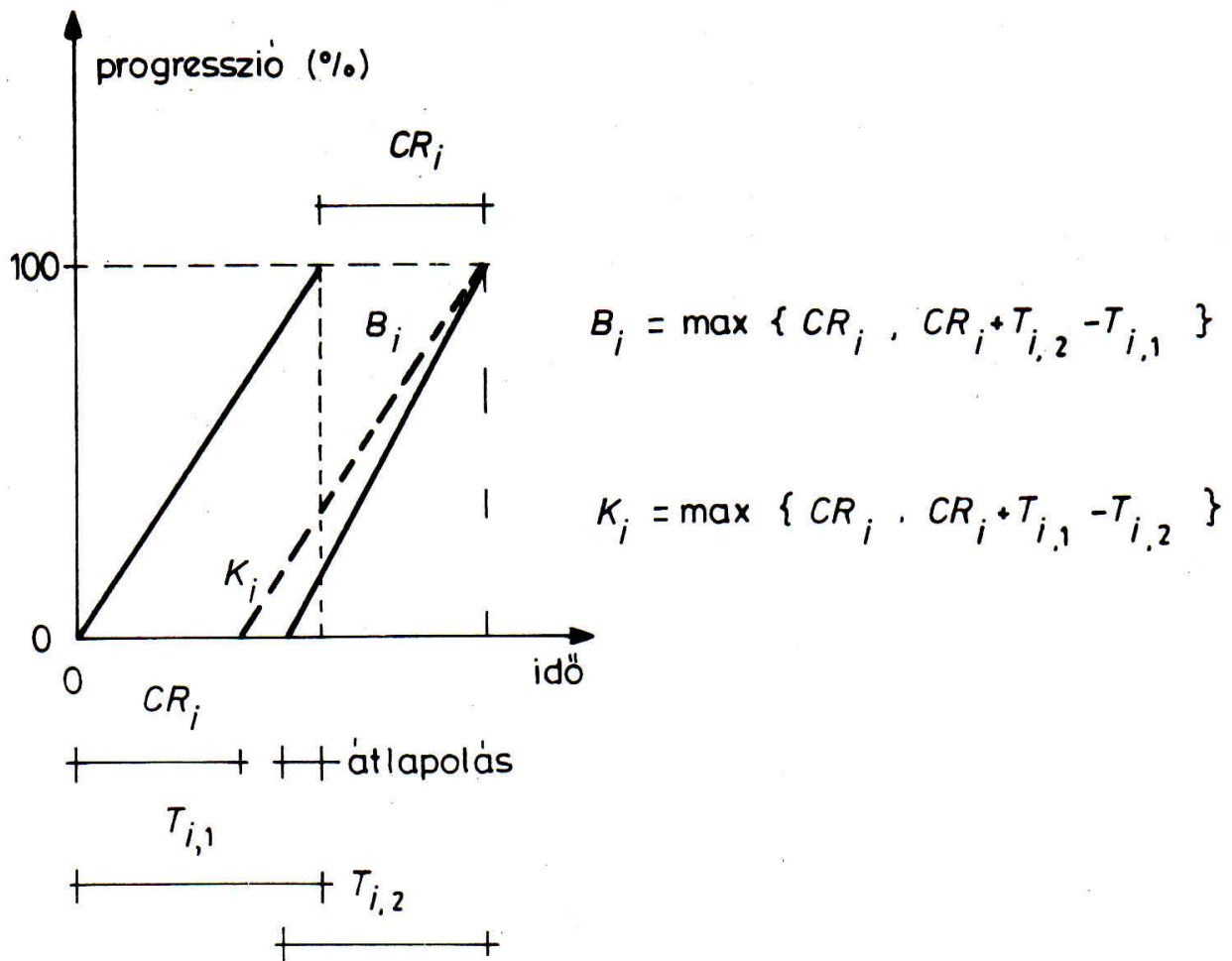
2. Kvázi „O” alakú ütemterv

2.1 Definíció. Kvázi „O”-alakú az ütemterv, ha nem található benne olyan munkadarabpár, melyre

$$(2.1) \quad B_i < K_j \quad \text{és} \quad B_j > K_i \quad i < j$$

2.1 LEMMA. Létezik olyan optimális ütemterv, mely kvázi „O”-alakú!

Bizonyítás. Mivel a gépek számára folyamatos munkavégzést írtunk elő, és mivel az egyes gépeken az összes munkadarab megmunkálásához szükséges idő — bármely sorrendben történjék a munkadarabok megmunkálása — konstans, a teljes kivitelezési idő — mint célfüggvény — helyett elegendő a két gép ütemezése közötti időt vizsgálnunk a legelső munkadarab megmunkálásainak kezdetekor, illetve



1. ábra

Ciklogram a követési idők értelmezésével és meghatározásával

a legutolsó munkadarab megmunkálásainak befejezésekor (lásd még 3.1 Tétel- és Bizonyítás, valamint 10. ábra). Ugyancsak a megmunkálások folyamatosságából adódóan, ha egy kialakított ütemterv belsejében egy ütemtervrészt módosítunk, akkor a módosításnak az esetleges célértéket növelő hatásai a kapcsolódó megelőző- és követő ütemtervrészekre (azok valamennyi rész-ütemtervére — így a legelsőnek, illetve a legutolsóknak választott munkadarabok megmunkálására is) teljes terjedelmükkel tovább adódnak. (Ugyanez az esetleges célértéket csökkentő hatásokról már nem állítható ilyen bizonyosan, hiszen például egy már optimális megoldást jelentő sorrend esetében a módosítás lokálisan hiába mutatna célértéket csökkentő hatást, a célérték az optimalitásból adódóan tovább már nem csökkenthető.)

Fentiek alapján a bizonyítás során feltételezünk egy létező optimális ütemtervet (a célfüggvény értékének ismerete nem szükséges), melyet alkalmasan megválasztott ütemterv-részletek módosításával (felcserélésével) megpróbálunk „elrontani”, miközben figyeljük a kapcsolódó ütemtervrészek változásait ...

Tételezzük fel, hogy találtunk egy optimális ütemtervet, mely nem kvázi „O”-

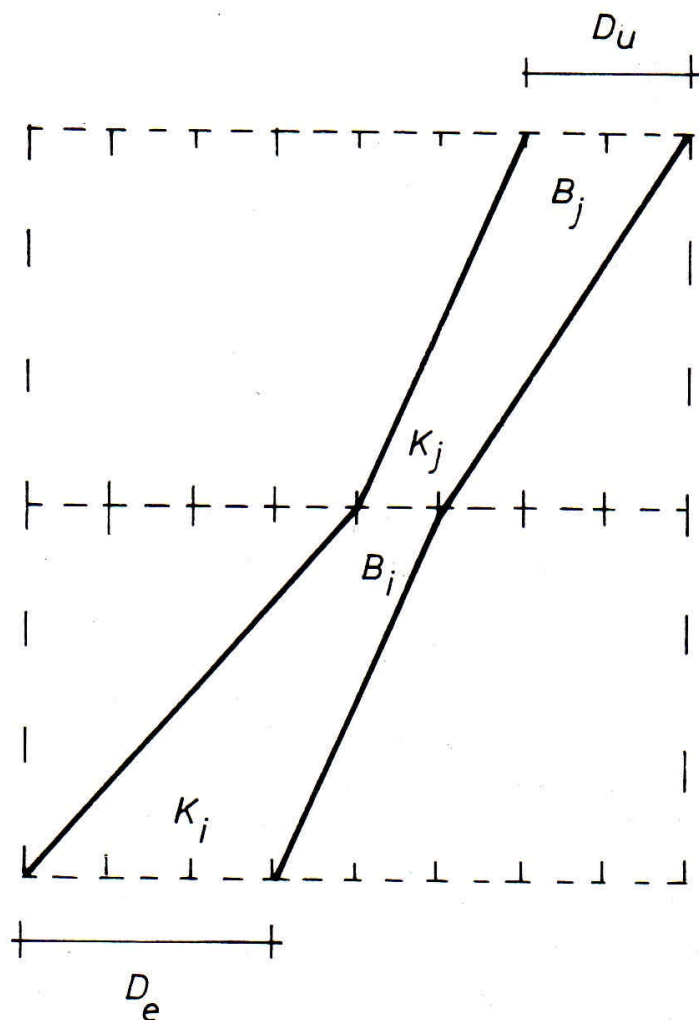
alakú. Ekkor bizonyosan található benne legalább egy olyan i, j munkadarabpár, melyre 2.1 teljesül. Több ilyen esetén tekintsük azt, melyben a munkadarabok legközelebb esnek egymáshoz ($j - i = \min$).

Ebben az esetben i és j között csak olyan munkadarab lehet, melynél $B_\ell = K_\ell$ ($i < \ell < j$), aminek hatásától, — mint azt a bizonyítás logikájából látni fogjuk — eltekinthetünk. Így praktikusán feltételezzük, hogy $j = i + 1$.

A bizonyítás során két alapesetet kell megkülönböztetnünk annak megfelelően, hogy a vizsgált munkadarabok ütemezését megelőző, illetve követő ütemtervrészek csatlakozásánál a követő idők (D_e és D_u) hogyan viszonyulnak egymáshoz:

- I. A követő csatlakozó ütemtervrésznél a követési idő kisebb vagy egyenlő a megelőző ütemtervrész csatlakozásánál lévő követési idővel ($D_u \leq D_e$):

(Lásd: 2. ábra)



2. ábra

i és j munkadarab ütemezése egy nem kvázi „O”-alakú ütemtervben (I. eset)

Felírható összefüggések:

$$B_i < K_i$$

$$B_j > K_j$$

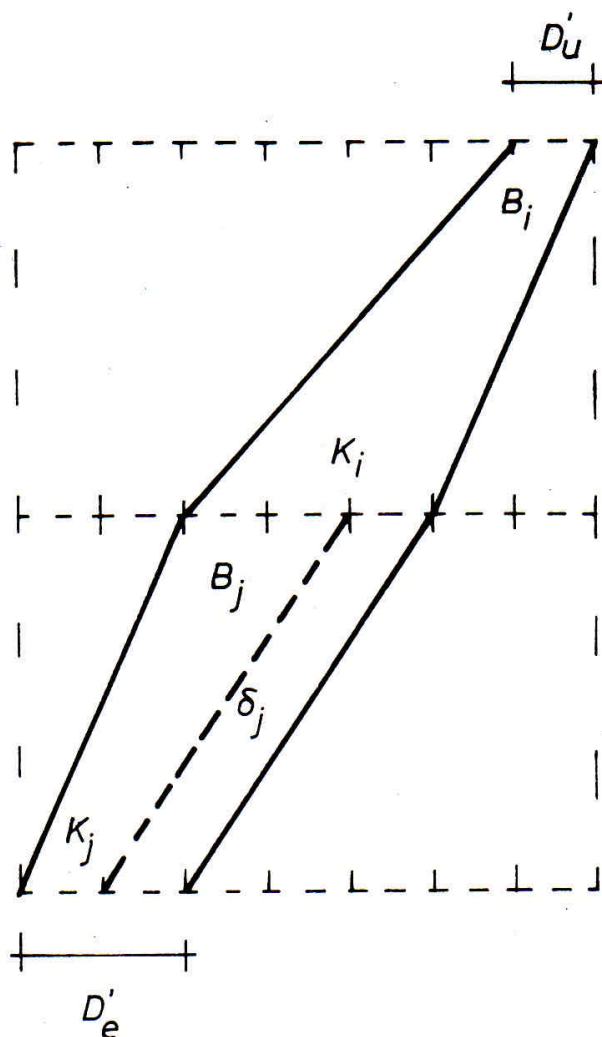
$$B_i = K_j$$

$$B_j \leq K_i$$

$$D_u = B_j$$

$$D_e = K_i$$

Változtassuk meg az adott optimális ütemtervet a két munkadarab felcserélésével!
(Lásd: 3. ábra)



3. ábra

Kvázi „O”-alakú ütemterv előállítása (I. eset)

Felírható összefüggések:

$$B_i < K_i$$

$$B_j > K_j$$

$$B_i = K_j$$

$$\delta_j = K_i - B_j$$

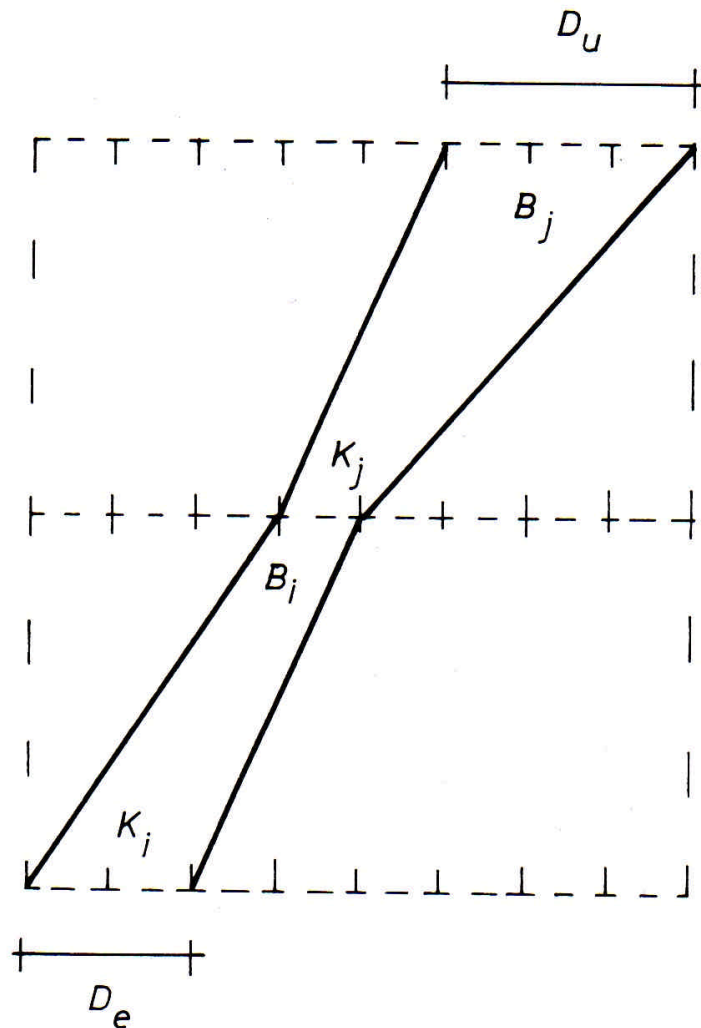
Ezekből következik:

$$D'_u = B_i = K_j < B_j = D_u \quad \text{illetve}$$

$$D'_e = K_j + \delta_j = K_j + K_i - B_j < K_i = D_e$$

II. A következő csatlakozó ütemtervrésznél a követési idő nagyobb a megelőző ütemtervrész csatlakozásánál lévő követési időnél ($D_u > D_e$):

(Lásd: 4. ábra)



4. ábra

i és j munkadarab ütemezése egy nem kvázi „O”-alakú ütemtervben (II. eset)

Felírható összefüggések:

$$B_i < K_i$$

$$B_j > K_j$$

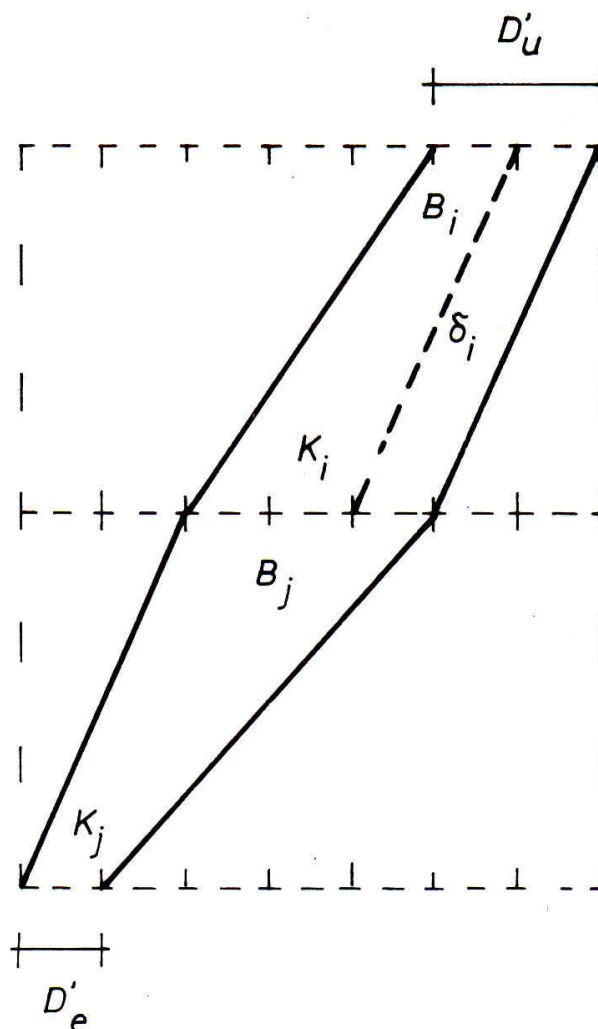
$$B_i = K_j$$

$$B_j > K_i$$

$$D_u = B_j$$

$$D_e = K_i$$

Változtassuk meg az adott optimális ütemtervet a két munkadarab felcserélésével!
(Lásd: 5. ábra)



5. ábra

Kvázi „O”-alakú ütemterv előállítása (II. eset)

Felírható összefüggések:

$$B_i < K_i$$

$$B_j > K_j$$

$$B_i = K_j$$

$$\delta_j = B_j - K_i$$

Ezekből következik:

$$D'_e = K_j = B_i < K_i = D_e \quad \text{illetve}$$

$$D'_u = B_i + \delta_i = B_i + B_j - K_i < B_j = D_u$$

Látható tehát, hogy a cserével a célfüggvény értéke egyik esetben sem nőtt. Az adott módon bármilyen ütemtervből kiindulva elő tudunk állítani kvázi „O”-alakú ütemtervet.

A bizonyítás során nem volt szükség annak vizsgálatára, hogy az adott párban szereplő munkadarabok ütemtervei eredeti állapotukhoz képest szét voltak-e húzva, vagy sem.

□

3. Szigorúan véve is „O”-alakú ütemterv

3.1 Definíció. Legyen g egy kvázi „O”-alakú optimális ütemtervben az utolsó olyan munkadarab indexe, melyre $K_i < B_i$, valamint legyen h ugyanebben az ütemtervben az első olyan munkadarab indexe, melyre $K_i > B_i$. (A kvázi „O”-alakú ütemterv definíciójából adódóan $g < h$.)

Szigorúan véve is „O”-alakú a kvázi „O”-alakú ütemterv, ha nem található benne olyan munkadarabpár, melyre

$$(3.1) \quad K_i > K_j \quad | \quad i < j \leq g$$

illetve

$$(3.2) \quad B_i < B_j \quad | \quad h \leq i < j$$

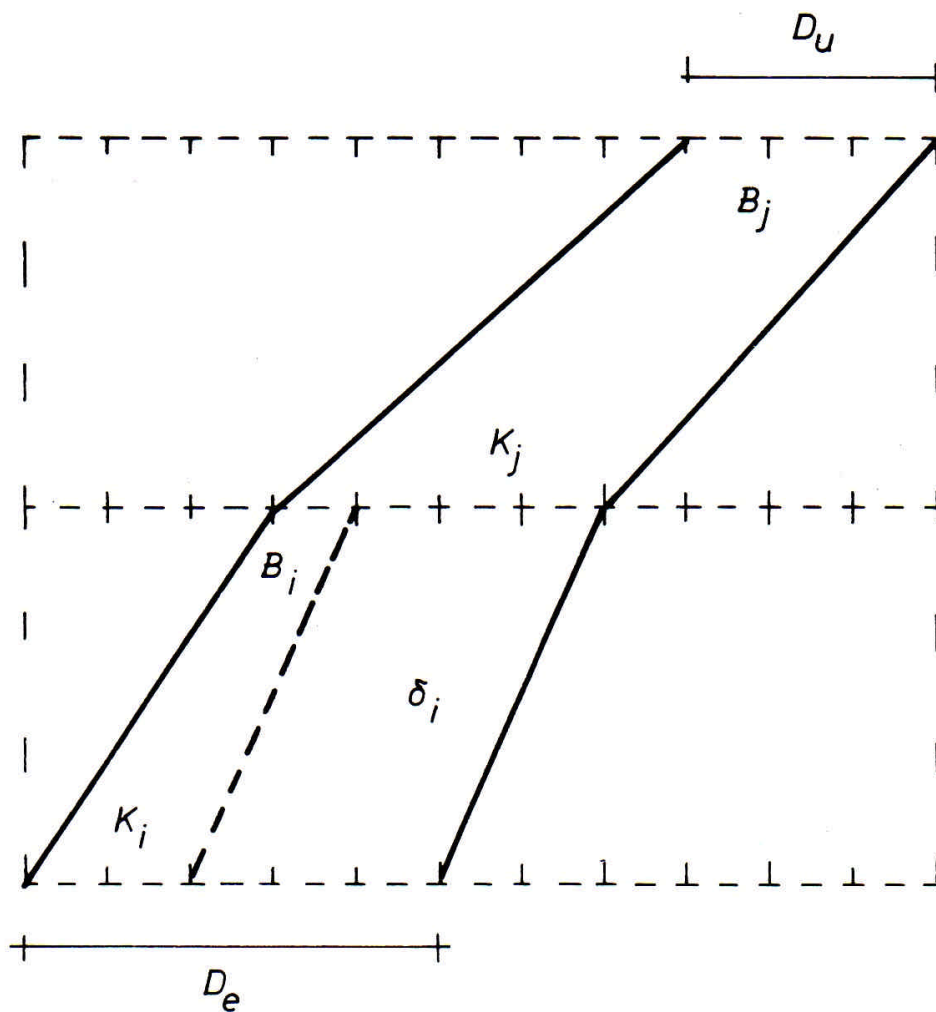
3.1 LEMMA. *Létezik olyan optimális ütemterv, mely szigorúan véve is „O”-alakú.*

Bizonyítás. Tételezzük fel, hogy találtunk olyan kvázi „O”-alakú optimális ütemtervet, mely szigorúan véve nem „O”-alakú. Ekkor bizonyosan található benne olyan szomszédos munkadarabpár, melyre vagy 3.1, vagy 3.2 teljesül. Tételezzük fel az utóbbit. Több ilyen pár esetén tekintsük azt, amelyben a munkadarabok legközelebb esnek egymáshoz. ($j - i = \min$).

Ebben az esetben i és j között csak olyan munkadarab lehet, melynél $B_\ell = K_\ell$ ($i < \ell < j$), aminek hatásától — mint azt a bizonyítás logikájából látni fogjuk — eltekinthetünk. Így praktikusán feltételezzük, hogy $j = i + 1$.

A bizonyítás során két esetet kell megvizsgálnunk aszerint, hogy a csatlakozó ütemtervrészeknél a minimális követési idők (B_j és K_i) hogyan viszonyulnak egymáshoz:

- I. A követő csatlakozó ütemtervrésznél a minimális követési idő nagyobb, vagy egyenlő a megelőző csatlakozó ütemtervrésznél lévő minimális követési idővel a j , illetve az i munkadarab ütemezésénél ($B_j \geq K_i$): (Lásd: 6. ábra)



6. ábra

i és j munkadarab ütemezése egy kvázi „O”-alakú, de szigorúan véve nem „O”-alakú ütemtervben (I. eset)

Felírható összefüggések:

$$B_i \leq K_i$$

$$B_j \leq K_j$$

$$B_i < B_j$$

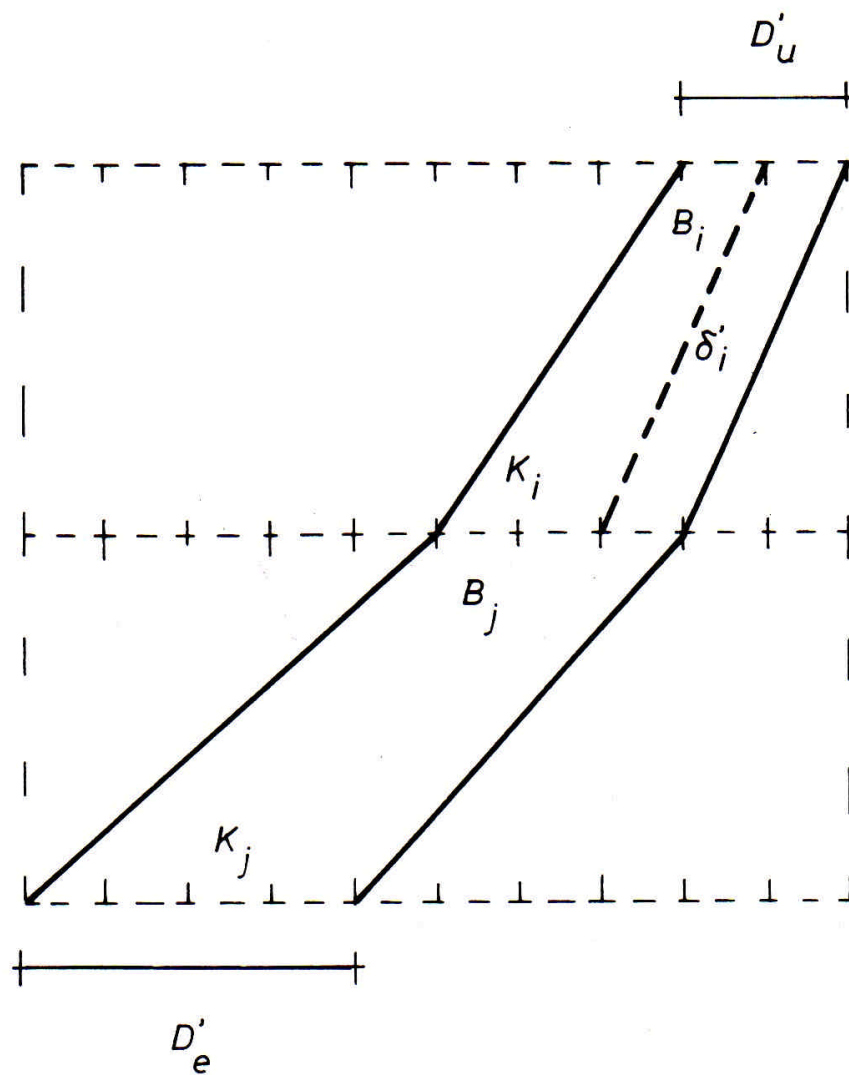
$$B_j \geq K_i$$

$$\delta_i = K_j - B_i$$

$$D_u = B_j$$

$$D_e = K_i + \delta_i$$

Változtassuk meg az adott optimális ütemtervet a két munkadarab felcserélésével! (Lásd: 7. ábra)



7. ábra

Szigorúan véve is „O”-alakú ütemterv előállítása (I. eset)

Felírható összefüggések:

$$B_i \leq K_i$$

$$B_j \leq K_j$$

$$B_i < B_j$$

$$B_j \geq K_i$$

$$\delta'_i = B_j - K_i$$

Fentiekből következően:

$$D'_u = B_i + \delta'_i = B_i + B_j - K_i \leq B_j = D_u \quad \text{illetve}$$

$$D'_e = K_j = B_i + \delta_i = B_i + K_j - B_i \leq K_i + K_j - B_i = D_e$$

II. A követő csatlakozó ütemtervrésznél a minimális követési idő kisebb a megelőző csatlakozó ütemtervrésznél lévő minimális követési időnél a j , illetve az i munkadarab ütemezésénél ($B_j < K_i$): (Lásd: 8. ábra)

Felírható összefüggések:

$$B_i \leq K_i$$

$$B_j \leq K_j$$

$$B_i < B_j$$

$$B_j < K_i$$

$$\delta_i = K_j - B_i$$

$$D_u = B_j$$

$$D_e = K_i + \delta_i$$

Majd csere után ...

(Lásd: 9. ábra)

Felírható összefüggések:

$$B_i \leq K_i$$

$$B_j \leq K_j$$

$$B_i < B_j$$

$$B_j < K_i$$

$$\delta_j = K_i - B_j$$

Fentiekből következően:

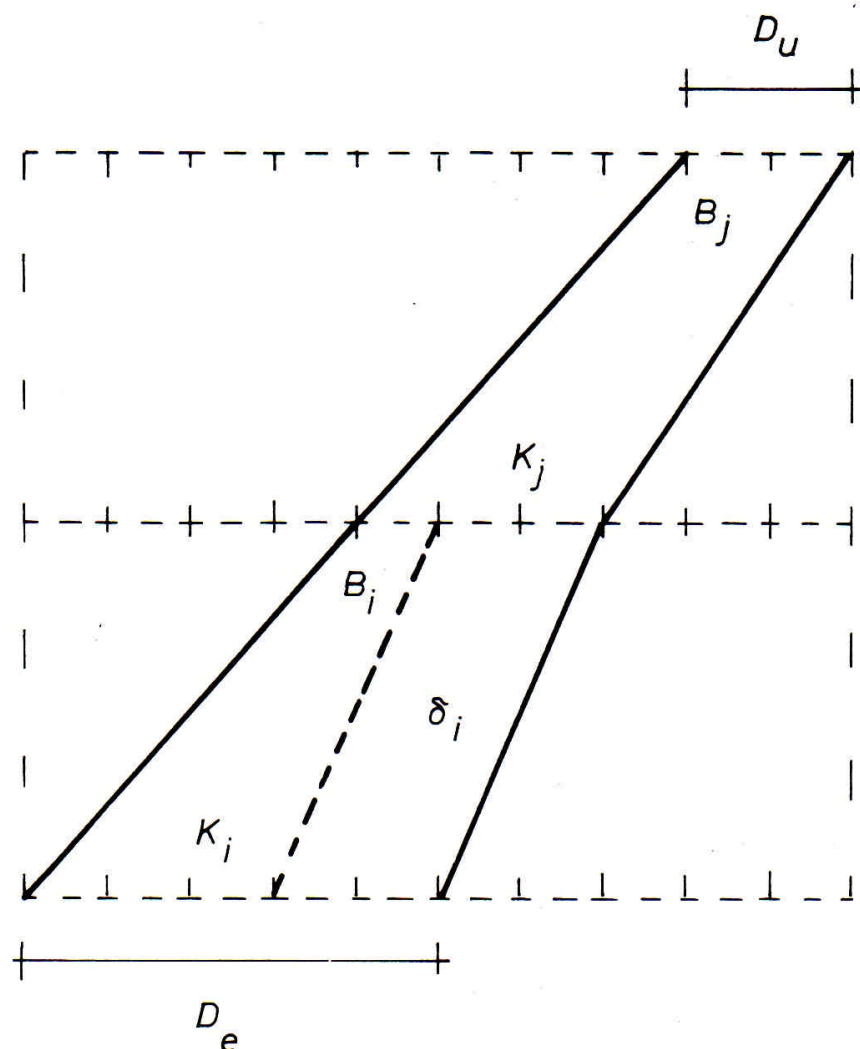
$$D'_u = B_i < B_j = D_u \quad \text{illetve}$$

$$D'_e = K_j + \delta_j = K_j + K_i - B_j < K_i + K_j - B_i = D_e$$

Látható tehát, hogy a cserével a célfüggvény értéke egyik esetben sem nőtt.

A bizonyítás során nem volt szükség annak vizsgálatára, hogy j munkadarab ütemterve eredeti állapotához képest szét volt-e húzva, vagy sem.

Hasonló módszer alkalmazható bizonyításra 3.1 teljesülése esetén is. Az adott módon bármilyen kvázi „ O ”-alakú ütemtervből kiindulva, szigorúan véve is „ O ”-alakú ütemterv állítható elő. $\square$



8. ábra

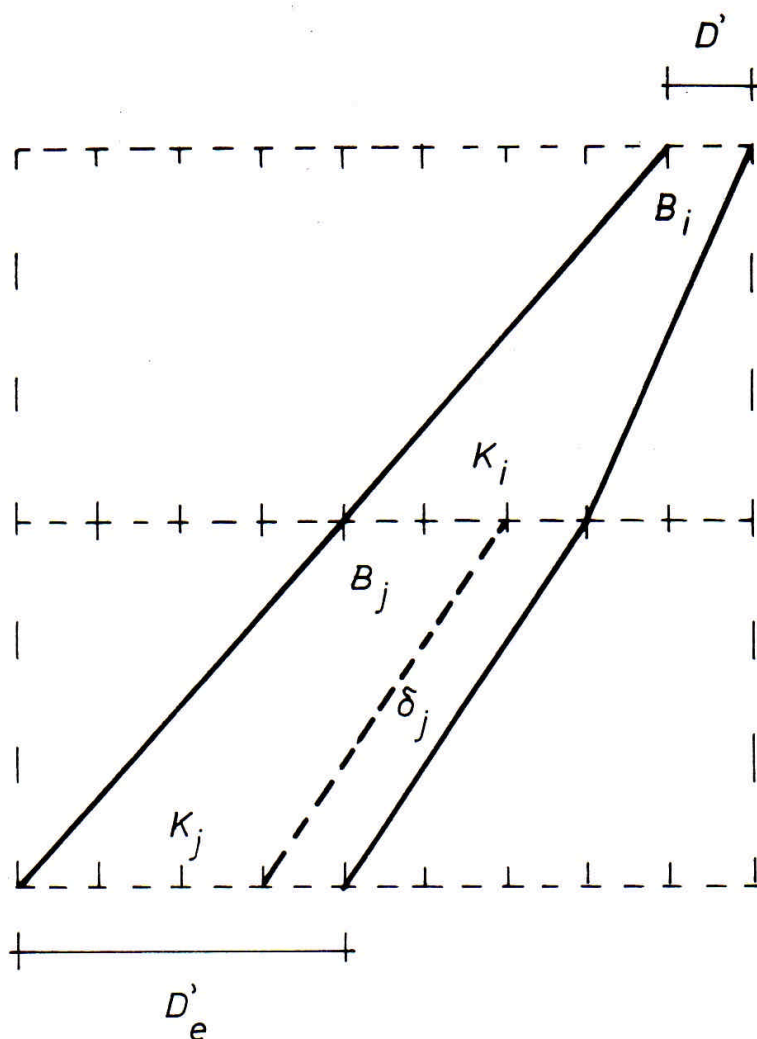
i és j munkadarab ütemezése egy kvázi „O”-alakú, de szigorúan véve nem „O”-alakú ütemtervben (II. eset)

3.1 TÉTEL. Ha egy ütemtervről belátható, hogy szigorúan véve is „O”-alakú, akkor bizonyos, hogy optimális is.

Bizonyítás. Bármely ütemterv teljes átfutási ideje (T) két jól elkülöníthető részre bontható fel:

- A megmunkálási idők összege az első gépen (T'_u);
- Követési idő a két gép munkavégzése között az utolsó munkadarabon a megmunkálások befejezésekor (T''_u),

vagy



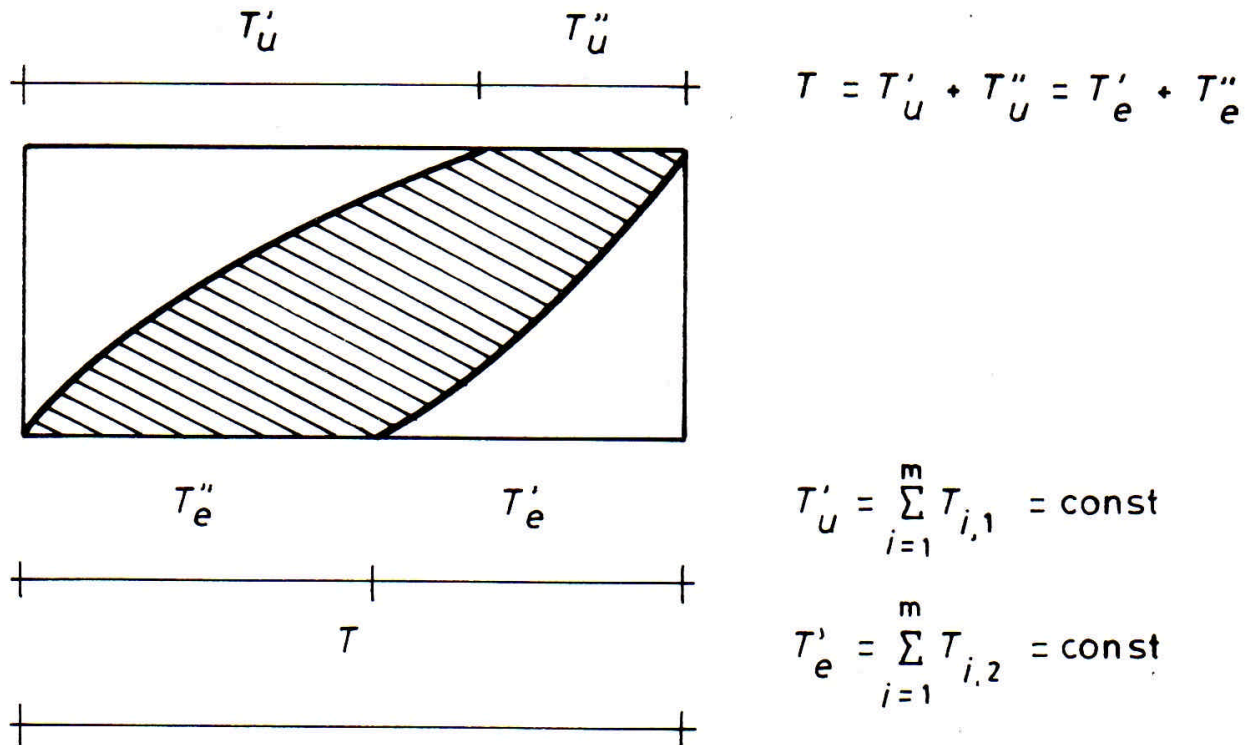
9. ábra

Szigorúan véve is „O”-alakú ütemterv előállítása (II. eset)

- A megmunkálási idők összege a második gépen (T'_e);
- Követési idő a két gép munkavégzése között az első munkadarabon a megmunkálások kezdetekor (T''_e).

Tekintve, hogy $\sum_{i=1}^m T_{i,1} = T'_u$ és $\sum_{i=1}^m T_{i,2} = T'_e$ sorrendtől független konstansok, $\min(C_{\max}) = \min(T)$ akkor van, ha $T''_e = T''_{e\min}$, vagy $T''_u = T''_{u\min}$. Márpedig ez szigorúan véve is „O”-alakú ütemtervnél — definícióból adódóan is — teljesül.

(Lásd: 10. ábra) $\square$



10. ábra

A célfüggvény változó része a követési idő

4. Megoldó algoritmus

4.1 Algoritmus. Szigorúan véve is „O”-alakú ütemterv előállítására szolgáljon az alábbi algoritmus:

CR_i -k növekvő sorrendjében döntsünk afelől, hogy adott munka a leendő sorrendben az első-, illetve utolsó pozíciótól befelé, a sorrend elejére (a már sorolt elsők mögé), vagy végére (a már sorolt utolsók elé) kerüljön, annak megfelelően, hogy $CR_i = K_i$, vagy $CR_i = B_i$. Amennyiben $CR_i = K_i = B_i$, úgy tetszőlegesen dönthetünk.

4.1 TÉTEL. Fenti algoritmus optimumot szolgáltat nemcsak $F2|\text{overlap}|C_{\max}$, de $F2 \parallel C_{\max}$ feladatnál is. Bizonyítást lásd a következő tételnél!

4.2 Algoritmus. Az $F2 \parallel C_{\max}$ feladat megoldására már 1945-ben S. M. Johnson közölt algoritmust [2], miszerint:

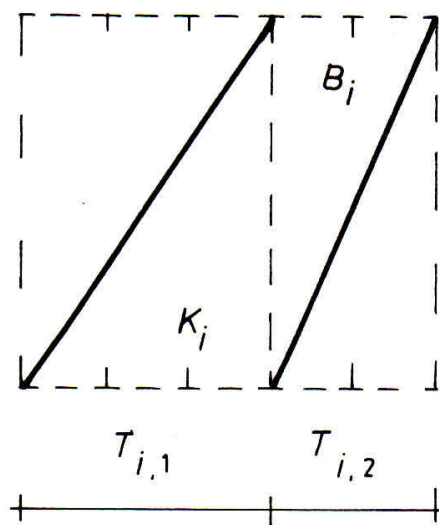
A megmunkálási idők növekvő sorrendjében döntsünk afelől, hogy egy adott munka a leendő sorrendben az első-, illetve utolsó pozíciótól befelé

a sor elejére (a már sorolt első mögé), vagy végére (a már sorolt utolsók elé) kerüljön, annak megfelelően, hogy az adott megmunkálási idő az első, vagy a második gépen jelentkezik-e.

Amennyiben az adott munkán mindkét gép azonos ideig dolgozik, úgy tetszőlegesen dönthetünk.

4.2 TÉTEL. 4.2 algoritmus 4.1 speciális esete.

Bizonyítás. $F_2 \parallel C_{\max}$ feladatnál is értelmezhetők — és a megmunkálási idők alapján egyszerűen meghatározhatók — a követési idők. Ezek ismeretében a feladat azonos $F_2 \mid \text{overlap} \mid C_{\max}$ -szal. — A tevékenységidők pedig mint követési idők jelennek meg. (Lásd: 11. ábra)



11. ábra

A követési idők az átlapolás nélküli feladatban is értelmezhetők

$$CR_i = \min\{T_{i,1}, T_{i,2}\}$$

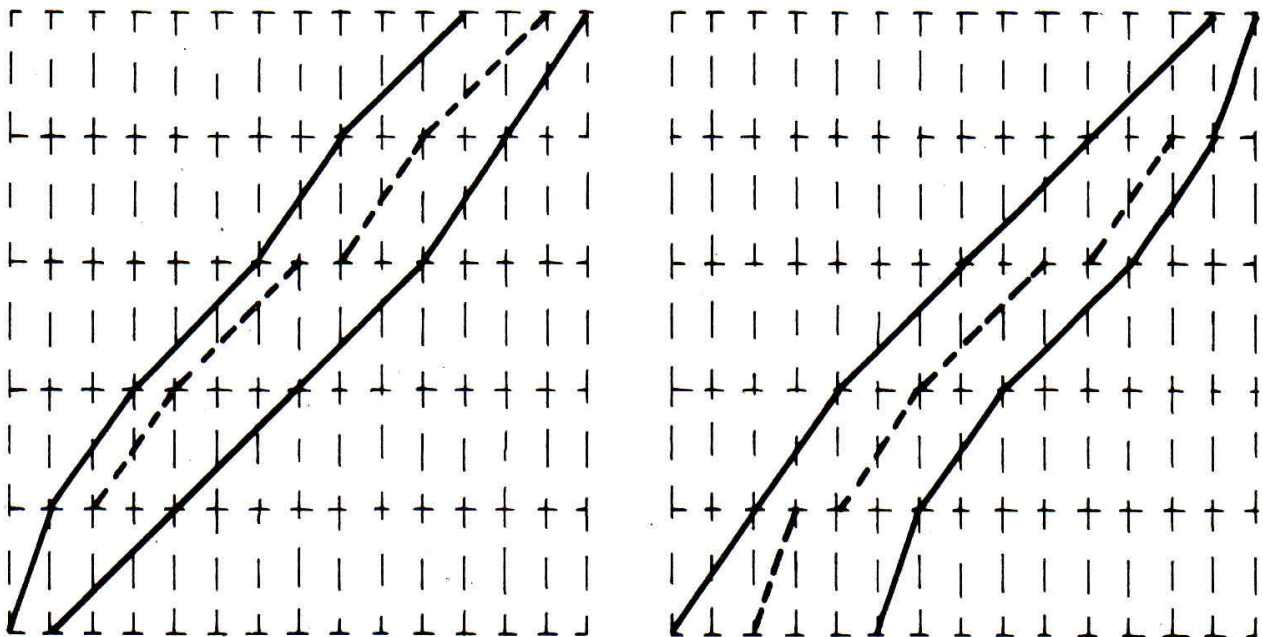
$$B_i = \max\{CR_i, CR_i + T_{i,2} - T_{i,1}\} = T_{i,2}$$

$$K_i = \max\{CR_i, CR_i + T_{i,1} - T_{i,2}\} = T_{i,1}$$

Vegyük észre, hogy ezennel Johnson algoritmusának helyességét is bizonyítottuk, hiszen az általa szolgáltatott sorrend szintén szigorúan véve is „O”-alakú ütemtervet ad. $\square$

4.3 TÉTEL. $F2 \parallel C_{\max}$ feladat optimuma $F2 \mid \text{idle} \mid C_{\max}$ feladatnak is, illetve $F2 \mid \text{overlap} \mid C_{\max}$ feladat optimuma egyben optimuma $F2 \mid \text{overlap, idle} \mid C_{\max}$ feladatnak is.

Bizonyítás. $F2 \mid \text{idle} \mid C_{\max}$, illetve $F2 \mid \text{overlap, idle} \mid C_{\max}$ feladatok optimális megoldásaiban elképzelhető, hogy az első, vagy a második gép ütemezésében szakadás van. Ekkor az első gépen a kezdés, a második gépen pedig a befejezés irányában elmozdítva a megmunkálásokat az állásidők a célérték zavarása nélkül felszámolhatók. (Lásd: 12. ábra) $\square$



12. ábra

A várakozási idők megengedése nincs hatással a feladatra

Megjegyzés. Az egyes gépek ütemezésének megszakítására a gyakorlatban pl. a két gép közötti korlátozott raktárkapacitás, illetve „sérülékeny állapotok” miatt kerülhet sor.

IRODALOM

- [1] „Deterministic and stochastic scheduling”, *Proceedings of the NATO Advanced Study and Research Institute on Theoretical approaches to scheduling problems held in Durham* (M. A. H. Dempster, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan, eds.) (England, 1981).

- [2] JOHNSON, S. M., „Optimal Two- and Three-Stage Production Schedules with Setup Times Included”, *Naval Research Logistics Quarterly* 1 (1954), 61–68.
- [3] MODER, J. J., PHILLIPS, C. R. and DAVIS, E. W., *Project Management with CPM PERT and Precedence Diagramming* (Van Norstrand Reinhold, New York, 1983).
- [4] PILCHER, ROY, *Principles of Construction Management* (McGraw-Hill, Berkshire, England, 1976).

(Beérkezett: 1993. április 15.)

VATTAI ZOLTÁN ANDRÁS
BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
ÉPÍTÉSKIVITELEZÉSI TANSZÉK
1111 BP., MŰEGYETEM RKP 3.
TEL/FAX: 1813-377

ALGORITHM FOR SOLVING $F_2 \mid \text{OVERLAP} \mid C_{\max}$ PROBLEM

Z. A. VATTAI

A new approach algorithm for solving $F_2 \mid \text{overlap} \mid C_{\max}$ problem is discussed. While preparing for description of the method definition of “quasi O shaped schedule” and that of “absolute O shaped schedule” are settled. A demonstrative proof for Johnson’s algorithm for $F_2 \parallel C_{\max}$ problem is also discussed. Via theorems and their proofs it got be shown that the new algorithm gives solutions for problems $F_2 \parallel C_{\max}$, $F_2 \mid \text{idle} \mid C_{\max}$ and $F_2 \mid \text{overlap, idle} \mid C_{\max}$ too.